Túlio Oliveira de Carvalho

(Org.)

Caderno de pesquisas do Profmat/UEL

Pedro & João editores

Caderno de Pesquisas do Profmat/UEL

Pedro & João editores

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, por meio dos recursos do PROEB.

Túlio Oliveira de Carvalho
(Organizador)

Caderno de Pesquisas do Profmat/UEL

Pedro & João
editores

Túlio Oliveira de Carvalho [Org.]

Caderno de Pesquisas do Profmat/UEL. São Carlos: Pedro & João Editores, 2024. 155p. 16 x 23 cm.

ISBN: 978-65-265-1364-4 [Impresso]
978-65-625-1365-1 [Digital]

1. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. 2. Universidade Estadual de Londrina. 3. Caderno de Pesquisas. 4. Pesquisas em Matemática. I. Título.

CDD – 370

Capa: Luidi Belga Ignacio
Ficha Catalográfica: Hélio Márcio Pajeú – CRB - 8-8828
Diagramação: Diany Akiko Lee
Editores: Pedro Amaro de Moura Brito & João Rodrigo de Moura Brito

Pedro & João Editores
www.pedroejoaoeditores.com.br
13568-878 – São Carlos – SP
2024

Prefácio

A presente coletânea de textos traz algumas reflexões sobre diversos aspectos da Matemática na Educação Básica. Estas contribuições constituem um recorte das orientações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, o Profmat, no polo da Universidade Estadual de Londrina.

O Profmat-UEL teve início em 2011. Desde então, o programa veio evoluindo em resposta a novas questões postas pela aprovação da Base Nacional Comum Curricular, assim como a delimitação de um público-alvo formado preferencialmente por professores em atuação na rede pública no ensino básico de Matemática. Por outra parte, houve manutenção da estrutura curricular e da famosa prova nacional chamada *Exame Nacional de Qualificação.*

Das experiências que decorreram da interação Universidade e Escola Básica, conformadas pelas boas e más dicotomias presentes em tal relação, este volume se apresenta como manifestação. Trata-se de renovar os saberes alimentados pelas preocupações e experiências didáticas e pedagógicas originadas na Educação Básica, particularmente para os temas que dialogam com a matemática.

A coletânea se organiza em seis capítulos, que reproduzem em incontida modéstia a diversidade dos diálogos da matemática. Discorrem sobre temas e problemas transversais, cursos técnicos, números inteiros, a relação entre história da matemática e a geometria de números construtíveis, problemas em aritmética modular e equações nos anos finais do ensino fundamental.

Desta maneira, esse livro apresenta a percepção de que, ao ensinar matemática, existe a possibilidade de explorar conteúdos e metodologias de ensino que oportunizam aos estudantes aprender matemática e vivenciá-la a partir de situações cotidianas, considerando as perspectivas de seus autores.

Experienciar a matemática nessa perspectiva permite que o estudante da Educação Básica amplie seus horizontes, passando de mero resolvedor de problemas algoritmizados a pensante. Esse seria um pensamento matemático, logo, lógico e diferenciado, que invoca uma diversidade de saberes a serem construídos em sala de aula. A matemática, sob este olhar, cumpre um papel que ultrapassa a memorização de fórmulas e técnicas procedimentais, invocando posicionamento crítico e reflexivo diante do mundo.

Este caminho pode conduzir a uma ampliação do saber e consequentemente, redução das desigualdades educacionais, ampliando os horizontes para uma escola mais justa e democrática.

Para além de publicar estas contribuições de egressos e orientadores do Profmat-UEL, estes textos manifestam um convite aos professores de matemática da escola básica a escreverem e lerem sobre a própria atuação, um exercício que consideramos transformador.

Sumário

Cursos técnicos: alguns problemas para o ensino de matemática

Paulo Henrique Robel[1]
Regina Célia Guapo Pasquini[2]

Introdução

O mundo do trabalho exige constante evolução, de modo que as pessoas busquem por formação profissional a fim de exercerem suas atividades ou, ainda, para alçarem novas oportunidades de trabalho e de vida. Entre os diversos cursos ofertados, há a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, no contexto da Educação Básica ofertada gratuitamente pelo governo estadual. Tendo como foco essa temática, o objetivo deste texto é apresentar o recorte de uma proposta de ensino de conteúdos de Matemática (ROBEL, 2019) para os cursos dessa modalidade, em particular, o Curso Técnico em Administração e Informática. Este trabalho, por sua vez, buscou apresentar problemas que envolvem situações cotidianas que, possivelmente, um técnico irá enfrentar ao atuar no mercado de trabalho. É desejável que o ensino dos conteúdos de Matemática contemple essas situações, por isso, é relevante que estas abordagens sejam construídas para estes cursos.

Iniciamos este trabalho com uma rápida abordagem do contexto destes cursos para avançarmos em direção à apresentação de quatro problemas. Além disso, escolhemos compor o texto em

[1] Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina – UEL. Professor da Rede Estadual de Ensino do Estado do Paraná em Londrina, Paraná.Contato: paulohenriquerobel@gmail.com

[2] Doutora e Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP/ *Campus* Rio Claro. Professora Associada no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL, Londrina, Paraná. Contato: rcgpasq@uel.br

uma linguagem que traz detalhadamente a solução do problema em questão, viabilizando sua utilização àqueles que desejarem.

Dessa forma, espera-se, a partir da proposta apresentada e dos assuntos tratados, contribuir com o trabalho do professor de Matemática e, consequentemente, com a educação profissional em geral.

A Educação Profissional Técnica de Nível Médio: alguns aspectos

A oferta dos cursos técnicos em nível médio em nosso país possui várias idas e vindas. Por um longo período, estes cursos foram oferecidos por um número restrito de escolas em nosso Estado. Sem aprofundarmos nesse assunto iniciamos nossa exposição a partir do ano de 2003, em que o Governo do Estado do Paraná retomou a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, que até então estava com oferta reduzida e sendo gerenciada pela PARANATEC, extinguindo esta última e criando na Secretaria Estadual de Educação (SEED) o Departamento de Educação e Trabalho (DET) (BRASIL, 2013).

Esta retomada foi precedida de amplos debates em âmbito estadual em fóruns que reuniam professores da Educação Profissional Técnica de Nível Médio. A partir destes debates, a Educação Profissional Técnica de Nível Médio foi retomada tendo o trabalho como princípio educativo.

Na década de 90, a oferta dos cursos técnicos ficou restrita a alguns Centros Estaduais de Educação Profissional. Entretanto, de acordo com as Diretrizes da Educação Profissional do Estado do Paraná:

> (…) a partir de 2003, a política estabelecida para a Rede Estadual iniciou não somente a retomada da oferta pública e gratuita da formação para o trabalho, mas, também, passou a assumir a concepção de ensino e currículo em que o trabalho, a cultura, a ciência e a tecnologia constituem fundamentos sobre os quais os conhecimentos escolares devem ser trabalhados e assegurados, na

perspectiva da escola unitária e de uma educação politécnica (PARANÁ, 2006, p. 15).

Atualmente, a Educação Profissional Técnica de Nível Médio é ofertada em duas modalidades: 1. *Articulada*; 2. *Subsequente*. Na modalidade *Articulada* ela pode ser ofertada na forma *integrada* em que o estudante cursa na mesma instituição as disciplinas do Ensino Médio normal e as disciplinas técnicas; e na forma *concomitante* em que o estudante cursa em uma instituição as disciplinas do Ensino Médio Normal e em outra as disciplinas técnicas. A modalidade Subsequente é destinada a pessoas que já concluíram o Ensino Médio.

Todos os cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio são organizados por eixos tecnológicos constantes no Catálogo Nacional de Cursos Técnicos, e são mantidos pelo Ministério da Educação. Por exemplo, os Cursos Técnicos em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos e Secretariado, pertencem ao eixo tecnológico de Gestão e Negócios. Já o Curso Técnico em Informática pertence ao eixo tecnológico de Informação e Comunicação.

Em nossa cidade, Londrina, Paraná, uma das escolas que oferece este nível de formação escolar é o Colégio Estadual Vicente Rijo[3], em Londrina – PR – que oferta os Cursos Técnicos em Administração e Informática na modalidade *Integrada* e os Cursos Técnicos em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos, Secretariado e Informática na modalidade *Subsequente*. Vale comentar que, o formato dos Cursos Técnicos de Londrina, incluindo as disciplinas constantes em cada curso, segue um padrão definido pelo Departamento de Educação e Trabalho da Secretaria Estadual de Educação (DET/SEED) (BRASIL, 2018).

Conforme mencionado anteriormente, os Cursos Técnicos na modalidade Subsequente são destinados a estudantes que já

---

[3] O primeiro autor deste texto atua na docência neste Colégio desde 2009, ou seja, há 14 anos.

concluíram o Ensino Médio. Por isso, estes cursos têm um público bastante variado. Encontram-se nestes cursos, desde pessoas que saíram recentemente do Ensino Médio, até pessoas que deixaram os bancos escolares há muito tempo por diferentes motivos (que não cabe citá-los neste texto). Eventualmente, encontram-se nestes cursos pessoas que estão cursando ou que já concluíram uma graduação. A faixa etária é também bastante variada, são pessoas com idade desde os 18 anos até aquelas que possuam entre 50 e 60 anos. Uma característica comum do público destes cursos é que as pessoas já estão no mercado de trabalho e voltam aos bancos escolares para se atualizarem e buscarem melhores e mais oportunidades de emprego.

Os Cursos Técnicos de Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos e Secretariado possuem em sua grade curricular as disciplinas de Matemática Financeira e de Estatística Aplicada.

No âmbito do PROFMAT/UEL produzimos uma dissertação de mestrado intitulada "Uma Abordagem para a Matemática em Cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio a partir de Contextos da Prática Profissional", cujo conteúdo apresenta uma proposta para o trabalho com os conteúdos de Matemática necessários à formação dos estudantes que cursam estes cursos (ROBEL, 2019). Mais especificamente, apresentamos um tratamento para os conteúdos de Matemática a partir de situações práticas, de cada área desejada, seja ela em Administração, Contabilidade, Logística, Recursos Humanos, Secretariado e Informática. E para este texto, escolhemos fazer um recorte trazendo alguns problemas referente ao curso Técnico em Administração. Esperamos disseminar ainda mais as ações deste Programa de Pós-graduação, ao atingir um número maior de pessoas que possivelmente possam utilizar o conhecimento produzido nesta dissertação, para o desenvolvimento de suas práticas neste nível de ensino.

De um modo geral, a proposta apresentada é circunstanciada a partir de problemas, que, quando resolvidos podem proporcionar a sistematização de novos conhecimentos, revisar outros, bem como situar o estudante no contexto da sua futura (ou atual) prática profissional. Salientamos que os conteúdos de Matemática devem ser trabalhados a partir de situações e contextos da prática profissional do estudante. Com isso, deverão ser promovidas nas aulas de cada disciplina, e em particular nas aulas de Matemática, associações que possam refletir aspectos do mundo do trabalho (PARANÁ, 2006).

Os problemas apresentados no decorrer deste trabalho têm basicamente duas origens: alguns foram enunciados a partir de situações reais de empresas, decorrentes da experiência profissional nesta área do primeiro autor, e outros construídos a partir da experiência referente à participação de ambos os autores no Projeto[4] de Extensão intitulado *Educação Financeira: Matemática, Economia e Cidadania.* Circunstancialmente, os estudantes destes cursos carecem do conhecimento de conteúdos de matemática, ainda da Educação Básica. Nossa experiência demonstra que é possível realizar um trabalho integrado dos conhecimentos básicos e dos conhecimentos técnicos referentes à cada área nas disciplinas de Matemática Financeira e Estatística Básica. A esse respeito, nos diz as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio:

> Art. 9º Na oferta de cursos na forma subsequente, caso o diagnóstico avaliativo evidencie necessidade, devem ser introduzidos conhecimentos e habilidades inerentes à Educação Básica, para complementação e atualização de estudos, em consonância com o respectivo eixo tecnológico, garantindo o perfil profissional de conclusão (BRASIL, 2012, p. 4).

Outra característica importante deste trabalho é a utilização de dois dispositivos computacionais de ampla utilização no mercado

---

[4] Este projeto pertence ao Departamento de Matemática da UEL. Maiores informações podem ser obtidas no site: https://www.sistemasweb.uel.br/index.php?contents=system/prj/pex/index.php&pagina=pex_qry_numeroordem2.php

de trabalho quando o assunto se refere ao setor financeiro: *planilhas de cálculo* e a utilização da consagrada *calculadora financeira HP12C*. Deste modo, para os problemas apresentados na dissertação, além da solução Matemática, detalhando todos os cálculos e ideias envolvidas, quando cabível, são apresentadas soluções utilizando estes dispositivos.

De fundamental importância para o desenvolvimento dos problemas propostos neste trabalho foi a experiência deste autor com algoritmos computacionais (programação de computadores), pois ela influenciou no desenvolvimento das soluções sugeridas, com uso da calculadora financeira HP12C e de planilhas de cálculo.

Quanto às estratégias metodológicas a serem utilizadas para o tratamento dos conteúdos para estes cursos podemos buscar apoio nos diversos autores da Educação Matemática (BASSANEZI, 2006; ONUCHIC, 2014).

> No processo evolutivo da Educação Matemática, a inclusão de aspectos de aplicações e mais recentemente, resolução de problemas e modelagem, têm sido defendidas por várias pessoas envolvidas com o ensino de matemática. Isto significa, entre outras coisas, que a matéria deve ser ensinada de um modo significativo matematicamente, considerando as próprias realidades do sistema educacional (BASSANEZI, 2006, p. 36).

Uma das capacidades requeridas de um profissional no mundo do trabalho é a de resolver problemas. O desenvolvimento tecnológico experimentado pela sociedade nas últimas décadas mostra a necessidade das pessoas se adaptarem rapidamente às mudanças e traçar estratégias para resolverem problemas e atuarem em diversos setores da economia. Em face desta necessidade, precisamos ter sempre em mente a que, e para quem estamos ensinando. Pois, para se ter um melhor aproveitamento do retorno do estudante à sala de aula e, tendo como premissa as habilidades que devem desenvolver para se integrar ao mundo do trabalho, tendo-o como princípio educativo, é interessante convidar os/as estudantes dos Cursos Técnicos Profissionalizantes a construírem ou reconstruírem seu conhecimento matemático, nas disciplinas de Matemática Financeira e Estatística Aplicada, a partir da utilização de problemas (ROBEL, 2019).

O Curso Técnico em Administração – alguns problemas

A fim de compreendermos acerca do que se espera da aprendizagem de conteúdos de Matemática e Estatística para o profissional formado no curso técnico em Administração apresentamos a seguir, o seu perfil profissional.

> O Técnico em Administração domina conteúdos e processos relevantes do conhecimento científico, tecnológico, social e cultural utilizando suas diferentes linguagens, o que lhe confere autonomia intelectual e moral para acompanhar as mudanças, de modo a intervir no mundo do trabalho. Executa as funções de apoio administrativo: protocolo e arquivo, confecção e expedição de documentos administrativos e controle de estoques. Opera sistemas de informações gerenciais de pessoal e material. Utiliza ferramentas da informática básica, como suporte às operações organizacionais. (PARANÁ, 2013, p. 47).

Entre as diversas disciplinas que o estudante deverá cursas está a Matemática Financeira, cuja Ementa é: Aplicação dos conhecimentos específicos para a realização de cálculos financeiros. Análise de fatores financeiros e de investimentos para a tomada de decisão na gestão empresarial.

É importante salientar que todas as disciplinas do curso possuem alguma relação com a Matemática. Tomemos, por exemplo, a disciplina de Fundamentos do Trabalho. Trata-se de uma disciplina por meio da qual a/o estudante irá construir o conhecimento de sua realidade social e econômica. Ao tratar das relações entre trabalhadores e capitalistas, aos estudantes serão apresentados dados diversos, como do mercado de trabalho, sobre o qual há diversas e complexas estatísticas cuja compreensão exige a interpretação de dados. Deste modo, é importante salientar que esta disciplina se sustenta sobre noções que a Matemática possui e que são básicas para a análise e compreensão dos fatos apresentados.

A seguir, apresentamos a proposta anunciada, que traz quatro problemas com os respectivos encaminhamentos em termos de solução.

PROBLEMA 1: sobre o Imposto de Renda (IR) incidido nas aplicações financeiras de uma empresa

Uma das situações que o profissional técnico em Administração poderá enfrentar na sua prática é inerente das aplicações dos recursos financeiros que a empresa possui em diferentes formas que o mercado financeiro oferece, como por exemplo: em renda fixa ou variável ou aplicação de recursos na própria operação da empresa, como aquisição de novos equipamentos, softwares, construção etc. Este tipo de problema envolve os conceitos de montante e juros compostos, amplamente utilizados no mercado financeiro. Para o tratamento desses conceitos os estudantes devem possuir conhecimentos prévios sobre cálculo de porcentagem, de juros simples, montante simples e potenciação.

PROBLEMA 1: Uma empresa fez uma aplicação financeira de R$ 2.000.000,00 a uma taxa composta de 1,5% ao mês. O recurso ficou aplicado por dois anos e cinco meses, sendo então resgatado. Sabe-se que no momento do resgate incide sobre o rendimento a alíquota de 17,5% de imposto de renda. Calcule o montante e o valor dos juros compostos antes do imposto de renda e o valor líquido obtido, após a incidência do imposto de renda.

SOLUÇÃO: Como este problema trata de montante e juros compostos, a fórmula que será utilizada é

$$M = C(1+i)^n \tag{1}$$

Onde M significa montante, C é o capital, i é a taxa de juros contratada e n é o prazo. Esta fórmula resulta de aplicações sucessivas da fórmula para montante simples, que pode ser expressa assim:

$$M_s = C(1+in) \tag{2}$$

Onde M_s corresponde ao montante simples.

No âmbito do conteúdo de juros simples, sabe-se que o cálculo do valor de juros é dado por

$$J = Cin \tag{3}$$

Onde J corresponde a juros.

O montante simples é dado por

$$M_s = C + J \tag{4}$$

Substituindo nessa expressão, a fórmula para cálculo dos juros (3), teremos:

$$M_s = C + Cin \tag{5}$$

E, então, isolando o capital nesta expressão, obtemos:

$$M_s = C(1+in) \tag{6}$$

Como o valor do montante composto de cada período (dia, mês, bimestre etc.) é obtido da aplicação da taxa de juros contratada sobre o período imediatamente anterior, podemos então calcular o montante aplicando sucessivamente a fórmula anterior. Isso nos dará:

- Montante no primeiro período:

$$M_1 = C(1+i)$$

- Montante no segundo período:

$$M_2 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$$

Continuando dessa forma, obteremos a fórmula (1), inicialmente sugerida para cálculo do montante composto. Ou seja, no regime de juros compostos, um capital C_0 é transformado, em determinado período do tempo n (considerando o tempo como um número natural), segundo uma taxa i em um montante

$$C_n = C_0(1+i)^n.$$

De fato, pode-se demonstrar por indução em n, a fórmula acima, considerando n um número natural. Para n = 1, tem-se que $C_1 = C_0(1 + i)$. Vamos colocar $C_n = C_0(1 + i)^n$ como nossa hipótese de indução. Então, temos que

$$C_{n+1} = C_n + C_n.i = C_0(1 + i)^n + C_0(1 + i)^n.i$$
$$= C_0(1 + i)^n.(1 + i) = C_0(1 + i)^{n+1}$$

Como queríamos demonstrar.

Vamos usar essa fórmula (1) para calcular o montante, antes da incisão do Imposto de Renda:

$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 2.000.000(1 + 0{,}015)^{29}$$
$$M = 2.000.000 \times 1{,}015^{29}$$
$$M = 2.000.000 \times 1{,}539981$$
$$M = 3.079.961{,}03$$

Então, o valor do montante composto, antes do Imposto de Renda, será de R$ 3.079.961,03.

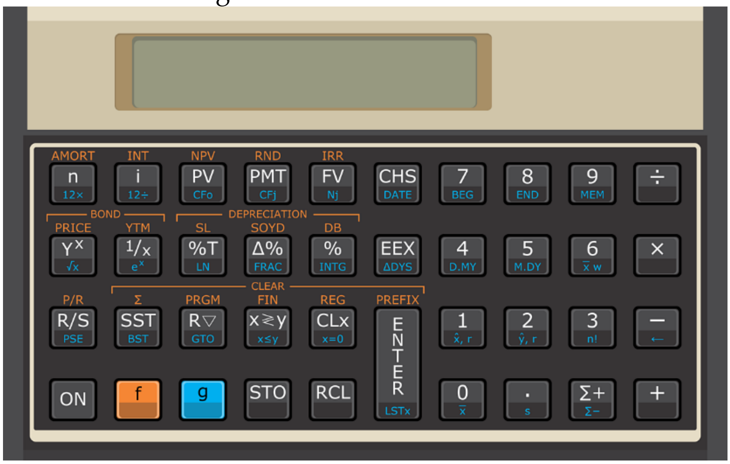
Conforme anunciamos anteriormente, os problemas propostos terão sua solução apresentada com uso da calculadora HP12C[5] (Figura 1). Trata-se de uma calculadora financeira programável que utiliza o método da notação polonesa reversa para realizar suas operações e conta com o conceito de fluxo de caixa para operações financeiras. A sua utilização justifica-se, pois, esta calculadora é por deveras consagrada no mercado financeiro mundial.

Na notação polonesa reversa, basicamente introduz-se primeiramente os valores, para somente então, realizar a operação desejada. Por exemplo, para realizarmos o cálculo “5+2” na HP12C, deve-se digitar o número 5, a tecla ENTER, o número 2, a tecla +, para assim obter o resultado, que será 7 - diferentemente das calculadoras padrões. Na figura 1, apresentada a seguir, apresentamos uma imagem desta calculadora.

---

[5] O manual da calculadora financeira HP12C pode ser encontrado em http://h10032.www1.hp.com/ctg/Manual/bpia5239.pdf

Figura 1: Calculadora HP12C



Fonte: Robel (2019)

Ao voltamos ao enunciado do Problema 1, podemos construir uma solução a partir do uso desta calculadora. Para isto, basta seguir a ordem dos passos detalhada na Tabela 1, ou seja, das teclas da HP12C.

Tabela 1: Cálculos com a HP12C do Problema 1 – parte 1

Número digitado	**Tecla da**	**Valor no visor**
2000000	**ENTER**	2.000.000,00
1,015	**ENTER**	1,015
29	$\mathbf{y^x}$	1,539981
	X	3.079.961,03

Fonte: Robel (2019)

E assim, obtemos o montante de R$ 3.079.961,03. O valor dos juros compostos é dado por

$$J = M - C \qquad (7)$$

Daí,

$$J \;=\; 3.079.961{,}03 - 2000.000{,}00 = 1.079.961{,}03$$

Usando a calculadora HP12C:

Tabela 2: Cálculos com a HP12C do Problema 1 – parte 2

Número digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
3079961,03	**ENTER**	3.079.961,03
2000000	**-**	1.079.961,03

Fonte: Robel (2019)

Obtendo os juros de R$ 1.079.961,03. Quando esse valor for resgatado, será descontado de o valor correspondente a 17,50%.

Então, se I R for o valor do Imposto de Renda, teremos:

$$\text{I R} = 1.079.961{,}03 \times 17{,}5\%$$

$$\text{I R} = 188.993{,}18$$

Na calculadora HP12C:

Tabela 3: Cálculos com a HP12C do Problema 1 – parte 3

Número digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1079961,03	**ENTER**	1.079.961,03
17,5	**%**	188.993,18

Fonte: Robel (2019)

Assim, para calcular rendimento líquido, faz-se:

$$L = J - \text{I R}$$

$$L = 1.079.961{,}03 - 188.993{,}18$$

$$L = 890.967{,}85$$

O montante líquido será dado por:

$$M = C + L$$

$$M = 2.000.000 + 890.967{,}85 = 2.890.967{,}85$$

Na calculadora HP12C:

Tabela 4:Cálculos com a HP12C do Problema 1 – parte 4

Número digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1079961,03	**ENTER**	1.079.961,03
188993,18	**-**	890.967,85
2000000	**+**	2.890.967,85

Fonte: Robel (2019)

Concluindo, o montante líquido será de R$ 2.890.967,85.

Com o uso da calculadora HP12C, faríamos:

Tabela 5: Cálculos com a HP12C do Problema 1 – parte 5

Número digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
2000000	**PV**	2.000.000,00
1,5	***I***	1,50
29	***N***	29
	FV	-3.079.961,03
	CHS	3.079.961,03
2000000	**-**	1.079.961,03
17,5	**%**	188.993,18
	-	890.967,85

Fonte: Robel (2019)

PROBLEMA 2: Imposto de Renda e proventos de aplicações financeiras

PROBLEMA 2: Uma empresa pretende adquirir um equipamento cujo valor é de R$ 200.000,00. Ela vai pagar o valor de R$ 60.000,00 à vista e financiar o saldo restante junto a uma instituição financeira que oferece uma taxa de 2,10% ao mês, para 10 meses. Calcule o valor das prestações deste financiamento.

SOLUÇÃO: Para o mercado financeiro, a ideia do cálculo das prestações em casos de financiamentos como o sugerido é a seguinte: o valor das prestações, que é o mesmo todos os meses, deve ser tal que, aplicando o desconto composto a cada uma, e calculando seus valores líquidos (também conhecidos como valores atuais ou valores presentes), a soma dos mesmos deve resultar no valor financiado.

O cálculo do valor presente é da seguinte forma:

$$PV = \frac{N}{(1+i)^n} \tag{8}$$

Onde PV significa valor presente ou líquido, N representa o valor nominal, que é o valor de uma dívida no futuro, por exemplo; n é o tempo e i é a taxa de juros praticada.

Um fato curioso e importante que diz respeito à gênese desta fórmula de cálculo do valor presente foi a publicação de Leibniz em seu artigo "*Meditatio Juridico-Mathematica de Interusurio Simplice*" (Discussões Legal e Matemática Sobre Juros Simples) na Revista *Acta Eruditorum* (LEIBNIZ, 1683).

Em seu artigo, Leibniz escreveu a fórmula do valor presente da seguinte forma:

$$a\left(\frac{v}{v+1}\right)^{z}$$

Nesta fórmula, a representa o valor nominal, z é o prazo e $1/v$ é a taxa de juros.

Ao enunciar esta fórmula, Leibniz considerou os seguintes princípios, sobre os quais ele assumia ser de comum acordo entre as pessoas: Quem paga uma quantidade de dinheiro antecipadamente pode reclamar um valor de juros por isso.

1. Pagamentos não são obrigatórios. Pode ser feita uma troca entre recebíveis e títulos a serem pagos.

2. Ambas as partes podem chegar a um acordo sobre pagamentos antecipados ou troca de títulos.

O valor do desconto composto D é a diferença entre o valor nominal N e o valor líquido PV, isto é:

$$D = N - PV \tag{9}$$

Então, se calcularmos para cada uma das prestações (PMT) o seu valor líquido e somarmos esses valores líquidos para ter o valor presente, teremos:

$$PV = \frac{PMT}{(1+i)^1} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^n} \tag{10}$$

Ao observar a expressão acima é possível notar uma regularidade nas parcelas desta adição, o que nos motiva relembrar a definição de progressão geométrica. Por definição, uma progressão geométrica é uma sequência numérica na qual a taxa de crescimento ou decrescimento de um termo para o próximo é sempre a mesma. Assim, observando esta regularidade, calcular o valor da prestação acima, implica em calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica. E a expressão acima pode ser reescrita assim:

$$PV = PMT.\left(\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right) \tag{11}$$

Observando que a progressão geométrica tem razão igual a $\frac{1}{(1+i)}$. Devemos aplicar uma fórmula de cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica, para assim obtermos a soma entre parêntesis em (11), que é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \tag{12}$$

Onde S_n é a soma dos termos da progressão geométrica, a_1 é seu primeiro termo e q é a razão. Portanto, aplicando essa fórmula, teremos:

$$q = \frac{1}{(1+i)}, \; a_1 = \frac{1}{(1+i)}.$$

Logo, substituindo estes valores na fórmula (12), temos:

$$S_n = \frac{1}{(1+i)} \times \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - \frac{1}{(1+i)}}$$

Após algumas operações algébricas, obtemos:

$$S_n = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Que é justamente o fator utilizado no mercado financeiro para operações desse tipo. Aplicando esse fator à expressão para o cálculo de PV para calcular o PMT:

$$PV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \tag{13}$$

E, para calcular a prestação, dado o valor financiado, teremos:

$$PMT = PV \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \tag{14}$$

Utilizando essa fórmula para o exercício proposto, obtemos:

$$PV = 200.000 - 60.000 = 140.000,$$

Se a taxa for representada por i , obtemos $i = 2{,}1\% = 0{,}021$ e, se o prazo for representado por n obtemos $n = 10$, ou seja, 10 meses. Dessa forma, aplicando o obtido em (14), o valor das prestações será:

$$PMT = 140.000 \times \frac{(1+0{,}021)^{10} \times 0{,}021}{(1+0{,}021)^{10}-1} = 15.667{,}37$$

Ou seja, para o financiamento mencionado, pagar-se-á dez prestações iguais e consecutivas de R$ 15.667,37.

Para utilizarmos a calculadora HP12C para a obtenção dos cálculos acima devemos seguir os seguintes passos apresentados na tabela a seguir:

Tabela 6: Cálculos com a HP12C do Problema 2

Valor digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
140000	**PV**	140.000,00
2,1	***i***	2,1
10	**n**	10
	PMT	-15.667,37

Fonte: Robel (2019)

Observamos que o valor da parcela apresentada no visor é negativo, já que é um desembolso que será realizado em determinada data. A calculadora HP12C trabalha com essa convenção, conhecida como convenção de fluxo de caixa.

Na sequência apresentamos o Problema 3 que embora trate de um tema referente ao planejamento familiar, raciocínios semelhantes são utilizados em empresas.

PROBLEMA 3: Planejamento financeiro

PROBLEMA 3: Uma situação desejável para um planejamento financeiro familiar é que reste algum valor no final do mês para que a família possa guardar, para algum evento futuro. Isso pode ser planejado! Suponhamos que uma família trace um plano de guardar mensalmente, por 12 meses, o valor de R$ 1.000,00 em um fundo que remunera esse recurso à taxa de 1,15% ao mês. Quanto a família terá na conta ao final desse período? Apresente os cálculos e na sequência exiba a solução usando as funções financeiras da calculadora HP12C.

SOLUÇÃO: Esta ideia de guardar algum recurso de forma programada e ter um rendimento sobre cada parcela depositada no fundo pode parecer simples, mas é de relevada importância para todos já que utiliza os mesmos cálculos de um plano de previdência privada. A ideia é: cada parcela depositada será capitalizada a partir da data do depósito até o momento de encerramento do plano. Assim, por exemplo, no caso do enunciado do problema, o valor de R$ 1.000,00 depositado no primeiro mês será capitalizado por 11 meses, o valor depositado no segundo mês será capitalizado por 10 meses e assim por diante.

Assim, o montante no final do prazo estabelecido será a soma dos valores futuros das parcelas depositadas, a uma determinada taxa. Tem-se, portanto, um problema que envolve a soma dos termos de uma progressão geométrica.

O valor futuro FV citado acima refere-se à capitalização composta do valor, dada por:

$$FV = C(1+i)^n$$

Em particular, para o cálculo do valor futuro de depósitos constantes e consecutivos, tem-se:

$$FV = PMT(1+i)^{n-1} + PMT(1+i)^{n-2} + \cdots + PMT(1+i)^2 + PMT(1+i) + PMT \qquad (15)$$

Onde PMT é o valor do depósito periódico.

Isolando o termo PMT na fórmula (15) acima, tem-se:

$$FV = PMT[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}] \qquad (16)$$

Dessa forma, ao observar que a expressão entre colchetes é uma progressão geométrica, o seu primeiro termo é igual a 1 e sua razão é $(1+i)$. A fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica de razão q e primeiro termo a_1 é:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Substituindo as informações conhecidas, temos:

$$S_n = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Substituindo agora, a soma dentro do colchete de (16), obtemos o cálculo do valor futuro de depósitos de parcelas iguais e consecutivas à determinada taxa por[6]:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (17)$$

Substituindo à fórmula os dados do problema 3, tem-se:

$$FV = 1000 \times \frac{(1 + 0{,}0115)^{12} - 1}{0{,}0115}$$

Ou seja,

$$FV = 12.788{,}86$$

A família obterá ao final de 12 meses o valor R$ 12.788,86.

Já em uma calculadora HP12C, os passos para resolver o problema são:

Tabela 7: Cálculos com a HP12C do Problema 3

Número digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1000	**CHS**	-1.000,00
	PMT	-1.000,00
1,15	***i***	1,15
12	**n**	12
	FV	12.788,86

Atualmente, com a reforma da previdência e a necessidade da imposição do teto para o benefício da previdência pública e até para algumas privadas, surge a necessidade para muitos brasileiros de se apropriarem de conhecimentos sobre um sistema de previdência privada. Este é um debate presente na economia brasileira. Há basicamente dois regimes de previdência. O regime atual, chamado de regime de partilha, que consiste em, após recolhidas as contribuições retidas dos trabalhadores em folha de pagamento, dos autônomos, e parte da empresa aos cofres públicos, repassar os valores para os aposentados e pensionistas.

[6] Utilizamos o sinal X para indicar a multiplicação, neste caso.

O problema desse sistema surge quando a razão entre aposentados, pensionistas e trabalhadores contribuintes começa a aumentar, ou seja, quando para cada aposentado ou pensionista tem-se menos contribuintes. É um problema demográfico que pode afetar várias situações em classes de trabalhadores, principalmente quando o governo tem interesses em arcar cada vez menos com estes custos.

Já o regime de capitalização consiste em criar uma conta para cada contribuinte e capitalizar, ou seja, aplicar o recurso no mercado financeiro, até a época da aposentadoria, quando então serão feitas retiradas deste fundo individual para bancar a aposentadoria. Grosso modo, é desta forma que os fundos de previdência complementar dos bancos privados funcionam. O problema apresentado anteriormente trata desta situação. Ele ilustra, ainda que de modo simplificado, o funcionamento do regime de previdência por capitalização.

Um outro problema que também possui relação com o anterior, porém sob uma outra perspectiva, refere-se à obtenção de proventos para um gasto futuro a longo prazo, ou seja, a obtenção de um fundo.

PROBLEMA 4: A construção de um fundo – guardar para retirar

PROBLEMA 4: Desejo formar um fundo de modo que um mês após completar 60 anos eu possa começar a fazer retiradas mensais de R$ 1.000,00 até completar 75 anos de idade, quando o fundo zerará. Por quanto tempo é necessário guardar na caderneta de poupança, que remunera o fundo à taxa de 0,50% ao mês, o valor de R$ 500,00 para isso?

SOLUÇÃO: Para encontrarmos o que se pede, temos que primeiramente calcular o valor presente do fluxo de pagamentos de R$ 1.000,00 mensais por quinze anos quando ocorre o último depósito de R$ 500,00, ou seja, quando eu completar 60 anos. Para tal, utiliza-se a seguinte fórmula já deduzida anteriormente:

$$PV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

Substituindo os valores referentes ao problema 4, temos:

$$PV = 1000 \times \frac{(1+0{,}005)^{180} - 1}{(1+0{,}005)^{180} \times 0{,}005} = 118.503{,}51$$

Ou seja, quando o último depósito de R$ 500,00 for efetuado, no 60º aniversário, o saldo do fundo deve ser de R$ 118.503,51. Resta agora, é preciso calcular por quanto tempo é necessário efetuar os depósitos de R$ 500,00 na caderneta de poupança à taxa de 0,50% ao mês para obter esse saldo. A seguinte fórmula será utilizada:

$$FV = PMT \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Então, substituindo os valores, obtemos:

$$118.503{,}51 = 500 \times \frac{(1+0{,}005)^n - 1}{0{,}005}$$

O que, após algumas operações algébricas, nos leva a:

$$2{,}1850351 = 1{,}005^n$$

Usando logaritmos, temos:

$$n = \frac{log\, 2{,}1850351}{log\, 1{,}005} \cong 157$$

Portanto, os depósitos mensais de R$ 500,00 deverão começar cerca de 157 meses, ou seja, aproximadamente 13 anos, antes de completar 60 anos para que se tenha o mencionado fundo.

Uma solução possível utilizando a calculadora financeira HP12C é apresentada a seguir:

Tabela 8: Cálculos com a HP12C do Problema 4

Número digitado	Tecla da calculadora	Valor no visor
1000	**CHS PMT**	-1.000,00
0,5	***i***	0,50
180	***n***	180,00
	PV	118.503,51

	ENTER FV	118.503,51
0	**PV**	0,00
500	**CHS PMT**	-500,00
0	***n***	0,00
	n	157,00

Considerações Finais

Nossa experiência profissional com os estudantes dos cursos de Educação Profissional Técnica de Nível Médio frente aos diversos testemunhos que ouvimos ao longo do tempo, mostra a importância desta oportunidade de formação para a população que busca de uma qualificação para o trabalho ora já exercido ou, para aqueles que desejam algum direcionamento para a vida quer seja pessoal ou no trabalho.

Ressaltamos a importância de utilizarmos problemas como os apresentados no texto, circunstanciados em situações reais que cada profissional possa enfrentar ao lidar com as suas atividades no trabalho ou na vida. E ainda, a possibilidade de aprender a manusear instrumentos que facilitarão sua atividade no trabalho ao lidar com problemas análogos no seu trabalho. Referimo-nos ao uso de calculadoras, na dissertação a que se refere este texto apresentamos, que conforme dissemos anteriormente neste texto, o tratamento com planilhas, não coube aqui devido ao espaço determinado ao texto. Enfim, este capítulo vem demonstrar como é possível abordar a matemática necessária para a formação do futuro Técnico em Administração dos cursos técnicos que as escolas do Paraná, em particular, oferecem para jovens e adultos.

Aqui são apresentados problemas que pertencem a um curso específico, porém, em nosso trabalho de dissertação para outros cursos, uma coletânea de 35 problemas é apresentada, todos relacionados à vivência de cada curso técnico mencionado.

Salientamos que este trabalho se tornou possível a partir do aprimoramento, em nossa formação, que obtivemos mediante nossa participação no PROFMAT/UEL. As disciplinas foram capazes de nos dar a sustentação teórica de diversos conteúdos de Matemática, além de oportunizar a elaboração deste trabalho. Sem dúvida, a contribuição que esta oportunidade de formação ofereceu a minha pessoa foi de grande valia para o exercício da minha prática profissional.

Agora, com a oportunidade de apresentarmos a redação deste capítulo, ainda que em um pequeno recorte do empreendido, esperamos contribuir com a Educação Profissional Técnica de Nível Médio, com mais uma fonte de problemas propostos para os cursos desta modalidade de ensino, no Estado do Paraná e no Brasil.

Referências

BASSANEZI, Rodney C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. *Resolução nº 6 de 20 de setembro de 2012. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médi***o.** Brasília: Diário Oficial da União. 2012.

BRASIL. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Plano Nacional de Educação PNE 2014-2024: Linha de Base*. Brasília: Inep, 2015.

COLÉGIO ESTADUAL VICENTE RIJO. Projeto Político Pedagógico. Londrina. 2018.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Meditatio Juridico-Mathematica de Interusurio Simplice.* Lipsiae: Acta Eruditorum, p. 425-432, 1683. Disponível em https://archive.org. Acesso em 20 de junho de 2023.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa, et al. *Resolução de Problemas: Teoria e Prática***.** São Paulo: Paco Editorial. 2014.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes da Educação Profissional.* Curitiba: 2006.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. *Catálogo Estadual de Cursos Técnicos.* Curitiba: 2013.

ROBEL, Paulo Henrique. *Uma abordagem para a matemática em cursos da educação profissional técnica de nível médio a partir de contextos da prática profissional*. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual de Londrina.

Temas e problemas contemporâneos transversais: uma proposta para o ensino de Matemática

Gabriel Felipe Facin[1]
Regina Célia Guapo Pasquini[2]

O sistema educacional brasileiro passou por diversas mudanças entre os séculos XX e XXI. Esse contexto de redefinição e reconstrução das diretrizes que norteiam a educação no Brasil, principalmente no que diz respeito à formação cidadã dos discentes, revela o quanto é indispensável um estudo sobre a utilização de temas que se façam presentes na vida cotidiana do educando.

Nesse sentido, a abordagem de temas que transpusessem os limites dos conteúdos estudados em sala de aula tem sido levantada pelas várias configurações nos documentos oficiais que regem o sistema educacional brasileiro.

Historicamente, durante a restruturação das orientações pedagógicas da Educação Brasileira, os Temas Transversais haviam sido propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1996 (BRASIL, 2019). Neste documento, os temas eram elencados em seis grandes grupos, orientados pelos conceitos de Ética e Cidadania. São eles:

I-Saúde;

II-Ética;

III-Orientação Sexual;

[1] Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina – UEL. Professor da Rede Particular de Ensino do Estado do Paraná em Londrina, Paraná. Contato: gabrielf.facin@hotmail.com

[2] Doutora e Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP/ *Campus* Rio Claro. Professora Associada na Universidade Estadual de Londrina – UEL. Contato: rcgpasq@uel.br

IV-Pluralidade Cultural;

V-Meio Ambiente;

VI-Trabalho e Consumo.

Com o tempo, este impulso da transversalidade na educação ganhou força documental, essencialmente a partir de uma determinação do Conselho Nacional de Educação (CNE). Em 2010, a instituição aprovou, por meio da Resolução nº 4, do dia 13 de julho, as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais (DCN) para a Educação Básica, que referenciam tais temas a serem abordados nas disciplinas, por determinação legal, como viabilidade de organização da parte diversificada do currículo.

Entre dezembro de 2017 e dezembro de 2018 houve a homologação de Temas Transversais para a Educação Infantil e para os Ensinos Fundamental e Médio. Entretanto, esta abordagem foi ampliada e consolidada nos novos currículos sob um novo título, como Temas Contemporâneos Transversais (TCT) (BRASIL, 2019).

Neste sentido, segundo a definição da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), essa vertente de ensino tem como objetivo explicitar as conexões entre os diversos componentes curriculares, de forma a integrá-los e, sobretudo, trazer a vivência do estudante para junto dos estudos propostos, contextualizando sua realidade (BRASIL, 2019). A partir desta ótica, as propostas de educação fragmentada e abstrata perdem o sentido e dão espaço a uma abordagem pedagógica integrada.

Tendo em vista a importância desse trabalho para a educação, uma outra transformação ocorreu com a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC); nela, os temas passaram a ser denominados como Temas Contemporâneos Transversais (TCT).

Numa definição literal, a palavra transversalidade possui significado[3] de “[...] característica ou estado de transversal, do que se apresenta de modo oblíquo (inclinado), quando comparado a um referente”. Enquanto isso, no âmbito educacional, a BNCC define o termo como:

---

[3] Fonte: https://www.dicio.com.br/.

> A **transversalidade** diz respeito à possibilidade de se estabelecer, na prática educativa, uma relação entre aprender conhecimentos teoricamente sistematizados (aprender sobre a realidade) e as questões da vida real e de sua transformação (aprender na realidade e da realidade) (BRASIL, 1998, p. 30).

Uma vez incrementados às diretrizes educacionais brasileiras, para sua organização e disposição, os TCT foram devidamente definidos e alocados em grupos, cujo próprio documento os denominou como seis macroáreas, a saber: 1. Meio Ambiente; 2. Economia; 3. Saúde; 4. Cidadania e Civismo; 5. Multiculturalismo; 6. Ciência e Tecnologia. Presentes em cada uma dessas macroáreas, o objetivo destes temas é garantir ao aluno o entendimento dos conhecimentos sistematizados de cada componente curricular, ao mesmo tempo em que compreende situações reais. Em outras palavras, o aluno aprende na realidade e da realidade (BRASIL, 2019).

A partir dos estudos direcionados aos TCT, notou-se como se pode realizar um trabalho com tais temas para a promoção e a prática da cidadania quando inseridos no ambiente escolar, além das diversas possibilidades que a sua implementação na Educação é capaz de gerar. Então, motivado pelo desafio de abranger as contribuições ressaltadas acima, este estudo se debruçou para lançar uma proposta que trouxesse a aplicação de tais temas para a disciplina de Matemática durante a Educação Básica. Desse modo, este artigo consiste na elaboração de tarefas[4], nas quais sempre haverá um problema matemático a ser solucionado, ao mesmo tempo em que o aluno é levado a pensar sobre algum TCT.

---

[4] Este texto apresenta um recorte do trabalho da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa PROFMAT/UEL, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, defendido no ano de 2021.

1. Os Temas Contemporâneos Transversais e suas Respectivas Macroáreas

A BNCC define os TCT em seis macroáreas, englobando um total de 15 temáticas contemporâneas ligadas diretamente à vida humana em escala local, regional e global. Estas macroáreas, são apresentadas a seguir, acompanhadas de seus respectivos temas:

I-Meio Ambiente: Educação Ambiental, Educação para o Consumo;

II-Economia: Trabalho, Educação Financeira, Educação Fiscal;

III-Saúde: Saúde, Educação Alimentar e Nutricional;

IV-Cidadania e Civismo: Vida Familiar e Social, Educação para o Trânsito, Educação em Direitos Humanos, Direitos da Criança e do Adolescente, Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso;

V-Multiculturalismo: Diversidade Cultural, Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras;

VI-Ciência e Tecnologia: Ciência e Tecnologia.

Certamente, tratar destes temas pode envolver determinada complexidade, pois, além de sua compreensão para tal fim, a sua implementação está relacionada intrinsecamente aos conhecimentos das disciplinas para que haja a desejada transversalidade.

> Contudo, com as mudanças propostas, surgem dúvidas quanto à implementação dos TCTs e questionamentos sobre como fazer a articulação dos temas com os demais conteúdos; como trabalhar os temas de forma contextualizada e dentro das áreas do conhecimento e como mostrar a relevância desses conteúdos para a formação do cidadão (BRASIL, 2019).

Uma vez apresentados, vale destacar que o objetivo dos TCT é garantir ao aluno o entendimento de situações reais, juntamente com o conhecimento das competências e habilidades propostas pela BNCC. Como exemplos de tais situações, em síntese, pode-se citar: em relação à educação financeira e fiscal, sobre como utilizar de maneira responsável seu próprio dinheiro, ou de saber quantificar a quantidade de impostos paga em produtos utilizados em seu cotidiano; Ciência e Tecnologia, como entender a importância das novas tecnologias digitais, suas vantagens e desvantagens, antes e durante sua utilização; Meio Ambiente, como cuidar do planeta em que se vive, sobretudo no que diz respeito ao consumo consciente para redução da degradação ambiental; Saúde, como pensar em saúde; O Multiculturalismo, sobre como entender e respeitar as diferenças entre as pessoas, religiões, costumes e culturas; Cidadania e Civismo, entendendo quais são seus direitos e deveres como cidadãos.

Este capítulo, em especial, abordará dois temas: Educação para o Consumo, que será estudado em parceria ao tema Educação Ambiental, ambos alocados na macroárea Meio Ambiente; e o tema Educação para o Trânsito, alocado na macorárea Cidadania e Civismo. Esta abordagem está amparada em aportes teóricos que utilizamos para nosso estudo em consonância com os objetivos deste texto.

2. TCT: Meio Ambiente – Educação Ambiental e Educação para o Consumo

Ao longo dos anos, as interações humanas com a natureza se diversificaram. Desde os primórdios das relações de subsistência presentes na formação das primeiras sociedades, até o modo de produção capitalista contemporâneo, evidentemente que muita coisa mudou. O ser humano passou gradativamente da coexistência à exploração (NOGUEIRA; GONZALEZ, 2014).

Durante os últimos dois séculos, houve um crescimento vertiginoso das sociedades humanas, alavancado pela melhor qualidade de vida das populações, disposição de alimentos e desenvolvimento tecnológico. A partir dessa ascensão, a necessidade de fornecer alimentação, moradia, saúde e educação às populações também esteve atrelada a sistemas econômicos baseados no consumismo. Em consequência disso, os recursos naturais sofreram e sofrem um declínio crescente para atender as demandas emergentes.

Os padrões de consumo, que geram tamanha pressão sobre estes bens escassos, têm gerado diversos transtornos ao desenvolvimento sustentável. Ao mesmo passo, este cenário requer novas formas de se viver, de se pensar e, sobretudo, de avaliar o que e como se consome.

A partir da segunda metade do século XX, o reconhecimento, caracterização e construção feitos por diferentes camadas sociais da eminente *crise ambiental*, ocasionada pelo modo de vida contemporâneo, geraram diversas tentativas de compreensão de suas principais vertentes. Desse modo, os esforços para mapear, rastrear e analisar focos de destruição ambiental aumentaram, além disso, aumentaram também as tentativas da formulação de modelos que possam explicar as origens dos atuais padrões de interação das sociedades com o meio natural (CARVALHO, 2006).

Ademais, esta procura por modelos de ação e definição de providências a serem tomadas por parte da sociedade, em busca de amenizar, corrigir e transformar situações de impacto ambiental, ou pela busca da reversão significativa das relações do ser humano com a natureza, tem mostrado várias vias de propostas de ação, ainda conforme o autor.

Nos últimos anos, porém, Carvalho (2006) pontua que há uma tendência em assumir o processo educativo como um importante vetor para gerar mudanças e alterar os cenários de degradação e destruição do meio ambiente. Em outras palavras, é a partir da educação que o processo de conscientização ambiental será amplificado e qualificado, sendo capaz de gerar cidadão conscientes e responsáveis com a natureza.

Posto isso, o TCT referente ao Meio Ambiente, assume no espaço escolar um papel decisivo para a convergência das ações humanas em direção à proteção ambiental e à reavaliação dos padrões de consumo. Essa macroárea fica dividida em: Educação

Ambiental e Educação para o Consumo. Neste cenário, segundo a Lei Federal nº 9.795, a Educação Ambiental fica definida como:

> [...] o processo por meio dos quais o indivíduo e a coletividade constroem valores sociais, conhecimentos, habilidades, atitudes e competências voltadas para a conservação do meio ambiente, bem de uso comum do povo, essencial à sadia qualidade de vida e sua sustentabilidade (art.1º, Lei Federal nº 9.795, de 27/4/99).

Inserida no ambiente escolar, a educação ambiental, aliada à educação para o consumo, tem o objetivo de sensibilizar essa comunidade. Nesse sentido, é necessário que elas sejam incentivadoras para que os alunos aprendam que deve existir harmonia com as demais espécies que habitam o planeta. Ademais, é imprescindível que seu desenvolvimento esteja em concomitância com as matrizes curriculares e possa fazer com que os alunos pensem de forma crítica sobre os princípios da destruição inconsequente da natureza (EFFTING, 2007).

Dentro deste contexto, a educação constitui-se como uma importante ferramenta de instrução e orientação para que as novas gerações pratiquem ações que caminhem em direção ao desenvolvimento sustentável, as quais: destinação correta de resíduos sólidos, a fim de que sejam reciclados e retornem à cadeia produtiva; otimização do uso da água em seu cotidiano; conscientização política para que escolham representantes que se alinhem a projetos de defesa dos patrimônios ambientais, além de muitas outras posturas que ajam nessa direção. Claramente, como destacado acima, este é um processo que requer o envolvimento das diversas disciplinas envolvidas no processo educacional.

Essas diretrizes geram uma motivação para se pensar em formas de como o ensino da matemática pode contribuir para a educação ambiental e para o consumo. Um passo importante para a interseção com esse TCT constitui-se em trazer para a sala de aula problemas que internalizem a temática de educação para o consumo, de forma que os alunos encontrem soluções sob esse ponto de vista, ao mesmo passo em que construam, utilizam e aplicam seus conhecimentos matemáticos.

Atentando-se à importância da transversalidade acima proposta, o ensino de matemática terá um papel determinante ao trazer problemas que podem se referir a diversas situações, como o consumo consciente de água, principalmente quando se é possível mensurar o seu desperdício e simular situações para que a água em desuso possa abastecer domicílios sem acesso, ou ainda suprir a falta humana desse bem.

2.1. Educação para o Consumo: A Tarefa

Considerações Iniciais – Tarefa 2.1

Segundo a Companhia de Saneamento do Paraná (SANEPAR), sabe-se que uma torneira mal fechada, gotejando, desperdiça uma quantidade significativa de água potável de cerca de 60 litros ao dia[5]. Devido à escassez da água, é preciso atenção redobrada para que o desperdício seja minimizado.

Suponha que você seja um fiscal da empresa de saneamento básico de seu município e deseja calcular o desperdício de água potável semanal do bairro Laranjeiras usando caixas d'água residenciais com formato cilíndrico de altura 76 cm e raio da base medindo 65 cm.

Além disso, você dispõe das seguintes informações:

- O bairro Laranjeiras possui 500 casas;

- A cada 2 casas que o bairro possui, existem em média, 2 torneiras com gotejamento. A imagem a seguir ilustra essa situação:

a) Quantas casas seriam abastecidas, com uma caixa d'água no formato descrito, com esse desperdício semanal de água? (Utilize $\pi = 3{,}14$).

[5] Disponível em: https://site.sanepar.com.br/informacoes/economia. Acesso em: 28 abr.2021.

b) Segundo autoridades em saúde, um ser humano adulto deve consumir 35 mililitros diários de água para cada quilograma de seu corpo. Dessa forma, encontre o número de pessoas com massa de 70Kg que poderiam beber, semanalmente, o volume de água desperdiçada pelo bairro Laranjeiras (calculado no item anterior).

Resolução

a) Sabe-se que cada torneira gotejando gasta cerca de $60l$ de água diariamente. Como, das 500 casas do bairro, a cada duas delas há duas torneiras gotejando, então há 500 torneiras gotejando ao total. O gasto semanal de água das 500 torneiras gotejando é dado a partir de:

$$500\,.\,60\,.\,7 = 210000l$$

Se $1000\,l$ correspondem a $1\,m^3$, então, $210000\,l$ correspondem a $210\,m^3$.

Como a caixa d'água possui o formato de um cilindro, é necessário obter o volume deste cilindro. Este volume, por sua vez, é dado pelo produto da área da base circular pela altura h deste sólido, como segue:

$$V = \pi\,.\,r^2.\,h$$

Dessa forma, com a altura de 76cm, o que equivale a $0{,}76\,m$ e o raio da base de 65 cm, o que equivale a $0{,}65\,m$, tem-se:

$$V = \pi\,.\,(0{,}65)^2.\,(0{,}76)$$
$$V = (3{,}14)\,.\,(0{,}4225).\,(0{,}76)$$
$$V \cong 1\,m^3$$

Nos cálculos seguintes, este volume será considerado como $1\,m^3$. Portanto, se o volume de cada caixa d'água é de $1\,m^3$ e o volume de água desperdiçada é de $210\,m^3$, então é possível abastecer 210 casas com esses mesmos reservatórios.

b) Se cada indivíduo adulto deve consumir $35\,mililitros$ $(0{,}035\ litros)$ diários de água para cada quilograma de seu corpo, então uma pessoa com $70kg$ deve consumir:

$$70\,.\,(0{,}035) = 2{,}45\ litros$$

Como o bairro Laranjeiras desperdiça 210000 $litros$ de água semanalmente, então o número inteiro, N, de pessoas, com a massa descrita, que pode se utilizar desde volume de água semanalmente é dado pela razão:

$$N = \frac{210000}{2{,}45\,.\,7}$$
$$N = 12244$$

Portanto, 12244 pessoas, com massa de 70 kg, poderiam beber, semanalmente, os 210000 $litros$ de água desperdiçados pelo bairro Laranjeiras.

Considerações Finais – Tarefa 2.1

Convém salientar que os nomes e situações apresentados nesta tarefa são fictícios. Porém, se o professor dispõe de dados ou informações que possam contemplar a própria cidade ou bairro, o problema envolvido poderá despertar maior curiosidade e interesse do aluno, uma vez que ele se dedicará a uma situação da sua realidade com maior visibilidade. É importante tomar consciência dos dados obtidos enfatizando a necessidade que temos deste bem tão importante e necessário para nossa sobrevivência.

Pós solução, vale salientar a importância de conscientizar as pessoas da necessidade de se realizar um conserto nas torneiras que apresentam vazamento. Além disso, poderia ser estudada a vazão de cada torneira, com a possível instalação de um redutor no registro de entrada. Estes estudos podem ser desenvolvidos conjuntamente a outras disciplinas, tais como a de Ciências.

3. TCT: Cidadania e Civismo – Educação para o Trânsito

Entende-se que o conceito de cidadania é um dos pilares fundamentais do Estado democrático de direito, mas qual o verdadeiro significado da palavra cidadania? De acordo com o portal da Secretaria da Justiça, Família e Trabalho do Estado do Paraná (2021), cidadania "[...] vem do latim *civitas* que quer dizer cidade".

Na Grécia Antiga, a definição era destinada somente a caracterizar os indivíduos nascidos em território grego. Porém, em Roma, a palavra estendia-se a algo mais, a exercer a cidadania, que também tinha a ver com a situação política de cada morador, bem como seus direitos e deveres.

Numa definição mais atualizada, Oliveira (2019) conceitua cidadania a partir das posturas de cada indivíduo perante a sociedade, bem como o exercício de suas responsabilidades com relação ao outro.

Carvalho (1996), por sua vez, define cidadania a partir de quatro tipos. O primeiro deles diz respeito àquela que é alcançada de baixo, a partir dos indivíduos, para cima, em relação ao Estado, dentro do espaço público, mediada por uma ação revolucionária e da mudança de Estado para nação. O segundo tipo também versa sobre a conquista da cidadania de baixo para cima, mas, neste caso, dentro do espaço privado. O terceiro, refere-se ao tipo de cidadania advinda da universalização de direitos individuais, entretanto, trata-se o cidadão como súdito. O último deles denota a cidadania que é arquitetada de cima para baixo, numa concepção de lealdade do indivíduo para com o Estado.

Para complementar as definições supracitadas, Dagnino (2004), em uma análise crítica do conceito de cidadania no pós neoberalismo, propõe uma outra designação, a *nova cidadania*. Esse conceito advém dos movimentos sociais e possui, de acordo com a autora, quatro elementos fundamentais formadores de um projeto de reestruturação moral e intelectual e de formação de cidadãos ativos.

Primeiramente, o conceito tangencia a ideia de direito a ter direitos, ampliando essa garantia e incluindo outros direitos para as mais diversas pautas. Em suas palavras

> O direito à autonomia sobre o próprio corpo, o direito à proteção do meio ambiente, o direito à moradia, são exemplos (intencionalmente

> muito diferentes) dessa criação de direitos novos. Além disso, essa redefinição inclui não somente o direito à igualdade, como também o direito à diferença, que especifica, aprofunda e amplia o direito à igualdade (DAGNINO, 2004, p.104).

Em segundo lugar, na contramão dos direitos definidos e pensados pelo sistema vigente, trata-se aqui de uma cidadania na qual os excluídos passem a ser sujeitos ativos e consigam definir o que avaliam como seus direitos, lutando por eles. É uma estratégia de construção da cidadania desde baixo, semelhante a uma das definições de tipo elencadas por Carvalho (1996).

O terceiro ponto sobre a nova concepção trazida pela autora diz respeito ao fato de que, muito além de acesso, inclusão, participação e pertencimento ao sistema político, defende-se o direito de participar da sua própria construção. Aponta-se, neste contexto, para uma reestruturação das relações de poder.

Finalmente, outro elemento trazido por Dagnino (2006), no que tange a essa definição expandida de cidadania, reside no fato de que é preciso que haja não somente uma relação estrita entre indivíduo e Estado para a execução dos elementos anteriormente citados, mas também é necessário que haja transformações no interior da própria sociedade.

Em parceria com os conceitos definidos, a palavra Civismo, por sua vez, refere-se ao que é público e à responsabilidade com os direitos e deveres definidos em cada sociedade[6]. Analiticamente, o exercício do civismo é também a prática da cidadania, uma vez que a responsabilidade com o público inclui o respeito para com os demais cidadãos.

Inserido nessa macroárea, apresenta-se o tema Educação para o Trânsito. Definido pela Lei No. 9503/1997[7] (que Institui o Código de Trânsito Brasileiro (CTB) e todo o aparato institucional a seu

[6] A partir da definição encontrada em: https://dicionario.priberam.org/civismo

[7] BRASIL. Lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997. Institui o Código de Trânsito Brasileiro. Diário Oficial da União, Brasília, 24 de setembro de 1997. Disponível em: Acesso em: 09 nov. 2021.

respeito), esse tema deve ser inserido nas matrizes curriculares em toda a Educação Básica, com respaldo do Governo Federal. Seu principal objetivo é instruir a população sobre esse Código – CTB, e garantir que as leis de trânsito no país sejam cumpridas pelos condutores de veículo automotor (MELO; SOUZA, 2021).

Entretanto, os autores revelam que há uma inobservância da política pedagógica com relação à Educação para o Trânsito, aliada a uma alta taxa de mortes de crianças e adolescentes no setor e ao elevado número de infrações às leis viárias. No mês setembro, entre os dias 18 e 25 é comemorada anualmente, a Semana Nacional do Trânsito em todo o país, cujo objetivo é conscientizar todos os envolvidos no dia a dia do trânsito, motoristas, passageiros e pedestres. Esta determinação está presente no Artigo 326 do CTB.

Em nível escolar, pode-se dizer que esta semana é assinalada, porém, os autores comentam que este trabalho é insuficiente e não garante a reversão dos problemas supracitados, basta que se analise os índices sobre mortalidade no trânsito. Em 2020, por exemplo, 30.168 pessoas perderam a vida em decorrência do trânsito brasileiro[8], a título de comparação, quase o número total de habitantes da cidade doa autor deste trabalho – Bariri, SP. É como se, por ano, uma cidade, como a de Bariri, fosse extinta do mapa.

Assim como destacam Melo e Souza (2021), não se objetiva a criação de uma disciplina específica para esse TCT, no entanto, orienta-se que seu ensino seja transversal e eficaz, de modo que em todos os anos do ensino básico os alunos possam adquirir conhecimentos sobre o CTB e para que possam pensar e adotar práticas no trânsito que exercitem sua cidadania de modo progressivo.

Na direção do trabalho transversal destinado à Educação para o Trânsito que este texto se propõe, juntamente aos demais componentes curriculares, a matemática tem papel elementar. Pensando nisso, a proposta desse capítulo trará uma tarefa, na qual haverá um problema matemático envolvendo uma prática

[8] https://www.portaldotransito.com.br/ Acesso em: 17 nov. 2021.

inteligente para uma estrutura viária urbana. O aluno será incentivado a avaliar como a substituição da quantidade excessiva de automóveis dos tipos carro e motocicleta por transportes coletivos, no caso, o ônibus, é capaz de aliviar, em certa medida, a situação caótica do trânsito nos grandes centros urbanos.

Cabe destacar que esta prática é também eficaz para a redução de gases poluentes agravadores do efeito estufa, o que demonstra uma interdisciplinaridade entre os próprios temas transversais contidos em uma tarefa elaborada para uma aula de matemática. Destaca-se ainda, o mérito de como essa substituição pode, também, abrandar o número de acidentes e mortes causadas pelo excesso de veículos automotores do tipo carro e motocicleta nas vias mais movimentadas. E que, evidentemente, contribuirá para a fluidez do trânsito.

3.1 Educação para o Trânsito: A Tarefa

Considerações Iniciais – Tarefa 3.1

Mobilidade urbana é um tema de grande complexidade, mas também de muita importância para a tomada de decisões políticas nas sociedades contemporâneas. Ao se observar este tema e suas transformações no Brasil durante as últimas décadas, principalmente em grandes cidades, evidenciam-se as externalidades negativas desse processo, em especial no que diz respeito ao aumento da motorização individual.

Inicialmente, a partir da década de 1990, o Governo Federal e os estados passaram a incentivar a produção nacional de automóveis, barateando o seu preço de venda. Essa política fez com que um número maior de trabalhadores tivesse acesso a esse bem durável com o passar dos anos.

O processo progrediu e, já na segunda década do século XXI, os índices de mobilidade urbana a partir de veículos próprios tornaram-se altos. Em consequência, do ponto de vista da comodidade individual, possuir um veículo automotor tem satisfeito uma alta demanda dos trabalhadores brasileiros. Por outro lado, no que diz respeito à organização do trânsito nas grandes cidades e de como sua situação afeta a qualidade de vida urbana, principalmente no quesito poluição, o aumento da motorização individual representa uma externalidade negativa.

Pensando sobre essa situação, uma saída eficaz para aliviar as condições de mobilidade urbana pode ser representada pelo investimento em transportes coletivos de qualidade para a população. Nessa ótica, além das melhorias na logística do trânsito nos grandes centros urbanos, as taxas de emissões de poluentes, como dióxido de carbono, diminuiriam.

Segundo Moacir Pereira Morais, diretor da Transportes Coletivos Grande Londrina (TCGL), empresa que trabalha no fornecimento do transporte coletivo na cidade de Londrina- PR, cada ônibus urbano padrão é capaz de transportar cerca de 100 passageiros de uma vez em sua lotação máxima (esses dados se referem aos automóveis utilizados por esta empresa, mas podem variar entre empresas e até mesmo entre cidades)[9]. Esse número de passageiros transportados em um único veículo seria capaz de substituir cerca de 50 automóveis, entre carros e motocicletas, admitindo que cada um deles circule com uma média de 2 passageiros por viagem. A imagem apresentada a seguir exemplifica a situação apresentada.

[9] Disponível em: www.cml.pr.gov.br/cml/site/noticiadetalha.xhtml?origem=0 &idnoticia=2548. Acesso em: 26 out. 2021.

Figura 3: Ônibus X carros

Fonte: Rio Ônibus, 2020[10].

A partir do texto e da imagem apresentados, reflita e responda aos seguintes questionamentos:

a) Você é usuário do transporte coletivo em sua cidade?

Se sim, descreva as vantagens e as desvantagens desse meio de transporte urbano em sua cidade. Se não, por quais motivos você opta por outros meios de transporte urbano? Quais seriam as condições de transporte coletivo que fariam com que sua decisão em não o usar fosse alterada?

b) Leia com atenção o seguinte problema e responda-o:

Em uma avenida famosa de uma grande cidade, no período mais movimentado do dia, circulam 2400 veículos por hora, dos quais 10% são ônibus, e o restante representado por carros e motocicletas.

---

[10] Disponível em: https://www.facebook.com/rioonibus/photos/1-%C3%B4nibus-transporta-a-mesma-quantidade-de-pessoas-48-que-40-carros-de-passeio-e-/1775326982603576/. Acesso em: 10 nov. 2021.

Considere que os ônibus desta cidade circulem com todos os lugares ocupados e que sejam de mesmo tamanho e capacidade máxima de passageiros que aqueles apresentados pelo texto acima e, além disso, que em cada carro e motocicleta haja a mesma média de passageiros informada.

Desse modo, num período de três horas e meia, quantos ônibus poderiam ter sido utilizados para substituir 60% da frota de veículos, carros e motocicletas, que circulou por essa avenida?

Resolução

a) Este item pode ser respondido individualmente, mas é importante que os alunos apresentem suas ideias de forma oral, para que haja uma construção de diálogo sobre meios de transporte coletivo durante a aula.

b) A cada hora, passam 2400 veículos pela avenida, dos quais 10% são ônibus. Isso denota que:

$$\frac{10}{100}\,.\,2400 = 240$$
$$2400 - 240 = 2160$$

Assim, a cada hora, passam 240 ônibus e 2160 carros e motocicletas pela avenida.

Em três horas e meia, esse fluxo será de:

$$3{,}5\,.\,240 = 840$$
$$3{,}5\,.\,2160 = 7560$$

Ou seja, 840 ônibus e 7560 carros e motocicletas.

Se se deseja substituir 60 % dessa frota de carros e motocicletas por ônibus, então:

$$\frac{60}{100}\,.\,7650 = 4536$$

Além disso, sabe-se que esses 4536 carros e motocicletas levam, cada um, 2 passageiros. Desse modo, o total de passageiros será de:

$$4536\,.\,2 = 9072$$

Como cada ônibus tem lotação máxima de 100 passageiros, para encontrar o número de ônibus utilizados:

$$\frac{9072}{100} = \frac{9000}{100} + \frac{72}{100} = 90 + \frac{72}{100} \cong 91$$

Finalmente, a partir dos cálculos realizados, pode-se dizer que os 4536 carros e motocicletas poderiam ser substituídos por 91 ônibus.

Considerações Finais – Tarefa 3.1

Essa tarefa poderá ser aplicada para turmas de sétimo ano, quando forem trabalhadas as situações problema envolvendo o cálculo percentual. É muito importante que o conceito seja entendido a partir desse tema transversal, de modo que, além de compreender o cálculo envolvendo porcentagens, o aluno também consiga avaliar de forma mais crítica o contexto da mobilidade urbana e o efeito positivo que a substituição de transportes individuais pelo transporte coletivo de qualidade é capaz de gerar.

A tarefa abre um leque de possibilidades para outras considerações e até mesmso, outros problemas, que podem ser trabalhados em conjunto com Ciências, já que trânsito excessivo de veículos implica em maior número de acidentes, vítimas fatais etc. Além disso, como dito acima, maior emissão de gases poluentes no meio ambiente. Essas possibilidades diversas de abordagem são típicas dos TCT. Dificilmente um tema se encerra em si mesmo.

4. Conclusão

Quando nos propomos a analisar sobre como as demandas sociais, políticas, econômicas, ambientais e técnicas recorrentes nos últimos anos estão entrelaçadas no cotidiano dos alunos, e também em sua formação como cidadãos, é fato que a gama de possibilidades para levarmos situações problema para a sala de aula, aumenta circunstancialmente. Conforme anunciado no início deste artigo, estes problemas provêm de uma proposta para o ensino de matemática que estivesse unida aos TCT, e a fim de que cumpríssemos nossos estudos de Mestrado.

Em outras palavras, este estudo teve como objetivo principal a promoção da cidadania por meio do ensino de Matemática, tendo como balizadores os TCT e suas aplicações junto às habilidades desenvolvidas por essa disciplina. Designadamente, o objetivo específico deste trabalho concentrou-se em apresentar à sociedade uma aplicação das transversalidades destacadas em problemas matemáticos, pontuando a capacidade deste componente curricular em contribuir para a formação cidadã e crítica dos discentes.

A elaboração das tarefas propostas, por sua vez, teve o devido esmero empenhado para que seus problemas tangenciassem situações reais, muitas delas vivenciadas ou conhecidas pelos alunos em seu dia a dia, mas possivelmente, pouco exploradas em uma aula de matemática. Além disso, os problemas também foram confeccionados com o objetivo de motivar o aluno para que ele tivesse um olhar mais crítico com relação a tais contextos e não apenas uma mera observação de algumas informações apresentadas nos textos referentes a cada problema. Um exemplo disso foi a tarefa anunciada que versou sobre o desperdício de água, a qual apresenta para o estudante a ideia, e faz com que ele mesmo calcule quantas pessoas poderiam ter acesso ao volume desse bem que é descartado desnecessariamente, frente a este desperdício.

Sabe-se que trazer temas transversais para a sala de aula pode exigir esforço e estudos que vão muito além do próprio conteúdo matemático que se ensina, além de outros desafios, como tempo em sala de aula para o desenvolvimento do TCT e a aplicação da proposta para os discentes. Porém, é preciso pensar que a "aplicação" de tais temas não vem somente com o objetivo de mostrar em que situações podemos aplicá-los em conjunto com os conhecimentos matemáticos, mas também vem a possibilidade de exercer a cidadania dentro e fora do espaço escolar.

Desse modo, espera-se que este estudo contribua para a promoção da cidadania por meio da educação e do ensino de Matemática, tendo como balizadores os TCT, uma vez que este é o maior intuito do trabalho realizado. Ademais, é desejo que, com a publicação deste recorte do trabalho neste livro, as ideias aqui envolvidas possam ser disseminadas para um maior número de profissionais da educação.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 20 de junho de 2023.

______. Ministério da Educação. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**. Brasília, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf> Acesso em: 20 de junho de 2023.

CARDOSO, L. M. A temática ambiental e o processo educativo: dimensões e abordagens. In: CINQUETTI, H.C.S.; LOGAREZZI, A. (Orgs.). Consumo e resíduo: fundamentos para o trabalho educativo. São Carlos, SP: EDUFScar, 2006, p. 19-41.

CARVALHO, J. M. Cidadania: tipos e percursos. **Estudos Históricos**. Rio de Janeiro, RJ, n. 18, p. 01-21, 1996. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/163397/mod_resource/content/1/Cidadania%20-%20Tipos%20e%20Percursos.pdf>. Acesso em: 20 de junho de 2023.

DAGNINO, E. Sociedade civil, participação e cidadania: de que estamos falando?. In: Políticas de Ciudadanía y sociedade civil. Caracas: FACES, Universidad Central de Venezuela, 2004. p. 95-110. Disponível em: <http://biblioteca.clacso.edu.ar/Venezuela/faces-ucv/20120723055520/Dagnino.pdf>. Acesso em: 20 de junho de 2023.

EFFTING, T. R. **Educação Ambiental nas escolas públicas: realidade e desafios**. Monografia (Curso de Especialização: Planejamento para o desenvolvimento sustentável) Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Marechal Cândido Rondon. p. 90. 2007.

FACIN, Gabriel Felipe. **O ensino de matemática e o exercício da cidadania:** possibilidades para o ensino via Temas Contemporâneos Transversais. 129f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

MELO, J. P. B. de; SOUZA, P. R. P. de. A educação para o trânsito no Brasil. **Brazilian Journal of Development**. Curitiba, PR, v. 7, n. 7, p. 66094-66105, jul. 2021. Disponível em: <10.34117/bjvd7n7-063>. Acesso em: 20 de junho de 2023.

NOGUEIRA, E.L.K., GONZALEZ, C.E.F. Investigando a ocorrência de ações em educação ambiental em três escolas na cidade de Curitiba-PR**. Revista do Mestrado em Educação Ambiental**. E – ISSN 1517-1256, v. especial, maio, 2014. Disponível em: <https://periodicos.furg.br/remea/article/view/4430>. Acesso em: 20 de junho de 2023.

OLIVEIRA, D.F.S. Educação para a cidadania: um desafio da escola actual. In: Congresso Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Coimbra, n. VIII, Coimbra, Portugal, 2019. Disponível em: <https://www.educacion.udc.es/grupos/gipdae/documentos/congreso/viiicongreso/pdfs/185.pdf>. Acesso em: 20 de junho de 2023.

Uma trajetória de ensino e aprendizagem para o estudo de Números Inteiros

Francelise Ide Alves Ferreira[1]
Magna Natalia Marin Pires[2]

Introdução

Este capítulo apresenta um estudo qualitativo na qual uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) foi elaborada e aplicada na perspectiva da Educação Matemática Realística[3] (EMR) a respeito dos Números Inteiros. Seu desenvolvimento está dividido em duas etapas: a primeira foi a elaboração da trajetória e a segunda etapa constitui o relato dessa trajetória aplicada em uma sala de aula do 7º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais e uma análise interpretativa dos desdobramentos das aulas à luz dos princípios da EMR. As tarefas foram direcionadas como uma forma de proporcionar um ambiente em que os alunos pudessem ser ativos no processo de aprendizagem e, dessa maneira, realizar uma reinvenção guiada do conceito e de operações com números inteiros.

Na Educação Básica a introdução dos Números Inteiros ocorre no 7º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais. Há neste conjunto numérico uma mudança em relação ao significado dos sinais de mais e de menos, que além de operadores agora também tem o significado de predicativos o que causa confusões e dúvidas que acompanham os alunos até o Ensino Médio. A dificuldade apresentada em compreender os números negativos não se restringe ao estudante deste tempo, pois, segundo Glaeser (1985),

---

[1] Mestre em Matemática pelo PROFMAT/UEL. Professora da Educação Básica na Rede Pública Estadual do Paraná.
[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL. Professora do Depto de Matemática da Universidade Estadual de Londrina.
[3] Designação de uma abordagem holandesa para o ensino de Matemática.

os números relativos são conhecidos historicamente desde Diofanto (século III) até os dias atuais, mas por mais de 1500 anos vários obstáculos se opuseram à sua compreensão. Por conta disso o objetivo deste trabalho foi fazer um estudo a respeito dos Números Inteiros, considerando seus conceitos matemáticos e seu desenvolvimento histórico, elaborar, aplicar e refletir sobre uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem apoiada na abordagem da EMR. Nesta direção, e baseados nesse objetivo, a pergunta dessa pesquisa se apresenta: como a EMR pode orientar um professor na elaboração e desenvolvimento do processo de construção de conceitos de Números Inteiros por alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais?

Para que os alunos possam reinventar os números inteiros foi elaborada e aplicada uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) na qual o professor vai além da elaboração de um plano de aula, pois segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) uma trajetória está ligada aos significados de aprendizagem, ensino e de perfil de conteúdo programático. Em seguida foi feito um movimento de reflexão sobre aplicação da TEA à luz dos princípios da EMR e de alguns obstáculos superados durante o desenvolvimento histórico.

Conceitos Fundamentais dos Números Relativos

Caraça (2005) afirma que a todas as pessoas é constantemente imposta a realização de contagens nas mais variadas circunstâncias. E à medida que a vida social vai aumentando de intensidade a contagem torna-se mais importante e urgente. A solução encontrada pelo homem para esta necessidade são os números naturais. A ideia de que a criação dos números naturais surgiu das necessidades ligadas a condições de vida é comprovada pelo estudo de povos. Este autor chama de números naturais à sequência a partir do 1 (um), argumentando que um homem civilizado de hoje começaria a escrever os números naturais a partir do zero, mas o homem primitivo, de hoje ou dos tempos préhistóricos, não considera o zero como um número, assim chama a sequência 0, 1, 2, 3, 4, ... de sucessão de números inteiros. Quanto à criação de um símbolo para o nada, Caraça atribui às exigências da numeração escrita, datando, provavelmente, durante os primeiros séculos da era cristã.

O autor define o princípio de extensão como

> a tendência que o homem tem de generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento seja, qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. (CARAÇA, 2005, p.9).

E é fazendo a aplicação deste princípio que o autor mostra a construção dos conjuntos numéricos desde tempos em que o homem tinha apenas a necessidade da contagem até a construção dos números relativos e complexos.

Antes de falar sobre os números inteiros negativos, o princípio de extensão leva o autor a definir o conjunto dos números reais positivos relacionando cada número real a um ponto sobre a reta. Desse modo descreve os números relativos com base nos números reais fazendo uma analogia

> ao tomarmos o nascimento de Cristo como a origem no nosso calendário, podemos considerar o movimento de um ponto saindo de certa posição inicial e realizando-se ao longo de uma trajetória retilínea precisamos, para indicar a posição do ponto, saber em qual dos dois sentidos opostos, sobre a reta, o movimento se realiza. Se aos números juntamos um sinal indicativo de sentido, a dúvida desaparece. (CARAÇA, 2005, p.90)

O conceito de número relativo dado pelo autor é: sejam a e b dois números reais quaisquer: à diferença $a - b$ chamaremos número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo conforme for $a > b$, $a = b$, $a < b$. Dados dois números reais relativos a e b, aos quais correspondem bijetivamente os pontos P e Q, diz-se que é $a > b$, $a = b$ ou $a < b$ conforme P está à direita de Q, P coincide com Q ou P está à esquerda de Q.

Caraça afirma que um número relativo pode ser escrito como uma infinidade de diferenças entre números reais, exigindo apenas que a diferença não varie o sinal nem o valor absoluto. Todo número negativo pode ser considerado como uma diferença em que o aditivo é zero e o subtrativo é o número real igual ao seu módulo. Assim dado $p - q$ um número negativo qualquer e chamando de r a diferença $q - p$, temos: $p - q = 0 - r = -r$.

Do mesmo modo como ocorre uma relação bijetiva do número real absoluto com os pontos da reta, obtemos uma relação no campo real relativo. Desse modo dada uma reta orientada, ou seja, uma reta na qual se tomou um ponto O para origem e dois sentidos opostos: de O para direita (positivo) e de O para a esquerda (negativo), obtém-se uma relação entre o conjunto de pontos com o conjunto de números relativos.

Quanto às operações no campo dos relativos, Caraça as define por extensão imediata das operações no campo real. Quanto à adição e à subtração temos:

$(p - q) + (r - s) = p - q + r - s = p + r - q - s = (p + r) - (q + s)$ e

$(p - q) - (r - s) = p - q - r + s = p + s - q - r = (p + s) - (q + r)$.

Em particular, tem-se que somar um número negativo equivale a subtrair um número positivo com o mesmo módulo e subtrair um número negativo equivale a somar um número positivo de mesmo módulo. No campo dos relativos, a adição e a subtração aparecem unificadas em uma só, o que se chama operação algébrica.

Quanto à multiplicação tem-se:

$$(p - q).(r - s) = p.(r - s) - q.(r - s) = pr - ps - (qr - qs) =$$
$$= pr - ps - qr + qs = pr + qs - ps - qr = (pr + qs) - (ps + qr).$$

O autor apresenta as igualdades conhecidas como regra de sinal como uma particularidade da multiplicação, assim tem-se:

$$(+a) \cdot (+b) = (a - 0) \cdot (b - 0) = +a \cdot b,$$
$$(+a) \cdot (-b) = (a - 0) \cdot (0 - b) = -a \cdot b,$$
$$(-a) \cdot (+b) = (0 - a) \cdot (b - 0) = -a \cdot b,$$
$$(-a) \cdot (-b) = (0 - a) \cdot (0 - b) = +a \cdot b.$$

A divisão é definida como inversa da multiplicação valendo a regra de sinais semelhante à da multiplicação. A potenciação é analisada se o expoente é um número positivo, então servem as mesmas definições com os resultados ampliados, o autor cita o seguinte exemplo:

> da regra dos sinais resulta que, se o expoente é inteiro e a base é positiva, a potência é positiva, mas que, se a base é negativa, há que atender a paridade do expoente – se o expoente é par, a potência é positiva, se o expoente é ímpar a potência é negativa. (CARAÇA, 2005, p. 96).

Em seguida, é analisado se o expoente é negativo e uma nova definição é dada pelo critério formal do princípio da extensão, tomando a^{-r}, um valor qualquer, querendo que sobre esta potência se opere da mesma maneira que no campo real, em particular deve ser que $a^r \cdot a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^{r-r} = a^0$ e, como $a^0 = 1$, temos que $a^r \cdot a^{-r} = 1$, de onde $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Os Números Inteiros nos Documentos Oficiais

Na Diretriz Curricular Estadual do Paraná (PARANÁ, 2008) - DCE, os Números Inteiros são apresentados como um conteúdo básico, pertencente ao conteúdo estruturante Números e Álgebra do 7º ano do Ensino Fundamental II e na lista de avaliação apresenta dois itens relacionados a este conteúdo:

a) reconheça os números inteiros em diferentes contextos

b) realize operações com números inteiros.

Em relação à expectativa deste conteúdo estruturante espera-se que os alunos compreendam os conceitos da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números pertencentes aos conjuntos dos naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais e suas propriedades.

A Base Nacional Comum Curricular (2018) - BNCC apresenta na unidade temática números o objeto de conhecimento: Números Inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações.

E para este objeto de conhecimento as habilidades que seguem: (EF07MA03) comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração; (EF07MA04) resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

A expectativa da BNCC (BRASIL, 2018) em relação à unidade temática números é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos.

A Educação Matemática Realística

A Educação Matemática Realística (EMR), segundo Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014), é uma abordagem de ensino que iniciou por volta da década de 1970 com o projeto Wiskobas na educação primária por Edu Wijdeveld e Fred Goffree e, em seguida, por Adri Treffers. Juntos, eles criaram a base da EMR. Em 1971, o projeto Wiskobas tornou-se parte do então instituto IOWO que estava sob a direção de Hans Freudenthal. Em 1973, com a expansão deste instituto com o projeto Wiskivon para Educação Matemática secundária essa base recebeu um impulso decisivo para reformar a Educação Matemática na Holanda onde, na época, predominava o movimento da Matemática Moderna.

As ideias de Freudenthal foram fundamentais para o desenvolvimento dessa abordagem. Ele considerava a matemática como uma atividade humana, defendia que estudantes de matemática devem ser participantes ativos de sua aprendizagem desenvolvendo suas próprias ferramentas. Segundo Freudenthal (1991) a Matemática deve ser tratada não como uma ciência pronta, axiomática, mas sim, como uma atividade humana, na qual, os estudantes devem experimentar o processo pelo qual um matemático vive quando descobre algo novo, mesmo que esse estudante esteja realizando algo já anteriormente criado.

Portanto, a fim de que os estudantes realizem esta atividade em suas mentes, Freudenthal (1991) defende que eles devem ter a oportunidade guiada para reinventar a matemática. Para isso é necessário que o professor seja um guia que seleciona as tarefas, inicia e encaminha as discussões e construções matemáticas dos estudantes. De acordo com Mendes (2014) nessa perspectiva, ao estudante cabe ser o autor do seu próprio conhecimento e ao professor se estabelece a responsabilidade de criar um cenário que oportunize "essa autoria". Segundo Pires (2013), Freudenthal utilizou o termo "reinvenção guiada" para explicar como ele imaginou que a matemática poderia ser aprendida.

De acordo com Pires (2013) a reinvenção guiada juntamente com a matematização são duas das ideias centrais da EMR.

Para tanto,

> espera-se que o ambiente em sala de aula oportunize ao estudante se colocar em um contexto em que seu compromisso com a aula de matemática transpasse o desenvolvimento fragmentado, mecânico e reprodutor de competências, para que possa tornar-se o condutor do próprio processo de aprendizagem, por meio de tarefas que suscitem e abranjam competências cognitivas dos níveis de reflexão. (MENDES, 2014, p. 26)

A matematização segundo Mendes (2014) ocorre quando o estudante busca organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos. De acordo com Streefland (2003, apud FERREIRA, 2016 p. 246) para Freudenthal era possível "matematizar a realidade" e "matematizar a matemática".

O termo “realística”, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014), tem a ver com fazer uma atividade real em sua mente. Portanto não se limita a uma conexão apenas com o mundo real, mas os contextos podem envolver situações do mundo real, imaginário ou, até mesmo, da matemática formal. A contextualização torna-se necessária na abordagem da EMR, pois os problemas contribuem para aplicar conceitos matemáticos, assim o estudante pode desenvolver ferramentas e estratégias matemáticas que podem servir de modelo para um novo problema.

De acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014) a EMR envolve princípios fundamentais para o ensino da Matemática que estão ligados a ela de modo inalienável. A maioria deles foi articulada por Treffers em 1978, mas sendo reformulados ao longo dos anos, a autora distingue seis princípios:

- princípio da atividade – estudantes são participantes ativos do seu processo de aprendizagem.
- princípio da realidade – dividida em duas partes, primeiro aplicar a matemática para resolver problemas da vida real e a segunda é que a educação matemática deve partir de situações problema com significados para os estudantes.
- princípio de nível – os estudantes passam por níveis de entendimento, desde soluções informais passando por várias etapas até chegar a uma sistematização.
- princípio de entrelaçamento – os conteúdos de matemática não podem ser considerados de forma isolada, mas de maneira integrada.
- princípio de interatividade – significa que aprender matemática não é só uma atividade individual, mas também social. Além disso, a EMR favorece discussões com toda classe e trabalho em grupo oportunizando a troca de estratégias e invenções adquirindo ideias para aprimorar suas estratégias.
- princípio de orientação – refere-se à ideia de Freudenthal de reinvenção guiada. Professores devem ter papel proativo na aprendizagem dos alunos e os programas educacionais devem conter um cenário que possibilitem um trabalho como uma

alavanca para alcançar um avanço no entendimento dos alunos. Para tanto, a didática e os programas educacionais devem estar baseados em uma trajetória de aprendizagem em longo prazo.

Trajetória de Ensino e Aprendizagem

Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010), uma trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA) descreve o processo pelo qual os alunos passam para aprender. Mostrando o caminho que seguem até chegar aos objetivos do ensino. A autora defende que tal trajetória não deve se prender somente à perspectiva de aprendizagem, mas que pode ter os significados entrelaçados. Seguem três exemplos desses significados:

1) uma trajetória de aprendizagem que dá uma visão geral do processo de aprendizagem dos alunos;

2) uma trajetória de ensino que consiste em indicações didáticas que descreve como o ensino pode articular de maneira mais eficaz com o processo próprio de aprendizagem das crianças e estimulá-lo;

3) um perfil do conteúdo programático, pois indica quais os elementos centrais dos conteúdos de matemática que se deve ensinar.

A intenção de uma trajetória, de acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) é nortear as ações do professor, servindo de guia para as práticas de ensino, mas não de forma rígida, como se seguisse uma receita. Sabemos que não se podem prever as sutilezas do processo de ensino e de aprendizagem que ocorrem em sala de aula, pois o processo de aprendizagem é muito complexo para ser limitado e nunca acontece da mesma maneira. Mas ao analisar o processo de aprendizagem de um grupo podem-se identificar linhas gerais.

Encaminhamentos Metodológicos

Apresentamos neste capítulo resultados de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. Segundo Bogdan e Biklen

(1994), uma pesquisa qualitativa apresenta as seguintes características: na investigação qualitativa a fonte de dados é o ambiente natural; a investigação qualitativa é descritiva; os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo que simplesmente pelo resultado ou produto; os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Esta pesquisa teve início com estudos a respeito da Educação Matemática Realística, abordagem que a fundamentou teoricamente.

A escolha do conteúdo Números Inteiros ocorreu por conta da observação em relação a dúvidas frequentes de alunos tanto do Ensino Fundamental – Anos Finais quanto do Ensino Médio sobre operações nas quais os números negativos estavam presentes.

Após escolhido o tema matemático foi feito um estudo sobre os conceitos dos Números Relativos segundo Caraça (2005) e um estudo sobre os aspectos históricos do desenvolvimento da noção de número, concomitantemente ao estudo da EMR e da Trajetória de Ensino e Aprendizagem de acordo com as ideias de Van Den Heuvel-Panhuizen.

A fim de escrever a trajetória, primeiramente foram delineados os objetivos que esperam ser alcançados pelos alunos, em seguida foi feita uma pesquisa de tarefas em livros didáticos e na internet sobre o conteúdo de Números Inteiros. Diante disso, as tarefas foram selecionadas de modo que se pudesse obter uma sequência para o cumprimento dos objetivos. Com a sequência de tarefas pronta, iniciou-se a escrita de um roteiro procurando pensar em detalhes como a aprendizagem do conteúdo poderia ocorrer na sala de aula.

A trajetória da pesquisa está dividida em quatro tarefas, cuja previsão de possíveis dúvidas e estratégias, que os alunos poderiam ter ou elaborar para resolver as situações, estão escritas em forma de diálogo entre professor e alunos inspirados pelo texto de Deguire (1997), neste diálogo os personagens são o professor fictício (PF) e os alunos fictícios, denominados AF1, AF2, ..., AF8. Neste capítulo apresentaremos uma das quatro tarefas, que apresenta os símbolos de mais e menos com os significados de predicativos e operatórios e os alunos são guiados a usarem a reta numérica como apoio ao efetuar as operações. Procurou-se guiar as aulas fazendo perguntas e promovendo discussões em pequenos ou grandes grupos, procurando conduzir os alunos a fim de que realizassem a reinvenção do tema matemático estudado.

A análise desta pesquisa foi feita entrelaçando a teoria com o desenvolvimento da Trajetória de Ensino e Aprendizagem.

A Tarefa

Enunciado da tarefa

(Adaptado de Dante, 2015) Coloquem um termômetro de ambiente em diferentes locais, como pátio, quadra, sala de aula, copo com gelo, geladeira e congelador. Verifique a medida da temperatura indicada e registre no caderno os valores correspondentes. Depois, respondam:

a)qual foi o local em que o termômetro indicou a maior temperatura? E a menor?

b)qual é a diferença entre a maior e a menor temperatura? Como podemos mostrar essa operação na reta numerada?

c)faça um desenho de um termômetro gradual e anote as temperaturas encontradas.

Diálogo fictício

PF: (trazendo alguns termômetros para a sala de aula) Antes de fazer esta atividade, vamos conversar sobre a medida de temperatura que nós utilizamos. Alguém sabe dizer qual é e como funciona?

AF3: sei que é grau Celsius.

PF: muito bem! Esta é uma escala que considera o ponto de fusão (temperatura em que a substância passa do estado sólido para o líquido) e o ponto de ebulição (temperatura em que a substância passa do estado líquido para o gasoso). Alguém pode dar um exemplo de ponto de fusão?

AF3: é quando o gelo começa a derreter.

PF: e um exemplo do ponto de ebulição?

AF1: se é do líquido para o gasoso, então é quando a água começa a ferver.

PF: muito bem! Ao ponto de fusão, na escala Celsius, é atribuído o valor 0°C e ao ponto de ebulição, 100°C. Agora vamos ao trabalho!

Os alunos saem da sala, em grupos, munidos de seus termômetros e cadernos. Medem e anotam as temperaturas nos locais indicados no enunciado da tarefa, voltam para a sala com suas anotações e resolvem as atividades enquanto o professor caminha na sala de aula e auxilia os grupos. Após resolverem, o professor faz a mediação da discussão com toda a sala.

PF: o que me dizem? Qual é a reposta do item a?

Cada grupo começa a falar os locais em que encontraram a maior e a menor medida de temperatura. Há mais de uma resposta correta.

PF: e o item b, como vocês registraram a resposta?

AF1: a menor temperatura foi -2°C e a maior foi 36°C. Então de -2 até zero são 2 e 36 + 2 resulta em 38.

PF: como iremos escrever esta operação?

AF2: Fizemos $36 + 2 = 38$. Sabemos que a resposta está correta porque verificamos na reta numérica, mas a medida da temperatura é -2°C e não 2°C e a operação deve ser de subtração. E como escrever esta operação usando o -2? Não sabemos explicar.

PF: muito bem! A variação da temperatura que é a diferença entre a maior e a menor temperatura pode ser escrita como $36 - (-2)$. Na reta numérica vocês fizeram a operação em duas partes, sabiam que a distância de 36 até zero é 36 e que a distância de -2 até o zero é 2, logo perceberam que deveriam efetuar a adição, está correto?

AF1: sim!

PF: desse modo podemos dizer que $36 - (-2) = 36 + 2 = 38$.

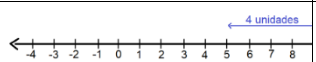
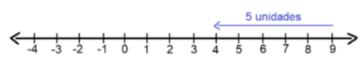
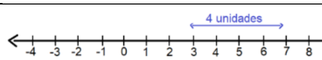
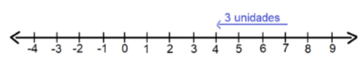
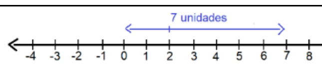
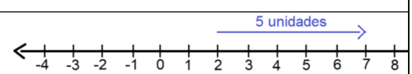
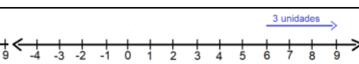
AF1: como pode ser o menos virou mais!

PF: isso mesmo, dois sinais de menos foram trocados por um sinal de mais. Vamos fazer algumas operações desse tipo e verificar na reta numérica se os resultados conferem. (Neste momento o professor escreve as operações no quadro e visita os grupos a fim de auxiliá-los).

Operações: a) $9-(+5)$; b) $7+(-3)$; c)$2+(+5)$; d) $6-(-3)$

O Quadro 1 mostra algumas possibilidades de interpretações, corretas ou não, pelos alunos.

Quadro 1 – Operações realizadas com apoio da reta numérica.

	1ª maneira	2ª maneira
$9-(+5)$		
$7+(-3)$		
$2+(+5)$		
$6-(-3)$		

Fonte: das autoras.

PF: (após um tempo para a execução da tarefa) quais respostas vocês encontraram para as operações?

AF1: no item a, nosso grupo decidiu que o correto era efetuar $9-5=4$, no item b, $7-3=4$, no item c, $2+5=7$ e no item d, $6+3=9$.

PF: está bem, então vamos escrever essas equivalências?

AF3: do mesmo modo que foi feito o anterior, podemos escrever assim: (levantando e pedindo para ir ao quadro, escreve as igualdades).

a)$9-(+5)=9-5=4$
b)$7+(-3)=7-3=4$
c)$2+(+5)=2+5=7$
d)$6-(-3)=6+3=9$

PF: então o que podemos dizer quando temos dois sinais juntos, ou seja, dois sinais vizinhos?

AF2: se os dois sinais são diferentes, trocamos pelo sinal de menos e se forem iguais, trocamos pelo sinal de mais.

Com essa discussão, o professor tem a oportunidade para apresentar o jogo de sinais aos alunos.

Relato do desenvolvimento da tarefa

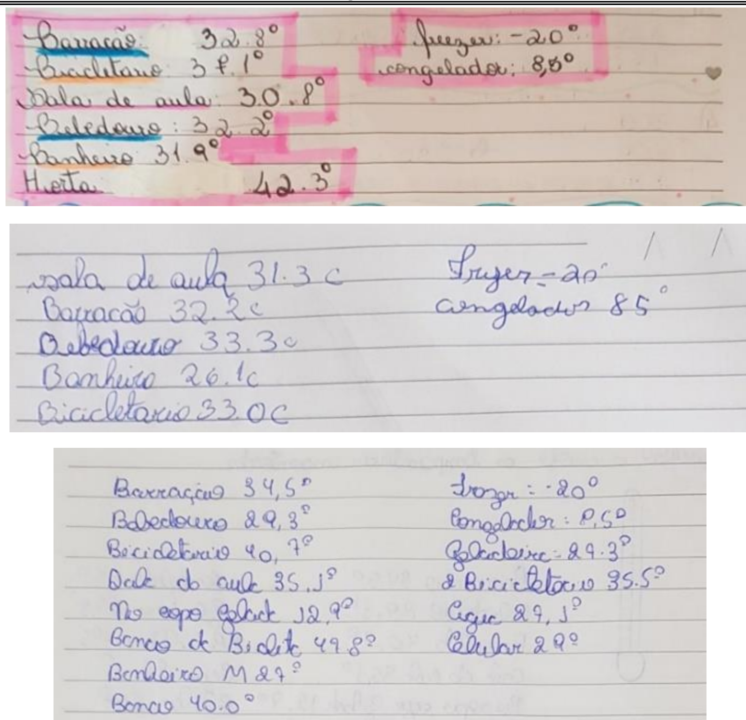
Os alunos foram divididos em quatro grupos e cada grupo recebeu um termômetro de ambiente e orientações sobre os procedimentos (funcionamento do termômetro, comportamento, locais que poderiam circular e registros). Desse modo saíram da sala de aula com seus cadernos, mediram e anotaram a temperatura de diferentes ambientes dentro do colégio e de superfícies como metais, bancos de concreto e de bicicletas.

Figura 1 – Termômetro utilizado pelos alunos.

Fonte: das autoras.

A figura 1 mostra o termômetro utilizado, ele indicava uma ordem decimal foi decidido em grande grupo que anotariam o valor correspondente ao indicado pelo instrumento.

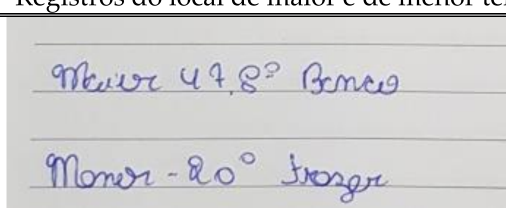
Figura 2 – Registros das temperaturas em diferentes locais do colégio.

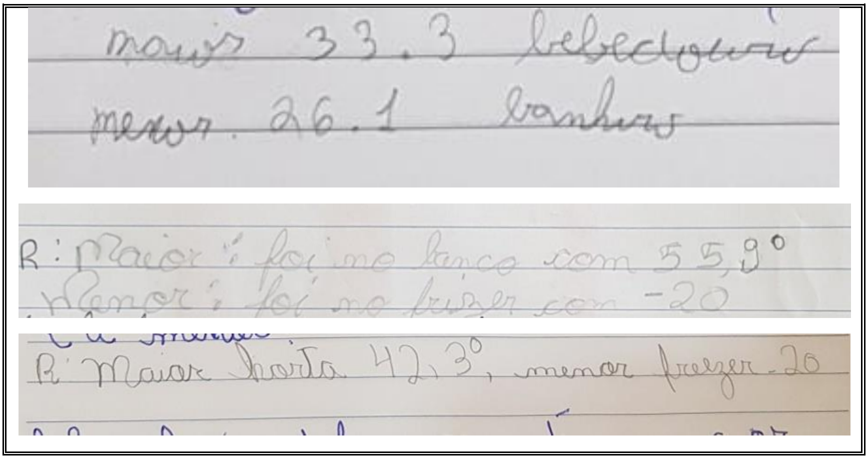


Fonte: cadernos dos alunos.

Assim o item a foi respondido (Figura 2) sendo que a menor temperatura registrada foi no freezer (-20°C) e esta medida foi compartilhada por três dos quatro grupos.

Figura 3 – Registros do local de maior e de menor temperatura

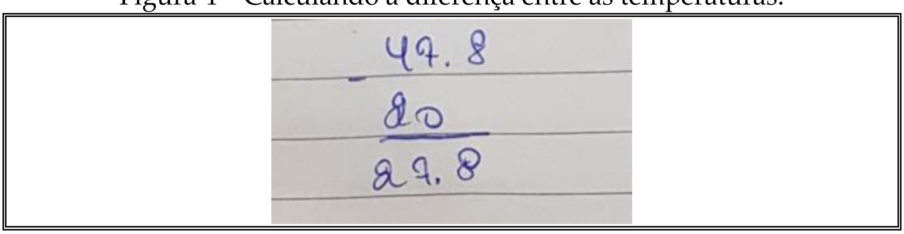




Fonte: cadernos dos alunos.

Já para responder ao item b, alguns alunos calcularam a diferença entre as temperaturas com os valores relativos das medidas. O que deveria ser $47{,}8 - (-20) = 47{,}8 + 20 = 67{,}8$; foi resolvido como apresentado na Figura 4: $47{,}8 - 20 = 27{,}8$.

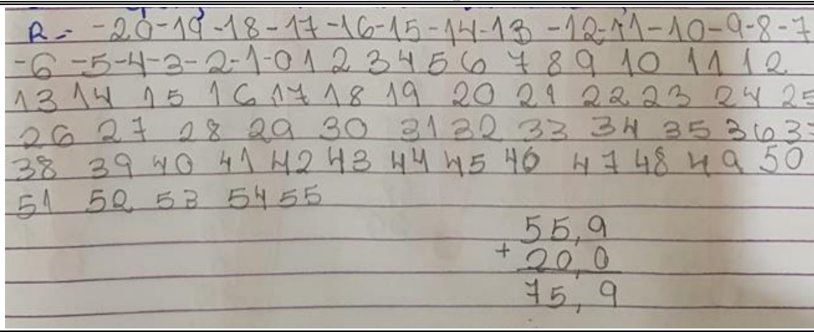
Figura 4 – Calculando a diferença entre as temperaturas.



Fonte: caderno do aluno.

Porém, ainda no item b pede-se para mostrar a operação na reta numérica, assim os alunos começam a perceber que a diferença entre um número positivo e um número negativo deve ser a adição de seus valores absolutos. Alguns alunos escreveram os números em ordem crescente de -20 até a temperatura máxima aproximada (sequência que eles denominaram reta numérica), como mostra a Figura 5.

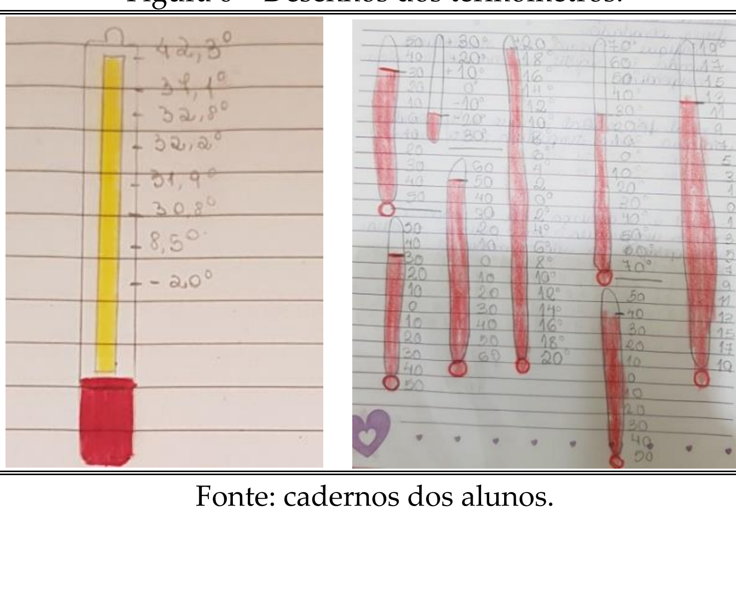
Figura 5 – Utilizando a reta numérica como apoio para calcular a diferença de temperaturas.



Fonte: caderno dos alunos.

Para resolver o item c, no qual os alunos deveriam desenhar um termômetro gradual, houve a necessidade de se apresentar o termômetro para eles, para isso a professora levou um termômetro para que os grupos analisassem seu formato, modo de graduação e como se faz a leitura de temperatura. O uso de instrumentos mostrou o quanto os alunos são curiosos e podem ficar empolgados quando envolvidos em atividades semelhantes, veja desenhos dos alunos na figura 6.

Figura 6 – Desenhos dos termômetros.



Fonte: cadernos dos alunos.

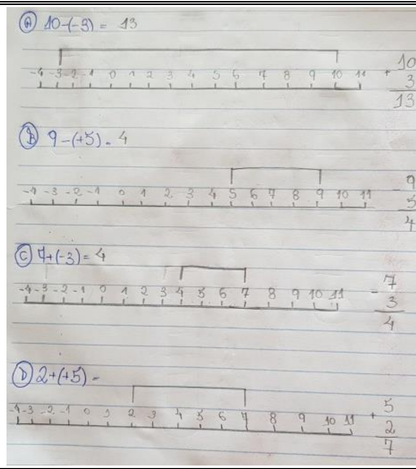
Mas havia um empasse provocado pela palavra "diferença" que os alunos relacionavam com a operação de subtração, porém todos concordaram que a operação deveria ser de adição. Então apresenta-se verbalmente algumas situações do tipo: "qual a diferença entre as idades do aluno A08 e da aluna A04?" ou "se a aluna A06 deve 2 reais e aluna A01 tem 6 reais, qual é a diferença entre as quantias?" e representa essas situações em retas numéricas desenhadas no quadro. Até que a aluna A05 descreve como proceder para fazer a diferença entre $+6$ e -2 da seguinte maneira: "é só você fazer a conta do seis até chegar no -2 e o resultado dá 8." Mas desta vez, a professora escreve a expressão $+6-(-2)$, lendo-a como: "a diferença entre $+6$ e -2", assim houve concordância da escrita com o significado atribuído à palavra diferença, questionando sobre qual operação efetuar os alunos prontamente responderam que deveria ser a adição, logo a expressão fica $+6-(-2)=+6+2=+8$, desse modo chegaram à conclusão de que dois sinais de menos devem ser trocados por um sinal de mais. Há uma aceitação dessa regra sem questionamentos, apenas admiração. A aluna A05 disse: "Ah! Então quando tem dois sinais de menos troca por um de mais!".

Neste momento a aluna A05 sugere a operação: "10 até chegar no -3". Aproveitando a operação sugerida pela aluna e a professora coloca como sendo o item a do exercício proposto, ficando:

a) $10-(-3)$ b) $9-(+5)$ c) $7+(-3)$ d) $2+(+5)$

Considerando necessário contextualizar as operações, a professora o faz verbalmente. Para resolver a tarefa os alunos usaram a reta numérica como apoio, mas alguns alunos preferiram fazer a troca pela equação equivalente, as operações ficaram como mostra a Figura 7:

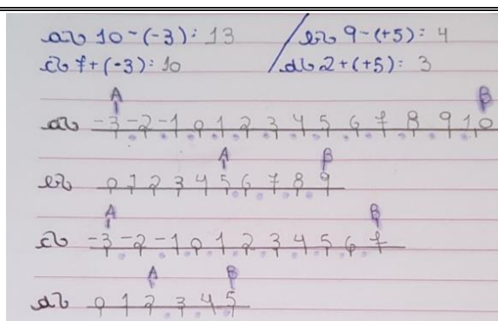
Figura 7 – Utilizando a reta numérica como apoio. Resolução da aluna A06.



Fonte: caderno dos alunos.

A aluna A06 usou a reta numérica e as operações como apoio para chegar às soluções. Na reta numérica ela fez uma comparação entre os números no item a e b, nos quais a operação era subtração. Já no item c temos a adição, mas entre uma quantidade positiva e outra negativa e a aluna tira 3 unidades de 7. No item d ela parte do número 2 deslocando 5 unidades para a direita alcançando o resultado 7.

Figura 8 – Utilizando a reta numérica como apoio. Resolução da aluna A05.



Fonte: caderno dos alunos.

A Figura 8 mostra a resolução de uma aluna, ela chegou ao resultado correto somente nas operações de subtração, pois em todos os itens faz a comparação entre os valores, a aluna usa um código de letras para indicar os números na reta numérica.

Com o apoio da reta numérica e após a discussão em grande grupo, os alunos perceberam que dois sinais iguais devem ser trocados por um sinal de mais e dois sinais diferentes devem ser trocados por um sinal de menos. Escreve-se a regra estabelecida da seguinte maneira:

$$+\ + \rightarrow +$$
$$-\ - \rightarrow +$$
$$+\ - \rightarrow -$$
$$-\ + \rightarrow -$$

A esta regra deu-se o nome de "regra dos sinais".

Algumas Análises

Ao elaborar a trajetória percebe-se que há a necessidade de se fazer uma reflexão mais profunda do que um plano de aula exige, a respeito do conteúdo a ser ministrado e sobre detalhes do processo pelo qual o aluno aprende. A TEA delineou o caminho, mas não o determinou de forma rígida, de acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) isso não ocorre porque os processos de aprendizagem reais são muito complexos para delimitá-los, desse modo não se repetem da mesma maneira. Porém, traçando o processo de aprendizagem de um grupo de alunos, podem ser identificadas certas linhas gerais.

Durante a aplicação desta trajetória, os princípios da Educação Matemática Realística são percebidos de forma integrada. No início da aplicação das tarefas, os alunos mais ativos são os mesmos que se dispõe a participar das atividades. Porém, a maioria dos alunos da turma permanece em silêncio, até que, quando dispostos em pequenos grupos e envolvidos em aulas nas quais a professora assume atitudes de orientadora e não apresenta soluções prontas, faz perguntas procurando guiá-los a fim de que cheguem a uma matematização, começam aos poucos a expor suas opiniões sobre como poderiam resolver as situações. Percebe-se aqui o princípio da orientação conectado ao da atividade e da interatividade.

Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen e Drijvers (2014), o princípio da atividade refere-se à interpretação de Freudenthal da matemática como uma atividade humana, assim o aluno é agente de sua aprendizagem. O princípio da interatividade refere-se à aprendizagem da matemática como uma atividade social e, portanto, o aluno deve ter a oportunidade de compartilhar suas estratégias e invenções com outros. Estes princípios foram percebidos durante toda a aplicação da trajetória, destacamos que alguns alunos, que permaneciam calados em relação aos conteúdos estudados e apresentavam poucas tarefas resolvidas durante o ano letivo, no decorrer das atividades foram modificando as atitudes diante das tarefas, tornando-se mais participativos nas discussões, buscando e compartilhando estratégias de soluções. As discussões entre os alunos e entre professora e alunos estiveram presentes em todas as aulas, foi por meio delas que a professora guiou os alunos para que reinventassem as operações com números inteiros.

Toma-se a posição de guia, e as tarefas contém contextos que são conhecidos pelos alunos permitindo, assim, que eles desenvolvam estratégias para solucioná-las. Esses contextos fazem parte do princípio da realidade.

Na atividade contextualizada observa-se que os alunos encontraram uma liberdade maior para discutir sobre a adição e a subtração diminuindo a complexidade em se obter uma regra para as operações proporcionando um crescimento de conhecimento e um entendimento maior das operações em questão, isto é, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2001), um enfoque característico da EMR, havendo um progresso na maneira em que estavam pensando nas operações, chegando a uma maneira mais formal da apresentação da regra para adição e subtração, que pode ser exemplificado com a fala da aluna A04: "quando tem dois sinais iguais faz conta de adição e quando tem dois sinais diferentes, já é subtração". O professor precisa estar atento às soluções informais dos alunos para guiar o reinventor.

A aplicação dessa trajetória mostrou o entrelaçamento dos princípios da EMR refletidos na sala de aula de modo a favorecer o ensino e a aprendizagem.

Conclusões

Durante a aplicação da trajetória foi possível constatar os princípios da Educação Matemática Realística que foram evidenciados ao observar as reações, falas e produções dos alunos na medida em que as tarefas foram sendo realizadas, perceberam-se obstáculos semelhantes aos enfrentados no decorrer do desenvolvimento histórico dos números relativos. Esta experiência contribuiu para nortear as ações da autora a fim de refinar a trajetória aqui descrita e suas atitudes enquanto guia.

Guiar o aluno nesse processo de reinvenção da matemática é uma tarefa que exige do professor mais do que um simples transmissor de informações, exige que este conheça o processo de aprendizagem.

Uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2010) não só explica em que ponto os alunos devem chegar, mas também ilumina o amplo caminho que seguem. Desse modo, oferece ao professor um norte apresentando os objetivos a serem alcançados pelos alunos, desde uma perspectiva em longo prazo até os aspectos micro didáticos do cotidiano das aulas de matemática.

Aplicar a trajetória foi uma experiência única, pois proporcionou vislumbrar os princípios da EMR.

Referências

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M.

J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. 1994. Título original: Qualitative research for education.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum. mec.gov.br>. Acesso em: 19 dez. 2018.

CARAÇA, B.de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa. 6 ed. Gradiva, 2005.

DEGUIRE, L. J. Polya visita a sala de aula. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo, 5ª reimpr. São Paulo: Atual, 1997.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. de. Educação Matemática Realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem**. Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.1, pp. 237-252, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/issue/view/1442>. Acesso em: 09 jan. 2018.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GLAESER, G. Epistemologia dos Números Relativos. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 17, p. 29 - 124, 1985. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=archive>. Acesso em: 12 out. 2018.

MENDES, M. T. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares de matemática para educação básica**. Curitiba: SEED, 2008.

PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender**: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013. 122 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.(org.). **Los niños aprenden matemáticas.** México: Correo del maestro: La vasija, 2010.

__________, M. Realistic Mathematics Education as work in progress. F. L. Lin (Ed.) **Common Sense in Mathematics Education**, 1-43. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan, 19 – 23 November 2001. Disponível em: <http://www.fisme.science.uu .nl/staff/marjah/documents/Marja_Work-in-progress.pdf >. Acesso em 12 maio 2018.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., & DRIJVERS, P. (in press). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (eds.), **Encyclopedia of Mathematics Education.** Dordrecht. Springer, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170>. Acesso em: 14 dez. 2018.

História da Matemática:
números construtíveis e o ensino de geometria

Cristiane Costa Soutier[1]
Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho[2]

A disciplina de matemática é por vezes temida pelos alunos; pesquisas demonstram as dificuldades enfrentadas em vários conteúdos, para Mendes e Carmo, (2011); as dificuldades de aprendizagem da Matemática frequentemente são atribuídas ao aluno, porém devemos observar que a forma de ensino também pode ser um fator para essas dificuldades. Além disso, estarmos sempre em meio a um bombardeamento de notícias sobre o baixo desempenho dos estudantes brasileiros em testes aplicados em larga escala, onde constam temas de matemática.

D'Ámbrósio (2013) alerta para a importância do estudo da História da Matemática, valorizando a origem do pensamento matemático como inter-relacionado com a necessidade de sobrevivência das comunidades, permitindo que os povos, ao longo do tempo, desenvolvessem estratégias para elaboradas para a resolução de problemas práticos e teóricos. Para este autor, existem muitos motivos para que se ensine História da Matemática, entre os quais (i) o fato que de a matemática é uma manifestação cultural e, como tal, deve ser resgatada e incorporada nas práticas curriculares e nas ações pedagógicas; (ii) para compreendermos que diferentes povos, em diferentes lugares e diferentes épocas manifestaram esses conhecimentos e ações de diferentes maneiras;

[1] Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina – UEL, Londrina, PR. Professora da Rede Estadual de Educação do Paraná. Contato: cryssoutier@gmail.com.
[2] Doutora em Educação Matemática pela UNESP/ Rio Claro e professora associada do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL, Londrina, PR. Contato: tucci@uel.br

(iii) para compreendermos que a matemática formal, estudada e difundida nos livros didáticos é *uma* das possíveis manifestações da matemática, uma de muitas formas desenvolvidas na humanidade; (iv) para valorizar a matemática como um *corpus* de conhecimento existente desde os primórdios da civilização, e (v) para ter conhecimento que "a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares [...] se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as consequências socioculturais dessa incorporação" (D'Ambrósio, 2013, p.10).

Abordar assim a Matemática permite desmitificar que o desempenho dos alunos depende unicamente da formação dos professores ou que nem "todos" podem ser "bons" em matemática, que a aprendizagem de Matemática está restrita a alguns. D'Ambrósio (2013) faz uma observação da visão de Paulo Freire sobre essa imagem acerca da Matemática: "Todos hão de concordar que Matemática também é praticada e feita pelo povo. Mas o que se vê é que o povo está, em geral, amedrontado com a Matemática, julgando-a algo reservada aos deuses ou aos gênios".

Será que nós, como professores, poderíamos nos acomodar e concordar com a ideia de que somente os 'gênios' se sairiam bem nas avaliações? E outros teriam que se resignar à condição de "não dignos" dos conhecimentos matemáticos? Ou, ainda, deveríamos manter nossas tradicionais aulas de 'transmissão de saberes' para aqueles que podem "recebê-los", sem nos importarmos com o restante dos estudantes?

Para D'Ambrósio (2013), o problema do baixo desempenho dos alunos em matemática pode não ser culpa deles, nem nossa, professores:

> Não seria tempo de se pensar que o problema poderá estar na matemática escolar e não nos alunos e professores? Não ocorrerá a ninguém "desconfiar" que essa Matemática talvez esteja excluindo cidadãos de muito sucesso na vida e nas suas carreiras profissionais

> porque ela é obsoleta, desinteressante e inútil? (D'Ambrósio, 2013, p. 20).

Todavia, assumir que a Matemática e seu conteúdo são obsoletos, desinteressantes e inúteis nos conduz ao problema de como realizar a transformação (qual?) para que deixem de sê-los. Como interessar os estudantes a ponto de fazê-los aprender matemática? Como tornar a matemática, do ponto de vista dos estudantes, útil? Como tornar o conhecimento matemático algo atrativo e contemporâneo?

Nossa aposta é que com o uso da História da Matemática, concordando com D'Ambrósio, com o uso de ferramentas computacionais como o Geogebra, com a oportunidade oferecida aos estudantes de realização de atividades que não sejam meras resoluções repetitivas de exercícios, podemos, de alguma forma, despertar interesse na aprendizagem da matemática.

As ideias apresentadas nesse capítulo caminham nesse sentido, da apresentação de atividades que acreditamos possam instigar os estudantes. O objetivo é apresentar alguns conteúdos da matemática escolar relacionados ao ensino de Geometria, utilizando a História da Matemática. Por meio de problemas de quadraturas, em especial, o problema da quadratura do círculo, cuja resolução é impossível nos moldes gregos, apenas com a utilização de régua não graduada e compasso, o que pode ser demonstrado por meio da teoria dos números construtíveis, podemos instigar o aprendizado de matemática. O Geogebra foi utilizado como ferramenta computacional para a construção das figuras geométricas, permitindo maior compreensão e rapidez de solução dos problemas propostos.

1. Um pouco de História da Matemática

A História da Matemática mescla-se com a história da humanidade. De acordo com Struik (1989) as concepções de número e forma podem ser datadas do paleolítico. Os homens das cavernas registraram em pinturas formas bidimensionais dos objetos no espaço, demonstrando compreensão da forma, do ponto de vista matemático. Ao longo da história, o desenvolvimento da matemática atrelou-se tanto ao objetivo de facilitar a vida cotidiana, como a organização de cálculos administrativos, o desenvolvimento de mapas de navegação, a cobrança de impostos, levando à ênfase da aritmética, trigonometria e medição.

Por volta do século VII a. E.C., de acordo com Roque e Carvalho (2012), o pensamento matemático grego, que apresenta relação com o contexto da época, qual seja o surgimento da *polis,* a cidade-estado grega, com organização política, administrativa, religiosa e militar, constituindo-se numa importante instituição da antiguidade. Desenvolve-se uma íntima relação entre razão e política, que repercute no pensamento matemático. Seguindo Struik (1989), o principal resultado da expansão grega e da hegemonia de Atenas foi a influência cada vez maior dos pensamentos democráticos, que culminaram em consolidar Atenas como "o centro de uma nova e fascinante civilização – a idade de ouro da Grécia" (Struik, 1989, p. 75).

> O pensamento racional foi se constituindo neste contexto e ganhou impulso neste novo tipo de organização. Surgiu então, na Grécia, a ideia de que quem soubesse persuadir, sempre poderia convencer os outros de que sua tese era verdadeira. A partir do século V a.E.C., Platão e Aristóteles buscaram propor maneiras de selecionar os tipos de afirmação que alguém pode fazer, distinguindo os raciocínios falsos dos corretos e estabelecendo os critérios de verdade. (Roque e Carvalho, 2012, p. 61)

Hipócrates de Quios (~ 430 a.E.C.) foi um filósofo jónico que apresentou o pensamento característico da atitude mental dos sofistas, a busca pela exatidão e argumentação. As chamadas lúnulas de Hipócrates fornecem "o primeiro exemplo de figuras limitadas por linhas curvas cujas áreas foram encontradas" (Roque e Carvalho, 2012, p. 69). Uma lúnula é uma figura plana limitada por dois arcos circulares de raios diferentes. De acordo como Roque e Carvalho (2012, p. 70)

> Alguns textos de Hipócrates sobre a quadratura das lúnulas são os mais antigos documentos matemáticos gregos que nos chegaram, embora de maneira fragmentada. Hipócrates também é conhecido por ter sido o primeiro matemático grego de que temos notícia a redigir um texto organizado na forma de *elementos*, mas essa obra se perdeu.

O estudo dessas áreas por Hipócrates parece ter surgido do problema de se encontrar a quadratura do círculo, um dos três problemas clássicos da antiguidade. São eles: (i) a quadratura do círculo: determinar um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo de raio dado; (ii) a duplicação do cubo: determinar a aresta de um cubo cujo volume fosse o dobro do de outro cubo aresta dada e (iii) a trissecção do ângulo: dividir um dado ângulo em três partes iguais. Para Yates (1971, *apud* Carvalho, 2007, p. 92)

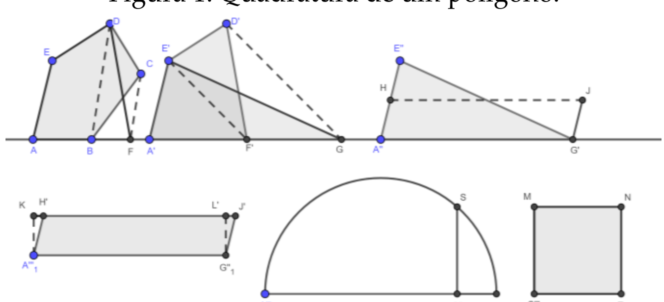
> há três problemas que persistiram com vigor impressionante durante mais de dois mil anos. Estes três problemas, solidamente inexpugnáveis malgrado todas as tentativas usando geometria plana, o método matemático dos antigos 3 gregos, fizeram com que os matemáticos ficassem fascinados e construíssem novas técnicas e teoremas para sua solução. Por meio deste estímulo surgiu parte das estruturas atuais da álgebra e geometria.

Os geômetras gregos interessavam-se por construções geométricas realizadas com o uso de apenas dois instrumentos, o compasso e a régua (sem marcas, não graduada). Construir com régua e compasso exige que algumas regras sejam cumpridas. Com o auxílio da régua é permitido traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos conhecidos. Com o compasso é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto passando por um segundo ponto qualquer. Eves (2004, p.134) argumenta que se pensarmos as construções geométricas como um jogo em que são obedecidas estas duas regras, obteremos um dos jogos mais fascinantes e absorventes inventados.

Os postulados dos *Elementos* de Euclides determinam o uso da régua e compasso seguindo as regras anteriores, de forma que tais instrumentos ficaram conhecidos como instrumentos euclidianos. A régua utilizada não possuía escala e o compasso de Euclides desmontava-se quando um dos seus braços era retirado do papel, diferenciando-os dos compassos atuais, entretanto estes instrumentos são equivalentes.

Os gregos descobriram que era possível transformar qualquer triângulo em um quadrado de área equivalente; traçar uma perpendicular a uma reta conhecida, passando por um ponto qualquer; dado um ângulo qualquer, dividi-lo em duas partes iguais; e dado um segmento de reta qualquer, dividi-lo em partes iguais. Segundo Baron (1985), os geômetras gregos sabiam, desde Euclides, que era possível, através de uma sequência de transformações geométricas, reduzir qualquer figura poligonal a um triângulo com igual área; o triângulo torna-se então um paralelogramo, o paralelogramo torna-se um retângulo e finalmente o retângulo torna-se um quadrado, conforme pode ser visto na figura a seguir.

Figura 1: Quadratura de um polígono.



Fonte: Autoras, apud Baron (1985).

O problema de redução de figuras curvas a quadrados equivalentes foi muito difícil. Regiões de formatos lunares deram origem às primeiras tentativas de determinações de áreas de figuras curvas, Hipócrates de Quios dedicou-se ao estudo destas questões. Independente de seu método, Hipócrates parece ter demonstrado um teorema importante para a quadratura de círculos, qual seja, que as áreas de círculos estão para si, assim como os quadrados de seus diâmetros (Euclides, XII, 2) (Baron, 1985, v.1, p.33).

2. Quadraturas de Regiões Poligonais

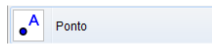
A noção de área que temos atualmente; relacionada a uma medida numérica, é bem diferente de como os antigos geômetras a entendiam. Para eles este conceito estava relacionado a equivalências, isto é, duas figuras eram equivalentes se ocupavam a mesma porção de espaço (mesma área); assim para determinar certa área faziam-se comparações entre figuras. Por ser o quadrado a figura mais simples, teve origem o termo "quadratura". Quadrar certa região significa construir um quadrado equivalente a ela. (Roque e Carvalho, 2012, p. 89).

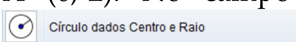
Um dos três problemas clássicos é exatamente a quadratura do círculo. À época destes estudos, as construções eram realizadas com o uso de apenas dois objetos, a saber, régua não graduada e compasso.

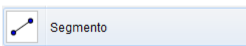
A seguir passaremos à exposição de um conjunto de atividades que trazem as construções geométricas como forma de explorar o conteúdo de área de figuras planas, item presente no currículo da disciplina de Matemática, do Ensino Fundamental e Médio, relacionando esse conteúdo com as quadraturas. Iniciamos com a construção de um retângulo com medidas variáveis; dando os comandos a serem seguidos pelos alunos, de maneira que tivessem a possibilidade de explorar o conteúdo e o software simultaneamente, prosseguimos com as quadraturas do retângulo e do triângulo. As referências para as quadraturas dos polígonos realizadas nesta seção são Santana (2015) e Roque e Carvalho (2012).

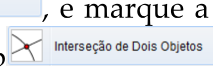
2.1 Construção de um retângulo de base e altura variáveis

Utilizando a ferramenta "Controle Deslizante" 

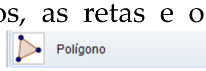
clique no canto superior direito da tela; inserindo as seguintes informações: Nome: b; Intervalo: min: 0; máx: 7. Com a mesma ferramenta vamos criar um intervalo para a medida da altura do retângulo (h). Nome: h; Intervalo: min: 0; máx: 20; controle deslizante: selecione a posição vertical. Com a ferramenta Ponto 

marque o ponto A (0,-2). No campo entrada, digite B1 = (7,-2). Selecione 

, clique sobre o ponto A, e na medida do raio digite: b. Repita o procedimento anterior com r = h; e obtenha dois círculos centrados em A. Construa o segmento AB1 

, e marque a interseção deste segmento com o círculo de raio b 

, obtendo o ponto B. Trace duas retas perpendiculares ao segmento f, pelos pontos A e B, 

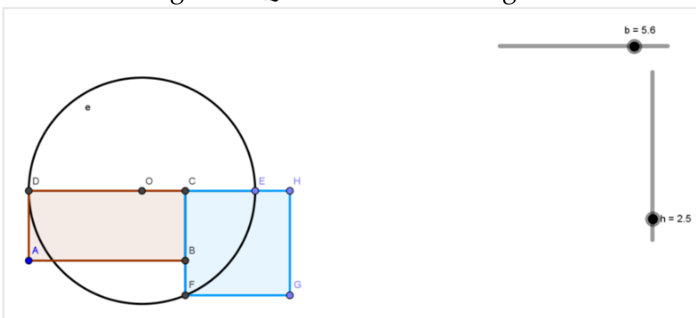
e assinale a interseção do círculo de raio h com a reta que passa por A, renomeando para ponto D. Finalmente desenhe uma reta paralela a f, passando por D e obtenha o ponto C. Oculte os círculos, as retas e o ponto B1. Finalmente om a ferramenta Polígono 

obtenha o retângulo ABCD.

2.2 Construção da Quadratura do Retângulo

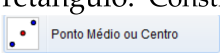
Como o retângulo possui base e altura variáveis, observe se o retângulo obtido na atividade anterior, não é um quadrado. Caso não seja proceda para quadrar sua figura. Verifique qual é o segmento maior: base ou altura? Os passos serão descritos considerando que $\overline{AB}$ é maior que $\overline{BC}$. (Você pode alterar seu retângulo modificando o valor de b ou de h). A partir do vértice C, construa um segmento de medida fixa igual a h, obtendo o ponto E. Marque o ponto médio O de $\overline{DE}$, e desenhe uma circunferência centrada em O de raio $\overline{OE}$. Construa uma reta passando pelos vértices C e B e marque a interseção desta com a circunferência, obtendo o ponto F. O segmento $\overline{CF}$ (de medida m) é o lado do quadrado equivalente ao retângulo ABCD. Construa o quadrado FGHC.

Figura 2: Quadratura do retângulo.



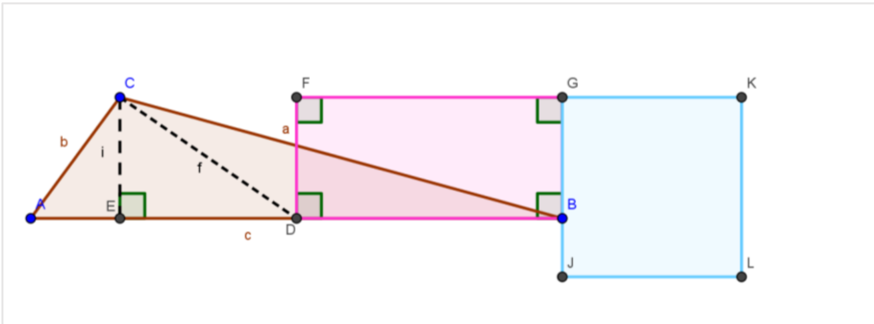
Fonte: Soutier (2017)

2.3 Construção da Quadratura do Triângulo

Uma das maneiras de realizar esta construção é a partir do triângulo dado, construir um retângulo equivalente e em seguida, quadrar o retângulo, este processo inicial é chamado de retangularização do triângulo. Vejamos como podemos obter este retângulo. Construa um triângulo ABC de base $\overline{AB}$. Com a ferramenta 

marque o ponto médio da base: D. Construa a reta paralela à base passando pelo vértice C e uma reta perpendicular a esta também por C. Marque a interseção da reta perpendicular com a base, ponto E e trace o segmento $\overline{CE}$, que é a altura em relação a base $\overline{AB}$. Trace duas retas perpendiculares á base; uma pelo ponto D e outra pelo ponto B, marcando as interseções com a reta g; pontos F e G. Pelos vértices DBGF desenhe o polígono equivalente ao triângulo ABC. Para constatar que se trata de um retângulo verifique que os ângulos são retos. Para resolver o problema inicial, basta quadrar o retângulo obtido.

Figura 3: Exemplo da quadratura de um triângulo.



Fonte: Soutier (2017)

As construções foram realizadas utilizando o software Geogebra, que se mostra uma ferramenta muito útil na confecção e visualização de formas geométricas.

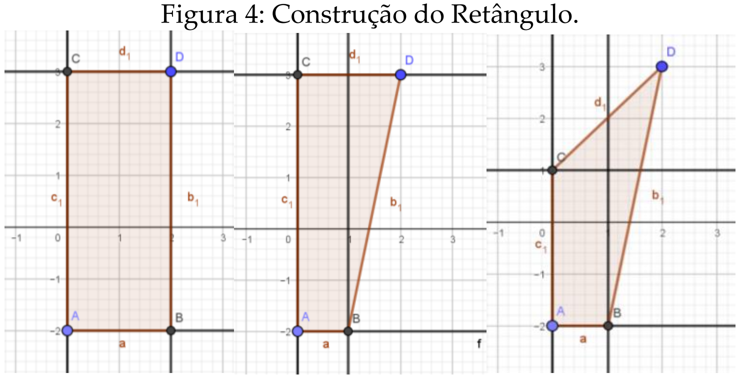
3. A História da Matemática na sala de aula: o que pode acontecer?

O conjunto de atividades descrito anteriormente foi aplicado a estudantes da terceira série do Ensino Médio de uma escola da rede estadual da cidade de Medianeira, município situado no oeste do Paraná. Neste local, à época da realização da pesquisa, existia um laboratório de Informática, equipado com 10 computadores, dispondo de um funcionário com carga de 20h semanais, que era responsável pela manutenção dos equipamentos e pela instalação de programas e softwares, esse foi responsável pela instalação do *software* gratuito Geogebra.

Após obtermos autorização da direção da escola, procedemos a captação de alunos para o desenvolvimento da pesquisa. Como as turmas possuíam em torno de 30 alunos, fizemos um convite em apenas uma delas, explicando que estaríamos limitados a 10 vagas por conta dos equipamentos disponíveis. Inicialmente tivemos uma lista de 12 interessados, porém ao definirmos as datas dos encontros houve 2 desistências por incompatibilidade de horários, restando 10 alunos. Os estudantes foram autorizados pelos responsáveis a frequentar e participar das atividades, sendo que os encontros foram realizados em contra turno, durante o mês de agosto de 2017. Passeremos a descrever algumas situações que ocorreram durante a aplicação das atividades propostas.

Inicialmente realizamos a construção de um retângulo de dimensões variáveis e esta demandou mais tempo que o previsto, pois inicialmente os alunos tiveram dificuldades em realizá-la. Em especial, ao utilizar a ferramenta "controle deslizante" eles se mostraram duvidosos, não entendendo sua necessidade; porém ao finalizarem a figura e perceberem a ampliação ou redução do retângulo conforme modificavam os valores da base b e da altura h, eles mostraram-se fascinados pela mobilidade da figura, sendo esta característica apontada como relevante também em outras atividades. Do grupo tivemos dois estudantes que não haviam realizado a construção correta e ao modificar as medidas acabaram obtendo quadriláteros que não eram retângulos, em um dos casos o ponto D foi marcado sem estar vinculado a interseção das retas *i* e *j*; a figura abaixo ilustra a condição ocorrida:

Figura 4: Construção do Retângulo.



Fonte: Soutier (2017, p.50).

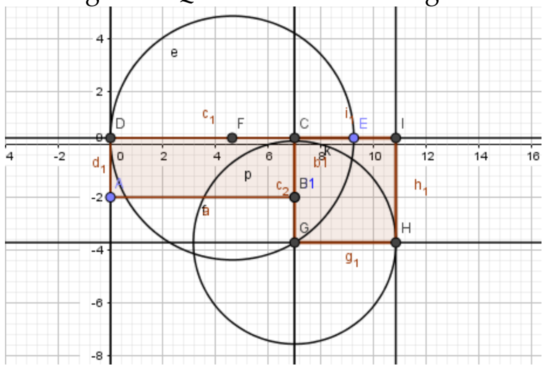
Tendo o retângulo construído, passamos a construção de sua quadratura, nesta etapa eles já estavam adaptados ao Geogebra e encontravam facilmente as ferramentas de cada item. Ao final da proposta eles haviam encontrado o segmento, identificado por *m* que seria o lado do quadrado procurado e deveriam construir este. Percebemos que a maioria optou por utilizar uma circunferência centrada em F de raio *m* para obter os vértices restantes. Ao término deste item eles deveriam responder duas questões que passaremos a comentar,

A primeira questão consisita em comparação da medida das áreas das figuras: "Atualmente nós conhecemos fórmulas para o cálculo de áreas; verifique numericamente que a construção da quadratura do retângulo está correta".

Ao fazer a verificação das medidas indicadas pelo software, um dos estudantes observou que seu retângulo possuía base medindo 6,85 e altura 2,1 o que resulta em uma área de 14,385; já o quadrado possuía lado de medida 3,793, ou seja, área 14,386849; questionando sua construção: *"Professora não está certo isso, onde errei?"* Revisamos os passos da construção, verificando que foram executados corretamente. O arredondamento do programa estava configurado para três casas decimais; e na janela de álgebra o valor das áreas estava igualado a 14,385 para os dois polígonos. Em sua resposta ele utilizou uma aproximação na segunda casa decimal, considerando ambas iguais a 14,39.

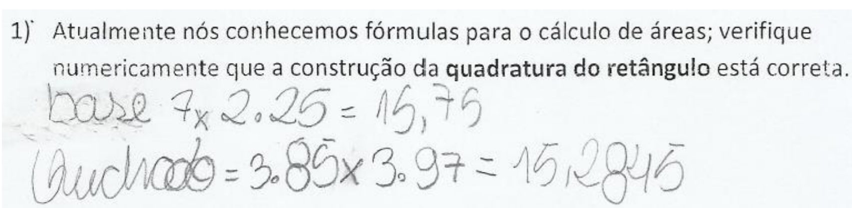
Em outra resolução observamos posteriormente que o "quadrado" construído estava incorreto, pois as medidas dos lados não eram iguais. Como tínhamos o arquivo utilizamos um recurso do Geogebra, chamado "protocolo de construção" que permite revisar os passos da construção, podendo constatar onde ocorreu a falha. No momento de finalizar a atividade, a aluna utilizou a ferramenta "círculo dados centro e um de seus pontos", tendo centrado em G e realizado a abertura até, visualmente, obter C, porém o raio obtido ficou um pouco menor que a medida desejada, como pode ser visualizado na figura:

Figura 5: Quadratura do Retângulo.



Fonte: Soutier, 2017, p.52

Fazendo a verificação numérica, foram obtidas áreas com diferença de 0,46, o que nos chamou atenção foi o fato de identificar o polígono como um quadrado e calcular sua área, sem perceber que se tratava de um retângulo:



1) Atualmente nós conhecemos fórmulas para o cálculo de áreas; verifique numericamente que a construção da **quadratura do retângulo** está correta.

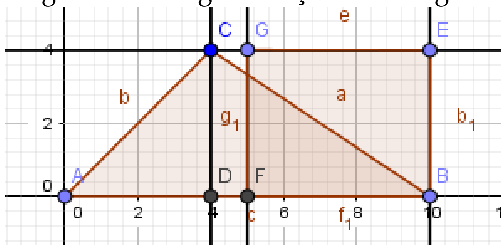
base 7x 2.25 = 15,75

Quadrado = 3.85x 3.97 = 15,2845

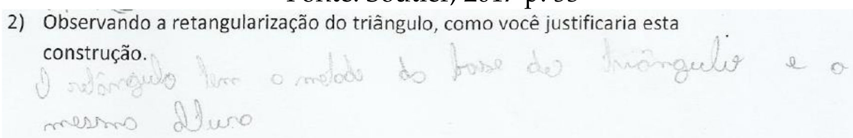
Fonte: Soutier (2017, p.52)

A retangularização do triângulo foi realizada corretamente pelos alunos, sem necessidade de interferências e ao final todos conseguiram justificar verificando que a área do retângulo construído era equivalente a do triângulo, sendo que a base do retângulo encontrado era metade da base do triângulo e as alturas coincidiam, na figura abaixo vemos a imagem de uma das construções realizadas e também uma resposta da questão referente a essa etapa:

Figura 6: Retangularização do triângulo



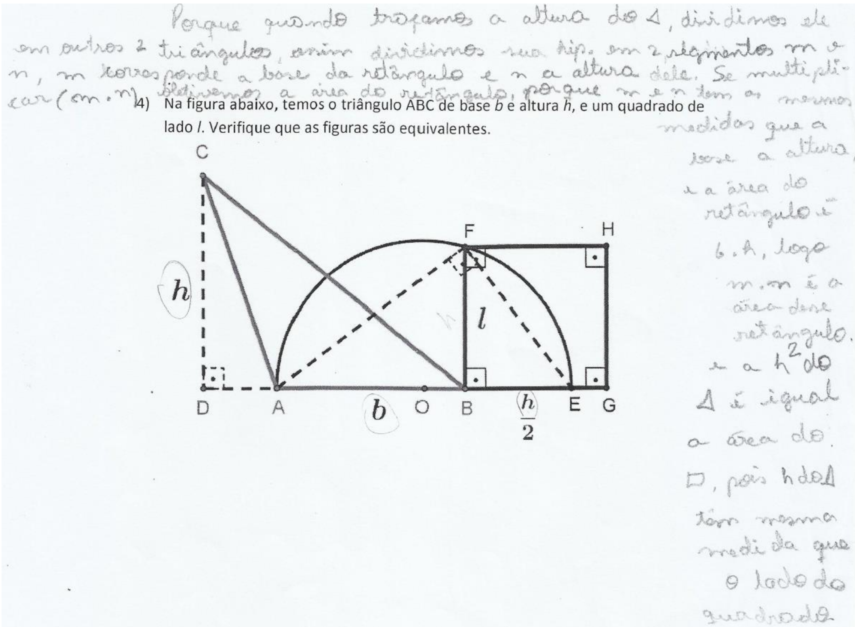
Fonte: Soutier, 2017 p. 53



2) Observando a retangularização do triângulo, como você justificaria esta construção.

O retângulo tem o metade do base do triângulo e o mesmo Altura

A próxima questão a ser respondida tinha como objetivo validar a construção da quadratura do retângulo. Para que respondessem este item foi necessária uma interferência retomando as relações métricas no triângulo retângulo, em especial a que relaciona as projeções dos catetos sobre a hipotenusa com a altura relativa a esta; os alunos mostraram dificuldade em utilizar a relação na figura construída por eles, pois os segmentos estavam identificados com incógnitas diferentes, apenas dois alunos do grupo descreveram seu entendimento em relação a essa questão, os demais não responderam este item. Vejamos uma das soluções:



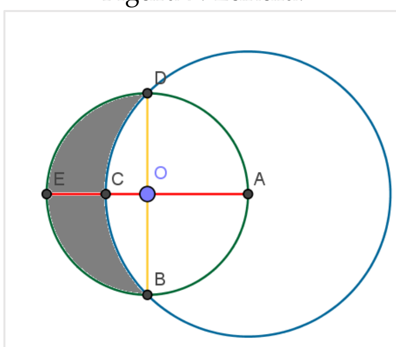
Fonte: Soutier, 2017, p. 54

A proposta da atividade Quadratura de Regiões Poligonais continha ainda a quadratura do Pentágono. Nesta experiência de aplicação não conseguimos realizar esta construção; pois como comentamos anteriormente a primeira construção demandou mais tempo que o previsto; apesar de apresentarmos o software e suas principais ferramentas, não tínhamos um projetor disponível para fazer a construção passo a passo; acreditamos que se o tivéssemos, o tempo da atividade teria sido reduzido e teríamos conseguido realizar a quadratura do Pentágono, por isso incluímos isso na sugestão da aplicação e não aumentamos o tempo previsto para a mesma. Os alunos foram orientados quanto à possibilidade de realizarem esta construção em outro momento que tivessem disponibilidade, porém não recebemos nenhum indicativo de que o fizeram.

Também propomos uma outra sequência de atividades relacionada a cálculo de áreas de figuras curvas, utilizando as lúnulas de Hipócrates.

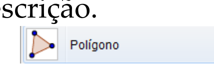
Segundo Roque e Carvalho (2012), Hipócrates de Quios foi um geômetra grego que viveu na segunda metade do século quinto a. E. C.; época em que os matemáticos gregos estavam interessados em solucionar os três problemas clássicos: Quadratura do círculo, Duplicação do Cubo e Trissecção do ângulo; e parece que ao estudar a quadratura do círculo, ele imaginou que se conseguisse quadrar as lúnulas isso auxiliaria na solução do problema do círculo. Uma lúnula consiste em uma figura plana delimitada por dois arcos circulares de raios diferentes, conforme Figura 7:

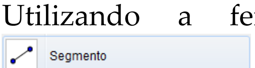
Figura 7: Lúnula.

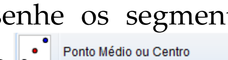


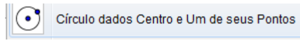
Fonte: Autoras

Iniciamos fazendo a leitura do texto introdutório ao processo de quadraturas de lúnulas e em seguida os alunos foram orientados a realizar a primeira atividade, denominada *Lúnula: lado e diagonal do quadrado,* realizando a construção conforme descrição.

Com a ferramenta polígono regular 

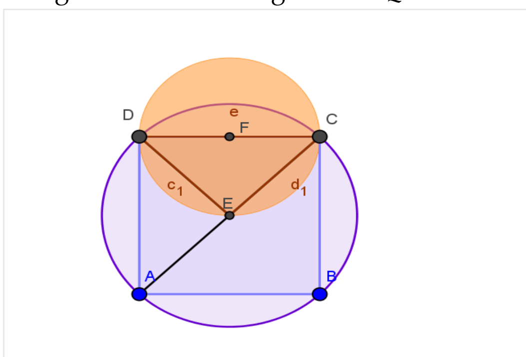
selecionada marque dois pontos do plano; em seguida digite o número de vértices: 4. Aparecerá um quadrado de vértices ABCD. Utilizando a ferramenta segmento entre dois pontos, 

desenhe os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$. Selecione a ferramenta ponto médio 

, em seguida clique sobre os pontos A e C, obtendo E e sobre C e D, obtendo F, pontos médios dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$. Com a ferramenta "círculo dados centro e um de seus pontos” 

selecionada, clique sobre E e A, obtendo o círculo de raio igual a metade da diagonal do quadrado. Com a ferramenta “círculo dados centro e um de seus pontos” selecionada, clique sobre F e C, obtendo o círculo de raio igual a metade do lado do quadrado. Terá uma figura semelhante a seguinte e em seguida calcule a área da lúnula em relação à área do quadrado.

Figura 8: Lado e Diagonal do Quadrado.



Fonte: Autoras

Como o grupo de estudantes já tinha conhecimento do Geogebra, não houve dificuldades em realizar a construção. Ao serem interrogados sobre a relação entre a área da lúnula e do quadrado, mostraram-se resistentes em tentar solucionar o problema; assim sugerimos que se reunissem em duplas para exibir suas ideias. Após um tempo, eles começaram a perceber algumas características da figura que poderiam ajudar na solução, como o destaque dado ao setor circular DEC.

Assim comentamos que poderia ser calculado usando soma e subtração de áreas. Isto é: *A área da lúnula é igual à área do semicírculo de raio FC menos a área do setor circular DCE, somada com a área do triângulo DCE.* Restando então calcular cada uma destas áreas. Tivemos em um grupo de 10 alunos, apenas duas soluções corretas. Para o desenvolvimento foi permitido atribuir um valor numérico para o lado do quadrado, já que não conseguiram trabalhar com os segmentos sem utilizar medidas numéricas.

Em cada uma das sequências: *Quadraturas de Polígonos e Lúnulas de Hipócrates* apresentamos um texto inicial que permitiu aos estudantes conhecer alguns aspectos históricos do conteúdo matemático que seria abordado a seguir. Notamos que apesar de algumas dificuldades apresentadas pelos alunos o entendimento deles em relação a áreas foi modificado. Durante as aulas regulares o grupo participante da pesquisa mostrou certa facilidade na visualização geométrica, mesmo na espacial, reportando ao entendimento da área como uma porção de espaço e não apenas como medida numérica.

Assim afirmamos que a maneira como a Matemática é apresentada pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa, ou não, como comentamos na introdução a este trabalho, nas palavras de D'Ambrósio:

> Não seria tempo de se pensar que o problema poderá estar na matemática escolar e não nos alunos e professores? Não ocorrerá a ninguém "desconfiar" que *essa Matemática* talvez esteja excluindo cidadãos de muito sucesso na vida e nas suas carreiras profissionais porque ela é obsoleta, desinteressante e inútil? (D'Ambrósio, 2013, p. 20).

Entendemos que utilizar a História da Matemática para a exibição dos conteúdos mostrou-se uma ferramenta capaz de envolver os alunos nas atividades, acarretando um melhor desempenho na disciplina.

4. A teoria Matemática

As atividades apresentadas nos tópicos anteriores foram pensadas a partir de nosso estudo sobre a teoria dos Números Construtíveis, a qual possui diversos capítulos dentro da História da Matemática. O conhecimento desta trajetória nos permitiu apresentar os conteúdos em uma perspectiva diferenciada buscando despertar o interesse de nossos alunos para o estudo desta ciência. A seguir, apresentamos uma sequência de definições e teoremas, cujo objetivo é apresentar um resultado central relacionado à História da Matemática, qual seja, o problema da quadratura do círculo é impossível, utilizando-se apenas a régua não graduada e o compasso, como permitido à época de Euclides. A reta e a circunferência equivalem, respectivamente, a régua não graduada e ao compasso. Como afirma Roque (2012, p. 140), para Euclides, n'Os *Elementos*, "as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato". O leitor interessado pode consultar Soutier (2017) para os detalhes das demonstrações.

Definição 1. Seja P um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ contendo pelo menos dois pontos distintos. Dizemos que uma reta $r \in \mathbb{R}^2$ é uma reta em P se r contém dois pontos distintos de P. Dizemos que uma circunferência $c \in \mathbb{R}^2$ é uma circunferência em P se o centro de c e um ponto de c pertence a P.

Definição 2. As operações definidas a seguir são ditas *operações elementares* em P: (i) interseção de duas retas em P ; (ii) interseção de duas circunferências em P e (iii) interseção de uma reta em P e uma circunferência em P.

Definição 3. Um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ diz-se **construtível** a partir de P se é possível determiná-lo através de operações elementares em P.

Denotaremos por $< P >$ o subconjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que são construtíveis a partir de P.

Definição 4. Sejam $O = (0,0)$, $U = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, os seguintes conjuntos de pontos construtíveis são definidos recursivamente:

$P_0 = \{O, U\}$, $P_1 = < P_0 >, \dots, P_{n+1} = < P_n >, \dots ; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Em particular $P_1 = \left\{(-1{,}0), O, U, (2{,}0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ é o conjunto citado anteriormente. Sendo $P_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ temos que P_∞ designa todos os pontos construtíveis.

Definição 5: Um número $a \in \mathbb{R}$ é dito construtível se $(a, 0) \in P_\infty$. O conjunto de números reais construtíveis será indicado por $C_\mathbb{R}$.

Proposição 1: O conjunto dos números construtíveis é um subcorpo dos reais contendo os racionais.

Teorema 1: O conjunto dos construtíveis é uma extensão algébrica dos racionais tal que se a é construtível, então $[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]$ é potência de 2.

O teorema nos mostra que todo número construtível é algébrico, este fato será utilizado na demonstração da insolubilidade da quadratura do círculo.

Proposição 2: Se $a \geq 0$ é um número construtível então $\sqrt{a}$ também é construtível. Em particular $\sqrt[2^i]{m}$ é construtível para todo $i, m \in \mathbb{N}$.

A recíproca desta propriedade é obviamente verdadeira, ou seja, se $\sqrt{a}$ é construtível, $a = \sqrt{a}.\sqrt{a}$ também o é.

Finalmente podemos compreender porque o problema da quadratura do círculo não tem solução ao se permitir somente o uso de régua não-graduada e compasso.

Teorema 2: Não existe $\alpha \in C_\mathbb{R}$, tal que a área do quadrado de lado α seja igual a área do círculo de raio unitário.

Demonstração:

Suponha que exista $\alpha \in C_{\mathbb{R}}$, tal que $\alpha^2 = \pi$. Como π é transcendente sobre $\mathbb{Q}$; segue que $\pi \notin C_{\mathbb{R}}$ (extensão algébrica de $\mathbb{Q}$) e portanto $\alpha \notin C_{\mathbb{R}}$.

Para uma demonstração da transcendência do número π, o leitor interessado poderá consultar a obra de Figueiredo (2011) que dedica um capítulo a este resultado.

5. Algumas Considerações Finais

Neste capítulo apresentamos um dos episódios mais instigantes da História da Matemática, a busca pela solução do problema da quadratura do círculo, um dos três problemas clássicos da antiguidade. Sabemos que, dado um círculo qualquer, podemos considerar seu raio como unidade de comprimento; com essa unidade, a área do círculo será π unidades de área. Um quadrado de mesmo tamanho teria lado de comprimento $\sqrt{\pi}$. Portanto, o problema da quadratura consistia em construir o segmento de comprimento$\sqrt{\pi}$ a partir de um comprimento unitário dado. O que argumentamos é que π é um número transcendente e a construção necessária para a quadratura do círculo não acontece. A transcendência de π foi provada em 1882, por Lindemann. Assim, desde Euclides, um longo percurso foi traçado. Na busca por essa solução, todavia, outras quadraturas foram apresentadas, como os problemas das lúnulas, expostos por Hipócrates. As atividades propostas em sala de aula permitiram, apresentar esse tópico de geometria e História da Matemática.

O tema que elegemos, os problemas clássicos da antiguidade e os números construtíveis, serve sobremaneira para os nossos propósitos, pois exemplifica de maneira cabal a necessidade de assumirmos a matemática como ciência investigativa sujeita às necessidades humanas, sujeita às práticas sociais mais amplas, às aspirações humanas e limitada, portanto, por essa mesma conjuntura.

Entendemos, portanto, que o conhecimento da História da Matemática, permite que o professor de matemática adquira uma visão de mundo ampla, no sentido de articular em suas aulas que por trás das tecnicidades inerentes ao fazer matemática, próprias deste campo específico de conhecimento, a ciência matemática é uma realização da humanidade, produzida desta maneira pelo *homem*, não é obra de alguns gênios isolados, com ideias mirabolantes e repentinas, trata-se de conhecimento que, para adquiri-lo, exige esforço, estudo e dedicação, mas que, justamente por isso, está ao alcance de todos e não restrito a uma pequena elite intelectual. A Matemática pode ser ensinada de maneira contextualizada e a sua história permite ao aluno enxergar quais os processos e dificuldade que os seus autores passaram, as necessidades que levaram a tais descobertas, percebendo que a matemática vai além de um ensino mecanizado e repetitivo repleto de decorações, memorizações e fórmulas.

É possível, para além disso, que o aprendizado de matemática seja algo prazeroso, ao menos para alguns, já que nem todos precisam gostar de matemática.

Referências

BARON, M. **Curso de História da Matemática - A Matemática Grega**.Vol.1, Editora UNB, 1985.

CARVALHO, J. P. **Os três problemas clássicos da Matemática Grega.** Programa de Iniciação Científica da OBMEP, IMPA, 2007.

D'AMBROSIO, U. Porque e Como Ensinar História da Matemática. **REMATEC**, Natal (RN) Ano 8, n. 12. p. 7 – 21. Jan. – Jun. 2013.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, Unicamp, 2004.

MENDES, A. C.; CARMO, J. S. Atribuições Dadas à Matemática e Ansiedade ante a Matemática: o relato de alguns estudantes do ensino fundamental. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1368-1385, dez. 2014.

ROQUE, T; CARVALHO, JBP. **Tópicos de História da Matemática.** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012..

ROQUE,T. **História da Matemática** - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 457p.

SANTANA, E. R. O problema da quadratura do círculo: uma abordagem histórica sob a perspectiva atual. **Dissertação** (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 74 p. 2015, não publicado.

SOUTIER,C.C. O problema das quadraturas e Números construtíveis: Possibilidades para o Ensino de Geometria e relações com a álgebra. **Dissertação** (PROFMAT -Mestrado em Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017, não publicado.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas.** Editora Gradiva, 1987.

Tópicos de Aritmética Modular na educação básica: uma proposta de atividades

Diego Aparecido Maronese[1]
Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho[2]

Introdução

Desde os primórdios da humanidade a Matemática desempenha um papel fundamental para possibilitar o desenvolvimento da sociedade, estando presente diversos aspectos da vida humana como os políticos, socioeconômicos, culturais e, em especial, no desenvolvimento de tecnologias no decorrer da história. Contudo, muitos ainda não conseguem perceber toda a sua importância e, ainda, acabam tendo certa aversão por considerá-la difícil demais ou irrelevante. Isso faz com que o ensino da Matemática seja, cada dia mais, um desafio para o professor.

Obter a atenção e o interesse do estudante, despertando o desejo por aprender, é uma das maiores dificuldades na sala de aula. Na busca por encontrar uma solução para essa dificuldade, ao longo dos anos foram criadas diversas metodologias que procuram desenvolver o ensino da Matemática de maneira diferenciada do método tradicional, entendido como aulas expositivas, que permitam ao aluno desempenhar um papel mais ativo na construção de seu conhecimento, como a Resolução de Problemas e a Investigação Matemática.

Nesse capítulo, iremos abordar alguns tópicos relacionados ao conceito de congruência/aritmética, que usualmente não são

---

[1] Mestre em Matemática pelo PROFMAT, Universidade Estadual de Londrina – UEL, Londrina, PR. Contato: diegomaronese@gmail.com
[2] Doutora em Educação Matemática, UNESP/Rio Claro e professora associada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL, Londrina, PR. Contato: tucci@uel.br

explorados nos currículos regulares pois, atualmente, os currículos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio apenas introduzam alguns tópicos relacionados à Teoria dos Números, como os conceitos de divisibilidade, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

De acordo com Lins e Gimenez (1997, p. 34), a aritmética moderna

> oferece respostas a problemas teóricos abertos, muito recentes. Entre eles, a chamada matemática discreta (quem sabe a "nova aritmética"), com a criptografia, os problemas de minimização e exploração máxima na economia, a análise numérica, os problemas de iteração etc. Por que reduzir então a aritmética a regras escolares? Por que reduzir a aritmética aos números naturais?

Além disso, os professores que buscam desenvolver atividades que envolvam esses tópicos, esbarram na dificuldade em encontrar atividades didáticas aplicáveis no Ensino Básico, logo, encontrariam aqui um material de apoio.

Outro fator para a apresentação desse capítulo foi que, historicamente, o ensino de tópicos de Teoria dos Números na Educação Básica tende a focar apenas em introduzir alguns conceitos de maneira mais "mecanizada" do ensino, conceitos como Mínimo Múltiplo Comum, Máximo Divisor Comum e Divisibilidade, contrariando o que é observado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, os quais destacam que

> as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos (BRASIL, 1998, p. 63)

A aprendizagem de Teoria dos Números permite que os estudantes obtenham habilidades para a resolução de problemas diversos. Para Groenwald (2010, p. 2), o estudo desses tópicos pode ser desenvolvido, na Educação Básica, de modo a

> estimular nos alunos o interesse pela Matemática, aprimorando o raciocínio lógico e ampliando a compreensão dos conceitos básicos para o refinamento do pensamento aritmético e algébrico, fazendo com que os mesmos desenvolvam a capacidade de manipular conceitos e propriedades de forma clara e objetiva.

A proposta de atividades que apresentamos envolve problemas de Aritmética Modular e pode ser aplicada a alunos do Ensino Médio.

Pensamento aritmético e algébrico & aritmética modular

Desde os anos iniciais da Educação Básica, a aritmética é desenvolvida de maneira conjunta entre o trabalho com números e operações e o ensino do espaço e das formas, sendo que esses conceitos são alguns dos primeiros conteúdos matemáticos aprendidos pela criança. Devemos salientar que, mesmo antes de chegar à escola, a criança já possui noção de número, a qual foi sendo construída a partir de atitudes naturais de agrupamento e seriação por ela vivenciadas, como quantos anos tem, quantos irmãos tem, etc.

Poderíamos tentar definir a aritmética apenas como sendo os números e as operações entre eles. Porém, segundo afirmam Lins e Gimenez (1997, p. 33), a educação aritmética é muito mais que isso, ela inclui também

> a) representações e significações diversas (pontos de referencias (sic.) e núcleos, que ampliam a idéia (sic.) simples do manipulativo); b) análise do porquê dos algoritmos e divisibilidade (elementos conceituais); c) uso adequado e racional de regras (técnicas, destrezas

> e habilidades); e d) descobertas ou ``teoremas'' (descobertas, elaboração de conjecturas e processos de raciocínio).

Ainda, de acordo com Laudares e Leite (2011, p. 53), "pensar aritmética é buscar os significados que números e suas operações podem ter na legitimidade de questões da matemática e da não matemática". Portanto, o ensino da aritmética, em particular na Educação Básica, deve ter como foco desenvolver a capacidade do aluno de produzir seu próprio conhecimento aritmético, atribuindo-lhe significado, compreendendo sua importância e sabendo utilizá-lo quando necessário.

Como contribuir para que o professor busque atividades e ferramentas que estimulem esse desenvolvimento em seus alunos, evitando exercícios de simples repetição? Questão legítima que merece atenção de todos os educadores matemáticos.

Outro complicador, segundo Silva (2007, p. 4), é que

> atualmente aritmética e álgebra, no ensino fundamental, são ensinadas separadamente. Nas séries iniciais é ensinada somente a aritmética e apesar de saber que para o desenvolvimento do pensamento aritmético trabalha-se intuitivamente noções de álgebra, o ensino dessa última, em geral, é efetivado somente nas séries finais do ensino fundamental. Assim, para favorecer o ensino da álgebra e da aritmética, poderia haver um esforço entre os educadores matemáticos para que ambas pudessem ser concebidas como complementares, uma ajudando no desenvolvimento da outra.

Cruz (2005), corrobora essa tese, afirmando por sua vez que dificilmente encontramos nos livros didáticos uma articulação entre os conteúdos de aritmética e álgebra que possibilitem ao aluno compreender a ligação entre os números e as letras, o que dificulta o seu entendimento da álgebra como uma ferramenta para provar regras e relações numéricas.

Lins e Gimenez (1997) também admitem que a educação Aritmética e Algébrica deve ocorrer ao mesmo tempo, não apenas integradas entre si, mas conectadas ao ambiente interno e externo à escola, desempenhando seu papel de auxiliar os alunos a construírem seu conhecimento matemático, visando a produção de significados.

> O grande objetivo da educação aritmética e algébrica hoje deve ser o de encontrar um equilíbrio em três frentes: i) o desenvolvimento da capacidade de pôr em jogo nossas habilidades de resolver problemas e de investigar e explorar situações; ii) o desenvolvimento de diferentes modos de produzir significado (pensar), o que poderíamos chamar de atividades de inserção e tematização; iii) o aprimoramento das habilidades técnicas, isto é, da capacidade de usar as ferramentas desenvolvidas com maior facilidade. (Lins e Gimenez, 1997, p. 165).

Para estes autores, não há um consenso a respeito do que seja "pensar algebricamente", o que dificulta uma formalização para esse conceito. De uma forma mais superficial, a atividade algébrica costuma ser descrita como "fazer ou usar álgebra", ou mesmo "calcular com letras", o que tende a enfatizar mais a *linguagem algébrica* do que o *pensamento algébrico* em si.

Boni e Savioli (2015, p. 271) apresentam um compilado para o conceito de pensamento algébrico, de vários autores, os quais indicam as intercorrelações entre aritmética e o pensamento algébrico.

> Kaput e Blanton (2001) defendem o pensamento algébrico como aritmética generalizada, ou seja, como a generalização de operações aritméticas e propriedades numéricas; Fujii e Stephens (2001), abordam sobre o conceito de quase-variáveis, considerando que nos contextos aritméticos estão relacionadas variáveis implícitas que são utilizadas pelos estudantes; Usiskin (2000) argumenta que, mesmo sem perceberem, os professores dos anos iniciais já ensinam álgebra, apresentando exemplos que mostram reconhecimento de padrões e generalização em propriedades de números e de operações aritméticas.

Dessa forma, observamos a necessidade que ocorra essa integração natural entre a álgebra e a aritmética em sala de aula, pois

> o trabalho integrado entre procedimentos de cálculos aritméticos e pensamento algébrico, além de possibilitar o desenvolvimento deste a partir da generalização de aspectos adjacentes em procedimentos de cálculo, contribui, do mesmo modo, para os estudantes reexaminarem e compreenderem o significado das operações e as diferentes formas de pensar a Matemática (RUSSELL; SCHIFFER; BASTABLE, 2011 *apud* BONI; SAVIOLI, 2015, p. 266).

Assim, podemos perceber que esse desenvolvimento conjunto da aritmética e do pensamento algébrico se mostra fundamental e, além disso, cabe ao professor assumir seu papel de condutor na construção de conhecimento, possibilitando aos seus estudantes que desenvolvam ambos, de modo a encontrarem soluções para problemas apresentados na sala de aula e de fora da escola.

Se, por um lado, a aritmética está presente nos currículos do ensino obrigatório em todos os países, conforme afirmam Lins e Gimenez (1997), o mesmo não acontece com a aritmética desenvolvida por Gauss, conhecida como Aritmética Modular.

Segundo Mattos, Puggian e Lozano (2011), o ensino da Aritmética Modular na Educação Básica auxilia a consolidação do conceito de divisibilidade, proporciona que os alunos conheçam um contexto diferente para a realização das operações aritméticas e, ainda, incentiva um maior desenvolvimento do pensamento aritmético e sua ligação com o algébrico.

A Aritmética Modular trabalha com os inteiros separando-o em conjuntos, chamados classes de equivalência, definidos segundo o resto da divisão por um número natural fixo, digamos n (MATTOS; PUGGIAN; LOZANO, 2011). No conjunto dos restos possíveis na divisão por n: $\{0,1,2,\cdots,n-1\}$, definem-se as operações de soma e multiplicação, condizentes com a multiplicação dos inteiros.

Como ilustração, podemos observar um uso mais comum da Aritmética Modular no relógio analógico, no qual analisamos o dia em dois períodos de 12 horas cada. Se em determinado momento o relógio marca 7 horas, então daqui a 8 horas estará marcando 3 horas. Porém, se seguirmos a adição usual, o horário futuro deveria ser 7 + 8 = 15, o que não é possível no relógio analógico, pois o mesmo possui um período de 12 horas, logo não é possível que marque "15 horas". Da mesma forma, se o relógio começa em 12:00 (meio dia) e se passam 21 horas, o horário observado será 9:00 do dia seguinte, ao invés de 33:00. Isto é, como a contagem das horas recomeça cada vez que atinge 12, a aritmética do relógio é uma aritmética módulo 12.

Ainda que normalmente não estejam presentes nos planos de ensino de matemática dos diversos anos escolares, trabalhamos com os restos das divisões na resolução de vários problemas no nosso dia a dia.

Resolução de problemas & investigação matemática

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 27), a sociedade atual exige "trabalhadores mais criativos e versáteis, capazes de entender o processo de trabalho como um todo, dotados de autonomia e iniciativa para resolver problemas em equipe e para utilizar diferentes tecnologias e linguagens". Contudo, pode-se observar que, muitas vezes, o ensino da Matemática é baseado na repetição e treino de algoritmos, normalmente sem que os alunos possam refletir ou discutir sobre suas regras e características, e utilizando situações-problema que desempenham o papel de simples exercício, visto que não se mostram desafiadoras aos alunos e não possibilitam que estes busquem diferentes estratégias de resolução.

Ainda, a maioria dos livros didáticos utilizados em todos os níveis de ensino, desde os mais elementares até os superiores, apresenta uma matemática pronta, com uma teoria definitiva e bem delineada, com todos os conceitos estruturados de forma linear e contínua, um após o outro, hierarquicamente bem embasados e distribuídos. Apresentada desta forma, a matemática se mostra ciência da exatidão por excelência, ciência de problemas com solução única que pode ser determinada de uma única forma correta. Esta apresentação deixa uma das principais características da matemática imersa em obscurantismo: o desafio intelectual e o prazer da descoberta. Este desafio e este prazer de descobrir podem ser resgatados com metodologias que colocam o estudante na condição de protagonista nas ações de aprendizado, como a resolução de problemas ou a investigação matemática. Ao professor não apenas cabe a tarefa de propor um problema ou situação a ser investigada, como também de direcionar o aluno para que este perceba a necessidade da ação para solucioná-lo e se proponha a agir.

De acordo com D'Ambrosio (1989, p. 17), a resolução de problemas

> [...] visa a construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulam a sua curiosidade matemática. Através de suas experiências com problemas de naturezas diferentes o aluno interpreta o fenômeno matemático e procura explicá-lo dentro de sua concepção da matemática envolvida.

Concordando com D´Ambrósio, Poffo (2011, p. 3), afirma que

> [...] a resolução de problemas consiste em permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos e desenvolvam a capacidade de administrar as informações ao seu redor. Dessa forma, os alunos adquirem a oportunidade de ampliar seu conhecimento, desenvolver seu raciocínio lógico, enfrentar novas situações e conhecer as aplicações da matemática.

Segundo Polya (1978 *apud* FLEMMING; LUZ; MELLO, 2005, p. 73), o processo de resolução de problemas pode ser realizado através de questionamentos e sugestões, e baseado em quatro etapas:

> Primeiro, temos de **compreender** o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a idéia (sic.) da resolução, para estabelecermos um **plano**. Terceiro, **executamos** o nosso plano. Quarto, fazemos um **retrospecto** da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. [Grifos no original]

De acordo com a descrição acima, podemos perceber que a estratégia proposta por Polya se baseia no processo de interação entre professor-aluno e aluno-aluno. Assim, além de promover um amadurecimento acadêmico e pessoal de cada aluno, também acarreta um maior desenvolvimento do professor que precisa agir como mediador e incentivador de seus educandos, proporcionando uma melhor qualidade de aprendizagem para todos os envolvidos e um maior desenvolvimento da capacidade de trabalhar em equipe, ou seja, de desenvolver tarefas em conjunto através do compartilhamento de conhecimentos visando um objetivo comum, sendo neste caso encontrar métodos de solucionar o problema.

Desse modo, o aluno deixa de ser apenas um ouvinte passivo diante da simples apresentação do conteúdo e passa a envolver-se ativamente na criação dos conceitos matemáticos através da formulação de hipóteses, baseadas em seus conhecimentos anteriores e de suas observações em relação ao problema proposto.

Com isso, o professor fica diante de uma sala de aula formada por alunos que buscam conhecimentos através de abordagens diferentes, alguns procuram uma solução direta e simples, enquanto outros trabalham analisando várias soluções. Esta diferença de visão talvez possa justificar, em parte, o fato de alguns alunos afirmarem que um problema simples é um problema complexo. Essas inúmeras possibilidades de encaminhamentos também dificultam o trabalho docente, pois torna-o cheio de "surpresas", para as quais o docente pode não se encontrar preparado, logo, causando desconforto.

Segundo Onuchic (1999), o foco central do ensino da matemática não deve estar em encontrar a solução dos problemas propostos, mas sim obter novos conhecimentos e aperfeiçoar aqueles que o estudante já possui, ou seja, o principal objetivo do ensino deve ser compreender, para assim adquirir um novo conhecimento ou estabelecer um processo através do qual pode ser aplicado conhecimentos previamente adquiridos.

A principal diferença na utilização da investigação como metodologia de ensino de Matemática com relação à resolução de problemas é que, enquanto na primeira o estudante parte de uma situação aberta, não completamente definida ou com apenas uma única resposta correta, o que possibilita a construção de diversos conhecimentos no decorrer do processo de investigação, até mesmo alguns não previstos pelo professor ao propor a atividade; na segunda, espera-se que o problema esteja bem delimitado e que um resposta final única seja possível.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003 *apud* DICK *et al.*, 2014, p. 8),

> desenvolver o ensino e a aprendizagem da Matemática utilizando a investigação significa considerar ou elaborar questões relacionadas a essa área do conhecimento e para as quais a pessoa que investiga não dispõe de uma resolução imediata, com o objetivo de que se sinta motivada a procurá-la, valendo-se dos conhecimentos prévios matemáticos e lógicos necessários.

Ainda de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 20), o desenvolvimento do processo de investigação matemática é dividido em quatro momentos:

> O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado.

Com isso, o professor deixa de ser um simples “transmissor” de conteúdos, devendo proporcionar aos alunos um ambiente adequado para que possam investigar a situação proposta. Nesse sentido, Skovsmose (2000, p. 6) afirma que “um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações”, ou seja, o papel do professor passa a ser de organizar o ambiente, dar encaminhamento às atividades, inserindo os conhecimentos e recursos que se mostrem necessários no decorrer do processo de investigação, buscando constantemente estimular a autonomia dos alunos na resolução das questões.

Metodologia das atividades e análise dos resultados

As atividades discutidas a seguir foram adaptadas e elaboradas por nós, para uma turma de 19 alunos da 2ª série do Ensino Médio de um colégio particular do norte do Paraná. Para podermos utilizar os dados obtidos com a aplicação, foi encaminhado aos responsáveis de cada um dos alunos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, no qual foram explicados os objetivos, métodos e resultados que esperávamos obter com a pesquisa.

No decorrer deste trabalho, em razão do sigilo dos nomes reais dos participantes da pesquisa, cada aluno será identificado por uma letra do alfabeto latino. Também justificamos, previamente, a ausência do material escrito produzido por alguns alunos nos exemplos apresentados, pois, como as atividades foram realizadas em grupos, algumas resoluções e observações ficaram iguais. Assim, acreditamos não ser interessante inseri-las.

Durante todo o processo, que teve uma duração de, aproximadamente, uma hora e trinta minutos, os alunos foram instigados a buscar formas de resolver as atividades com o conhecimento que já possuíam, o que se mostrou bastante efetivo em alguns dos problemas propostos. Além disso, buscou-se encaminhar o seu pensamento para que pudessem compreender os fatos relacionados à Aritmética Modular inerentes às atividades, que muitos perceberam, mesmo que não formalmente.

Na sequência, apresentamos as atividades que foram propostas, juntamente com a resolução e a análise dos resultados obtidos, a qual será fundamentada nos conceitos que envolvem o pensamento aritmético e algébrico, e as metodologias de ensino utilizadas.

Problema 1 – Descobrir o dia da semana

A copa do mundo de futebol foi realizada no Brasil no ano de 2014. O jogo de abertura ocorreu no dia 12 de junho. Supondo que não haja um calendário em mãos, e sabendo que o dia 1º de janeiro de 2014 foi uma quarta-feira, determine em que dia da semana ocorreu o jogo de abertura.[3]

Tabela 9 - Número de dias de cada mês

JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

O objetivo principal dessa atividade era permitir que os alunos percebessem que a resposta não seria encontrada no resultado "normal" das operações, mas sim na análise dos restos obtidos, proporcionando esse primeiro contato com o pensamento básico da Aritmética Modular. Para isso, foi utilizada a metodologia de Resolução de Problemas no desenvolvimento dessa primeira atividade, permitindo que os alunos buscassem a solução por meio dos conhecimentos que já possuíam.

Para a resolução, foi permitido que os alunos compartilhassem ideias entre si, o que proporcionou um momento interessante de troca de conhecimentos e debate acerca das melhores formas de resolver os problemas. Todo esse processo foi acompanhado pelo responsável pela pesquisa, o qual deu liberdade aos alunos

[3] BARROS, 2014

apresentarem suas resoluções, orientando nos pontos onde houve dúvidas.

Nesse primeiro momento, foi possível observar que a grande maioria dos alunos conseguiu encontrar a resposta de maneiras similares a que se esperava. Alguns alunos buscaram analisar o que ocorria no primeiro e último dia de cada mês, até chegar no final de maio, para assim encontrar o dia da semana em que caiu o dia 12 de junho.

Essa maneira também estava correta, sendo que apenas a aluna C encontrou a resposta incorreta pois errou ao iniciar sua tabela na segunda semana, ao colocar que a quarta-feira seguinte seria dia 07/01 e não dia 08/01. Contudo, os alunos que seguiram essa linha de raciocínio tiveram maior dificuldade em conseguir perceber a ideia dos restos, inerente a esse problema.

Figura 2 - Resposta da aluna C para o problema 1

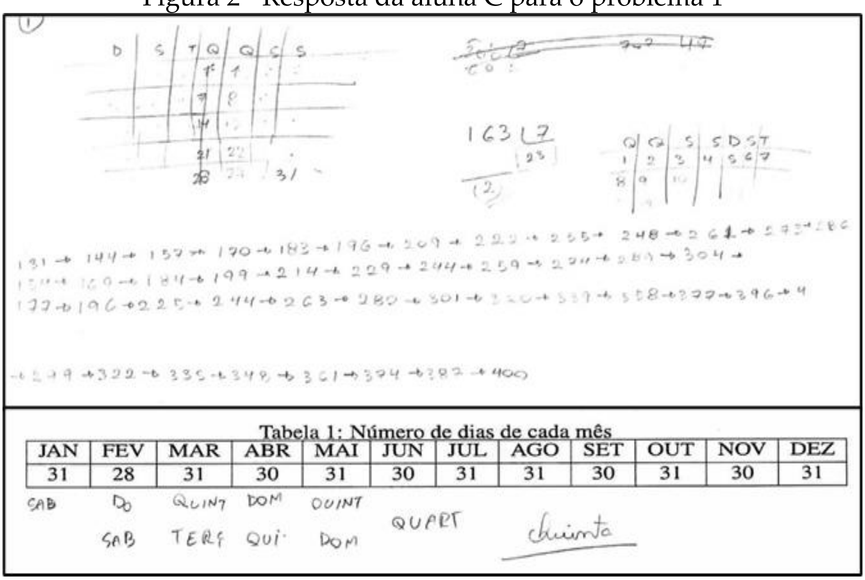
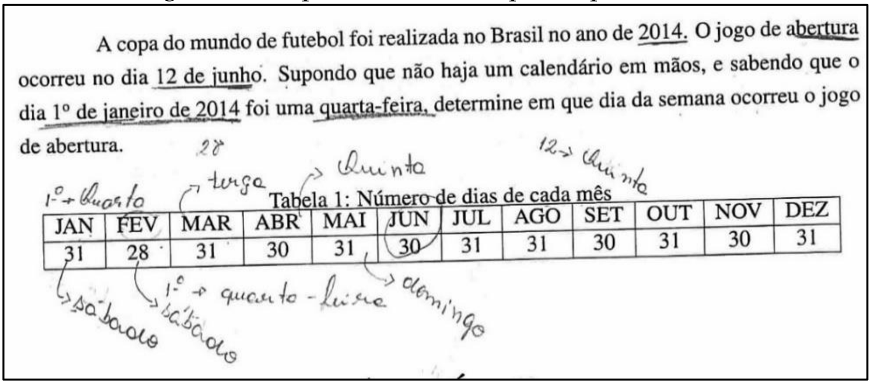


Tabela 1: Número de dias de cada mês

JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Figura 3 - Resposta da aluna A para o problema 1



A copa do mundo de futebol foi realizada no Brasil no ano de 2014. O jogo de abertura ocorreu no dia 12 de junho. Supondo que não haja um calendário em mãos, e sabendo que o dia 1º de janeiro de 2014 foi uma quarta-feira, determine em que dia da semana ocorreu o jogo de abertura.

Tabela 1: Número de dias de cada mês

JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Enquanto isso, outros alunos utilizaram o raciocínio de somar a quantidade de dias de cada mês até maio e os doze dias de junho, para encontrar quantos dias haviam se passado entre o dia 01 de janeiro e 12 de junho. Em seguida, dividiram o resultado por 7 e obtiveram o número de semanas completas, 23, e também um resto 2. Como o dia 01 de janeiro foi uma quarta-feira, a análise das semanas estava sendo feita de quarta a terça-feira. Portanto, como o resto obtido foi 2, encontraram que o dia da semana em que caiu o dia 12 de junho foi uma quinta-feira.

Figura 4 - Resposta do aluno E para o problema 1

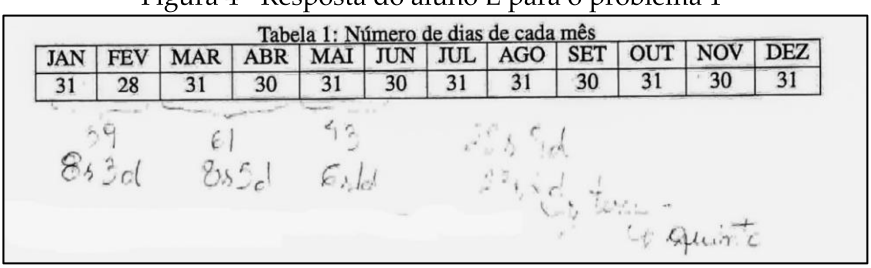
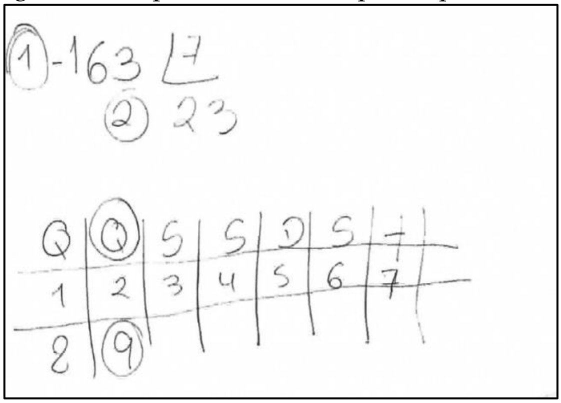


Tabela 1: Número de dias de cada mês

JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Figura 5 - Resposta do aluno B para o problema 1



Esse era o ponto chave desta atividade: os alunos perceberem que não importava quantas semanas completas fossem encontradas, mas sim que a resposta para o problema estava no resto da divisão do número de dias por 7. Com isso, seria possível que, sabendo o dia em que caiu um dos dias do ano, encontrassem qualquer outro.

Dessa forma, foi possível perceber como pode ser interessante para o professor desenvolver problemas que envolvem conceitos de Aritmética Modular, mesmo que sejam os mais básicos, como a ideia de trabalhar com os restos.

Os alunos demonstraram um grande interesse no problema, por se tratar de um tema que fez parte de seu cotidiano e por se mostrar um desafio, diferente de grande parte dos problemas que integram os materiais didáticos na Educação Básica.

Isso reforça o que já foi comentado anteriormente sobre a relevância de trabalhar tópicos de Aritmética Modular na Educação Básica, pois estes possibilitam ao professor

> estimular nos alunos o interesse pela Matemática, aprimorando o raciocínio lógico e ampliando a compreensão dos conceitos básicos para o refinamento do pensamento aritmético e algébrico, fazendo com que os mesmos desenvolvam a capacidade de manipular

> conceitos e propriedades de forma clara e objetiva. (GROENWALD, 2010, p. 2).

Um dos alunos, inclusive, realizou uma mudança curiosa no problema para sua resolução: ele mudou o dia 01 de janeiro para um domingo e realizou toda a análise a partir desse dia. Ao encontrar a resposta, uma segunda-feira, ele retornou à situação para os parâmetros iniciais, ou seja, acrescentou os três dias que havia diminuído anteriormente, obtendo a resposta correta, quinta-feira. Ao ser questionado sobre as razões que o levaram a fazer essa mudança, o aluno afirmou que, como estava acostumado a observar os dias da semana no calendário sempre iniciando pelo domingo, achou mais fácil fazer a análise dessa forma e deixar para "transformar" a resposta no final.

Nesse ponto, percebemos como o pensamento matemático e o aprendizado de cada indivíduo se desenvolve de maneiras e em ritmos diferentes. No caso do aluno citado acima, observamos que o seu raciocínio para a resolução do problema foi análogo ao dos demais. Contudo, como é costume observar os dias da semana iniciando no domingo, ele sentiu a necessidade de fazer essa "mudança" no problema para conseguir compreender sua resolução.

Esse fato ilustra um problema que muitos alunos enfrentam na Educação Básica, em especial no início dos anos finais do Ensino Fundamental, quando iniciam a transição entre a aritmética e a álgebra. Alguns estudantes sentem dificuldade em realizar essa transição, não apenas devido a notação, na qual são utilizados outros símbolos para representar incógnitas e variáveis numéricas, mas também em razão dessa nova forma de pensar a matemática, de uma maneira mais generalizada. A dificuldade se encontra em perceber que diversas situações-problema, mesmo que aparentem ser diferentes, podem ser solucionadas de modo similar, ou seja, existem ferramentas de resolução que não são aplicáveis a apenas um problema. Um bom exemplo disso é o aluno aprender a resolver uma equação cuja incógnita é um x e, quando o professor apresenta uma outra equação semelhante, mas com uma incógnita y, o aluno não consegue perceber que o modo de resolver também é semelhante.

Dessa forma, fica evidente a necessidade de desenvolver a capacidade dos alunos de pensar aritmética e algebricamente, de modo que sejam capazes de perceber a matemática, não como um conjunto de problemas, fórmulas e equações, mas sim, como um conjunto de ferramentas que podem ser adaptadas e aplicadas às mais diversas situações.

Outra aluna, também, comentou que agora entendia o "segredo" de uma pessoa que apareceu em um programa de televisão que conseguia "adivinhar" o dia da semana de qualquer data que lhe perguntavam. Segundo suas palavras, "parecia mágica, ou que ele tinha decorado, mas era tudo Matemática!".

Problema 2 – Dado os restos, encontre o número

O objetivo dessa atividade[4] foi possibilitar que os estudantes observassem, através da investigação matemática, as relações existentes entre os restos e os resultados encontrados, permitindo que compreendessem de maneira prática o enunciado simplificado do Teorema Chinês dos Restos abaixo:

Sejam m e n dois inteiros positivos primos entre si. Dados inteiros i e j com $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$, existe exatamente um inteiro a, com $0 \leq a < m \cdot n$, tal que o resto da divisão de a por m é igual a i e o resto da divisão de a por n é igual a j.

Para realizar a atividade, cada dupla de alunos recebeu um dado.

Obs.: Como o dado possui seis faces, cada vez que ele for jogado poderemos obter como resultado o valor 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Assim, podemos tomar quaisquer números maiores que 6, de tal forma que os resultados

[4] Adaptada de uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática de 2009

dos lançamentos sempre serão menores que m e n. No caso da atividade aplicada nessa pesquisa, foram definidos os valores $m = 7$ e $n = 8$, para reduzir a quantidade de números que os alunos precisariam analisar para verificar a existência e a unicidade do inteiro que procuravam.

Foi solicitado que os alunos seguissem os seguintes passos para realizar a atividade:

1º) Lance o dado algumas vezes e anote os resultados obtidos na tabela abaixo.

2º) Encontre um número inteiro a menor que $(m \cdot n = 56)$ de tal modo que quando dividirmos a por $m = 7$ vamos obter resto i e quando dividirmos a por $n = 8$ vamos obter resto j.

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{a}$

3º) O que você pôde observar em relação aos valores de a encontrados para cada lançamento?

Dentre as três atividades propostas, esta foi a que mais possibilitou observar que os alunos no Ensino Médio já possuem uma maturidade de conhecimento matemático suficiente para compreender os conceitos que se buscava analisar.

Inicialmente, foi feita uma breve explicação sobre a atividade, sem apresentar diretamente os objetivos almejados. No decorrer da realização das tarefas, os alunos se mostraram muito participativos e, mesmo tendo algumas dúvidas no início em relação às etapas que deviam ser realizadas, todos conseguiram efetuar ao menos algumas etapas da atividade.

Algumas observações que eles levantaram durante o processo se mostraram muito relevantes, sendo inclusive mais aprofundadas do que o esperado como resultados da atividade. Os alunos C e E, conforme as imagens abaixo, perceberam um padrão que ocorria na hora de descobrir o número a: após fazerem o teste e encontrarem um inteiro que satisfazia o que foi pedido para a divisão por 7, ao tentarem por 8 perceberam que não dava certo.

Contudo, se adicionassem 7 a esse número, o resto na divisão por 8 diminuía 1 unidade. Assim, conseguiram encontrar mais facilmente os demais números, apenas acrescentando ou diminuindo 7 unidades ao primeiro número encontrado.

Figura 6 - Resposta da aluna C para a letra c do problema 2

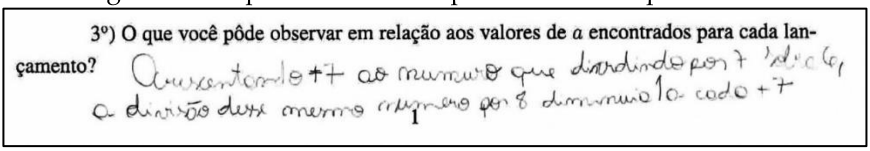

3º) O que você pôde observar em relação aos valores de *a* encontrados para cada lançamento? Acrescentando +7 ao numero que dividindo por 7 sobra 6, a divisão desse mesmo numero por 8 diminuio 1 a cada +7

Figura 7 - Resposta do aluno E para a letra c do problema 2

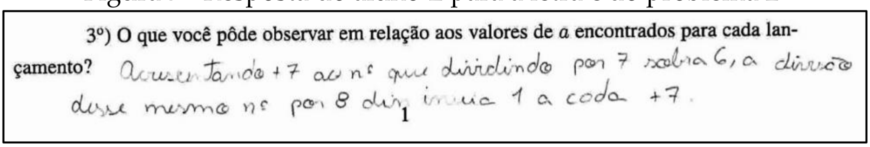
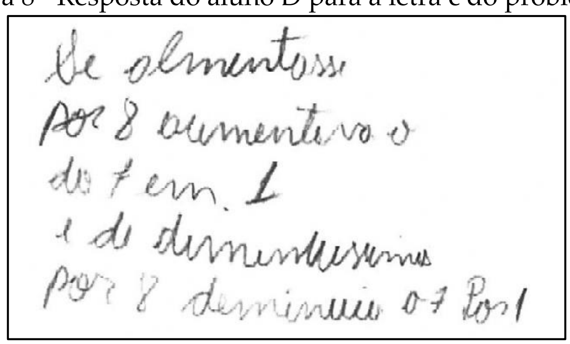

3º) O que você pôde observar em relação aos valores de *a* encontrados para cada lançamento? Acrescentando +7 ao nº que dividindo por 7 sobra 6, a divisão desse mesmo nº por 8 diminuia 1 a cada +7.

Figura 8 - Resposta do aluno D para a letra c do problema 2

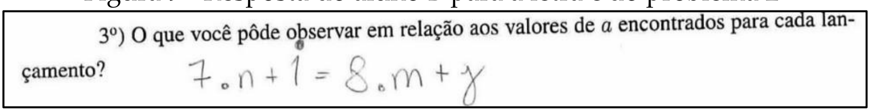

Se aumentasse
por 8 aumentava o
do 7 em 1
e se diminuíssemos
por 8 diminuia o 7 por 1

De maneira semelhante, o aluno D observou esse mesmo fato analisando a divisão por 8, percebendo que ocorria o inverso: quando acrescentava 8 unidades no número a encontrado, o resto da divisão desse a por 7 aumentava em 1 unidade.

Essas observações demonstram que os alunos compreenderam a relação existente entre os restos das duas divisões, encontrando um padrão que se repetia para cada dupla de resultados obtidos nos lançamentos. Mesmo alguns alunos que não conseguiram observar esse ponto facilmente, por meio do auxílio dos demais colegas e do pesquisador, conseguiram perceber que, ao encontrar esse padrão, a resolução da tarefa ficava muito mais simples.

Alguns outros alunos, como é o caso do aluno B, explicitaram a relação existente entre as duas propriedades que o número a deveria possuir na forma de uma equação, o que demonstra uma forma de raciocínio lógico ainda mais maduro e adaptado a buscar "escrever matematicamente" o que compreenderam na linguagem escrita, facilitando a resolução de diversos problemas.

Figura 9 - Resposta do aluno B para a letra c do problema 2


3º) O que você pôde observar em relação aos valores de a encontrados para cada lançamento? $7 . n + 1 = 8 . m + \gamma$

Nesse ponto, podemos observar aquilo que já foi afirmado por Lins e Gimenez (1997) e Boni e Savioli (2015), em relação à importância do desenvolvimento simultâneo do pensamento aritmético e algébrico dos estudantes, possibilitando que estes compreendam de maneira adequada os conceitos matemáticos, saibam interpretar aquilo que o problema está pedindo e, principalmente, "transcrever" isso que compreenderam para a "linguagem matemática", ou seja, transcrever aquilo que perceberam por meio da análise aritmética do problema para a linguagem algébrica, por meio de símbolos e equações que exprimam o mesmo significado.

Isso se mostra fundamental na aprendizagem da Aritmética Modular, pois os alunos conseguiram observar esses conceitos de operações e relações com os restos da divisão euclidiana por meio de exemplos numéricos, mais fáceis de serem analisados, e, a partir disso, podem generalizar os resultados dos casos estudados e compreender como se dá a construção do conceito formal que buscamos apresentar.

Problema 3 – Encontro dos satélites

Três satélites passarão sobre Londrina esta noite. O primeiro a 1 hora da madrugada, o segundo às 4 horas e o terceiro às 8 horas da manhã. Cada satélite tem um período diferente. O primeiro leva 13 horas para completar uma volta em torno da Terra; o segundo, 15 horas e, o terceiro, 19 horas. Determine após quantas horas, a partir da meia-noite, os três satélites passarão ao mesmo tempo sobre Londrina.[5]

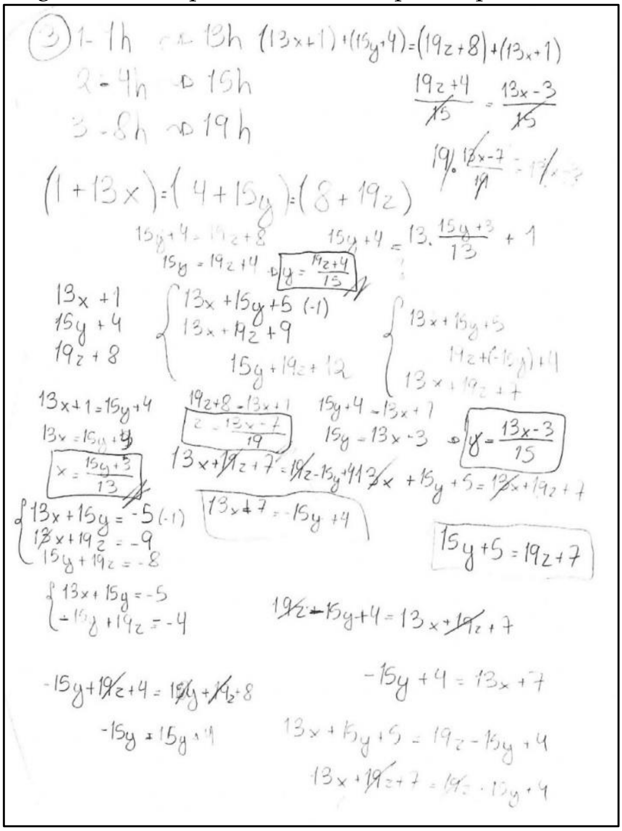
O objetivo dessa terceira atividade era apresentar aos alunos um problema que envolve diretamente o conceito de congruências modulares, até então desconhecido por eles, para verificar os métodos que poderiam utilizar para a sua resolução. Além disso, objetivou-se realizar a apresentação formal do Teorema Chinês dos Restos e, dentro das possibilidades, utilizá-lo para a resolução do problema.

Esta atividade se mostrou a mais complexa para que os alunos conseguissem resolver, principalmente por se tratar de um problema que envolve um sistema de congruências modulares. Essa dificuldade já ficou evidente nas primeiras tentativas que realizaram, pois alguns alunos buscaram descrever o problema na forma de equações algébricas e resolver o sistema com as ferramentas por eles já conhecidas. Ao seguir por esse caminho, alguns cometeram o erro de não considerar que cada equação deveria ter uma segunda incógnita diferente, pois não necessariamente os satélites se cruzariam após um mesmo número de voltas.

O aluno B foi o que chegou mais próximo da resposta sem auxílio, pois ele observou que cada equação do sistema deveria ter uma incógnita diferente e, assim, conseguiu chegar a algumas relações envolvendo essas três incógnitas, conforme a Figura 9.

[5] COUTINHO, 1997, p.116, *adaptado*

Figura 10 - Resposta do aluno B para o problema 3



Para dar continuidade à resolução, foi necessário desenvolver com os alunos no quadro as sequências dos horários em que cada satélite sobrevoava Londrina, o que levou um grupo a observar que cada uma dessas sequências forma uma Progressão Aritmética (P.A.). Contudo, nesse ponto foi possível perceber que a atividade havia se desviado da metodologia de resolução de problemas, escolhida para sua aplicação, e de seu objetivo, que era analisar as possíveis formas de resolução que os alunos encontrariam sozinhos, verificando se estariam preparados para resolver um problema deste nível apenas com o conhecimento que possuem até então. Assim, percebemos que, da forma em que foi apresentada, sem atividades prévias correlatas, essa terceira atividade ficou muito difícil.

Esse nível de dificuldade já estava previsto quando da elaboração da pesquisa pois, como se trata de um problema que envolve a utilização do Teorema Chinês dos Restos para sua resolução, foram realizadas várias tentativas por diferentes caminhos para encontrar uma forma de resolvê-lo sem utilizar o teorema, ou seja, um caminho para resolvê-lo que os alunos, que ainda não conheciam o TCR, poderiam seguir. Como foi necessário quase um mês para nós encontrarmos essa solução completa, iniciando com a ideia de P.A., era possível que os alunos não conseguissem encontrá-la tão facilmente durante o pouco tempo que tínhamos disponível para realizar a aplicação da atividade.

Uma forma para facilitar que os alunos conseguissem observar esse caminho de resolução sem auxílio do pesquisador, seria inserir algumas atividades prévias, envolvendo problemas em que possam observar mais facilmente a possibilidade de utilizar a ideia da P.A. Por exemplo, o problema a seguir:

Uma indústria de confecções produziu, em janeiro de 2015, 1000 camisetas e 700 calças. Sabendo que a cada mês a empresa aumenta sua produção em 10 camisetas e 20 calças, quanto será sua produção total naquele ano?

Com isso, os alunos teriam essa oportunidade de relembrar e aplicar alguns conceitos que envolvem a Progressão Aritmética em um problema aparentemente mais simples, estando mais aptos a perceberem que poderiam utilizar um caminho semelhante para iniciar a resolução da terceira atividade (satélites).

Na sequência do desenvolvimento da atividade 3 com os alunos, como essa atividade se mostrou mais complexa para eles resolverem sozinhos, assim como foi explicitado anteriormente, o processo foi sendo acompanhado pelo pesquisador, o qual permitiu que os alunos indicassem o passo seguinte, interferindo apenas quando solicitado, por meio de questionamentos, os instigando a encontrar os erros, quando estes existiam, e perceberem que nem sempre existia apenas uma forma de realizar determinada etapa da resolução. Desta forma, os alunos foram desenvolvendo juntos a resolução, seguindo um processo semelhante ao previsto, sendo que a grande maioria demonstrou compreender todo o desenvolvimento.

Figura 11 - Resposta da aluna F para o problema 3

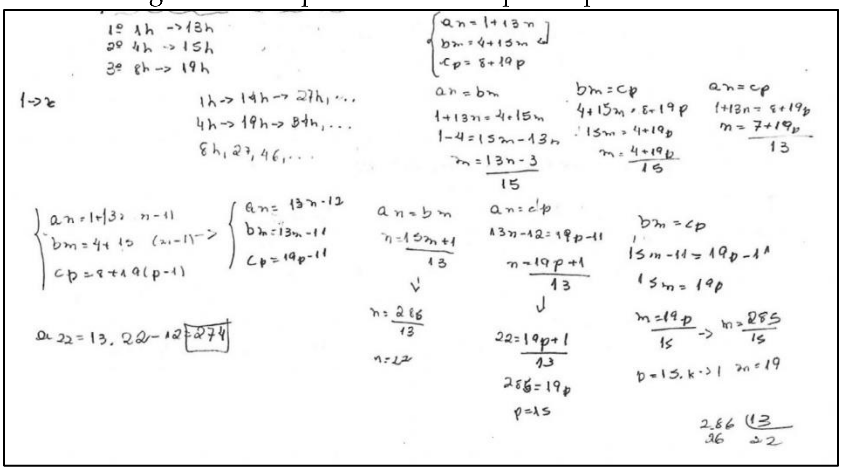
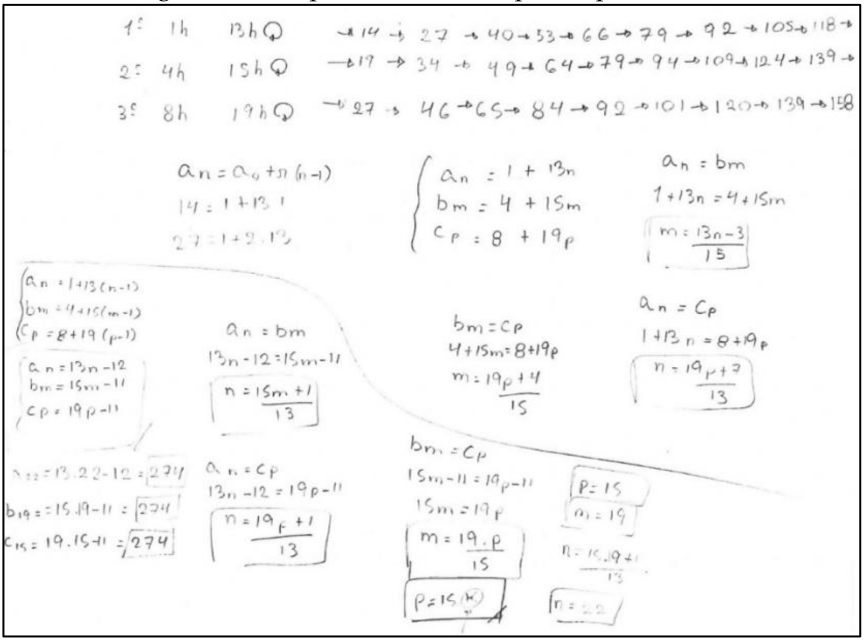


Figura 12 - Resposta da aluna C para o problema 3



Após o término dessa atividade, alguns alunos disseram que não seriam capazes de resolver esse problema sozinhos, principalmente devido à análise que deveria ser feita para entender os "detalhes" existentes na resolução que a diferenciam da "matemática normal" que eles estão acostumados. Neste momento, aproveitou-se para explicar que a matemática possui diversos campos de estudo, alguns muito diferentes dos ensinados durante a Educação Básica, mas que essas áreas podem ser aprendidas também por eles. Por exemplo, foi explicado que eles conseguiram observar sozinhos algumas ideias básicas que fundamentam a aritmética modular nas primeiras atividades, quando trabalharam com os restos das operações e fizeram diversas observações muito interessantes, algumas até mesmo inesperadas pelo pesquisador, as quais já foram citadas nas análises anteriores.

Finalmente, foi apresentado o conceito do Teorema Chinês dos Restos, explicando que seria muito mais rápido resolver um problema como esse visto na terceira atividade utilizando essa ferramenta matemática. Contudo, não foi possível desenvolver completamente o teorema e demonstrá-lo, pois os alunos ainda não conheciam, de maneira formal, alguns conceitos e a simbologia relacionada às congruências. Assim, explicou-se a ideia geral e a origem do teorema, ressaltando a importância da matemática oriental e de todo o conhecimento por eles produzido ao longo dos séculos.

Ao observar tudo que foi realizado durante a aplicação dessas atividades, fica evidente como a participação dos alunos foi fundamental para que conseguissem desenvolver e compreender todas as etapas. Além disso, a maneira como trabalharam em conjunto para encontrar as melhores formas de resolver os problemas contribui para despertar nos alunos sua curiosidade, sua vontade de aprender e compartilhar seu conhecimento, buscando compreender as situações a partir de pontos de vista diferentes.

Isso mostrou-se ainda mais relevante quando observamos como a aplicação dessas atividades serviu para reforçar nos alunos, não apenas o uso da simbologia algébrica, mas a maneira de pensar um problema algebricamente. Ficou evidente que alguns estudantes ainda possuíam dificuldade em transcrever o que compreenderam dos problemas usando a notação da álgebra. Porém, foi possível observar que, mesmo apresentando essa dificuldade na simbologia, a ideia de pensar algebricamente estava presente em quase todas as resoluções, em especial na segunda atividade. Pensar algebricamente não é apenas descrever uma situação em notação algébrica, escrever algo usando letras e números, mas sim compreender os conceitos matemáticos existentes naquele problema, reconhecendo os padrões já observados em outros casos. Com isso, o aluno consegue descrever suas observações sobre o problema, mesmo sendo com suas palavras, e propor caminhos para chegar à solução.

Considerações finais

A utilização de atividades em sala de aula cujos temas não estão incluídos no currículo tradicional, como foi o caso das atividades apresentadas nesse trabalho, tende a dar mais liberdade aos alunos em procurar soluções diferentes, incentivando a utilização de estratégias e ferramentas já conhecidas para solucionar problemas, até então, inéditos para eles. Essa abordagem acabou motivando a maior parte dos estudantes que participou da pesquisa a querer resolver os problemas; e mais, a querer aprender os diferentes caminhos de solução, em especial os mais simples e rápidos, para chegar aos resultados esperados.

O modo como as atividades foram planejadas procurou conduzir os estudantes a compreenderem alguns conceitos essenciais para o ensino formal da Aritmética Modular, como trabalhar utilizando os restos das operações, analisar o significado desses restos dentro dos problemas, observar a existência de sistemas de equações "diferentes" dos que já estudaram, entre outros. Dessa forma, foi possível observar que esses conceitos puderam ser bem compreendidos pelos estudantes, em particular nas duas primeiras atividades, durante as quais eles conseguiram realizar o que foi pedido quase sem nenhum auxílio e, se utilizando de diferentes métodos, puderam "enxergar" a matemática sob um outro ponto de vista, percebendo como esse trabalho envolvendo os restos pode ser uma valiosa ferramenta na resolução dos mais diversos problemas.

Além disso, essa proposta desafia o professor a inovar didaticamente em suas aulas, tanto na utilização da metodologia como no conteúdo, uma vez que a Aritmética Modular não é um assunto normalmente abordado na Educação Básica.

Também observamos que o objetivo do presente trabalho é algo que pode ser realizado de uma maneira muito satisfatória com alunos do Ensino Médio, pois o nível de conhecimento matemático que estes já possuem se mostra suficiente para acompanhar as atividades da forma que foram apresentadas, salvo o caso da terceira atividade, na qual se mostra necessária a inclusão de atividades prévias para facilitar que sejam dados os passos iniciais em sua resolução.

Em razão de seu caráter introdutório, recomendamos a utilização dessas atividades como uma aula preparatória para o professor desenvolver formalmente a Aritmética Modular na Educação Básica, pois, após a compreensão dessas ideias fundamentais que foram desenvolvidas durante sua aplicação, os alunos estarão mais preparados para compreenderem os conceitos e trabalharem com as notações que fazem parte dessa área tão rica da Matemática.

Por fim, este trabalho contribuiu para o entendimento de como se daria a inserção de tópicos de Aritmética Modular na Educação Básica, uma vez que a importância do assunto é notória e seus principais conceitos se dão em níveis relativamente fáceis de compreensão.

Dada a relevância do tema, consideramos que há muito mais a ser abordado e, portanto, há também um vasto campo de trabalho para estudos posteriores nesta área. Esperamos que as atividades e resultados apresentados acima, bem como nossas referências, possam servir de subsídios para futuros trabalhos teóricos e práticos.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, ano 33, n. 55, p. 133-156, jul./dez. 2009.

BARBOSA JUNIOR, J. H. **Congruências modulares:** construindo um conceito e as suas aplicações no ensino médio. 2013. 51 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2013.

BARROS, M. A. de O. **Aritmética Modular:** Aplicações no Ensino Médio. 2014. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014.

BERTINI, L. F.; PASSOS, C. L. B.Uso da Investigação Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental. In: XII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2008, Rio Claro. **Anais.** Rio Claro: UNESP, 2008.

BONI, K. T.; SAVIOLI, A. M. P. D. Contribuições para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v.8, n.17, p. 265-286, 2015.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COUTINHO, S. C. **Números inteiros e criptografia RSA.** Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 1997.

CRUZ, E. S. **A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental:** um estudo sob a ótica da organização praxeológica. 2005. 46 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. **SBEM**, Brasília, ano II, n. 2, p. 15-19, 1989.

DICK, A. P.; PALIOZA, L. H.; HAUSCHILD, C. A.; DULLIUS, M. M. Investigação Matemática: Uma metodologia para o Ensino Fundamental. **Destaques Acadêmicos**, Lajeado, v. 6, n. 4, p. 7-18, dez. 2014.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna:** volume único. São Paulo: Atual, 4.ed., 2003.

EVARISTO, J.; PERDIGÃO, E. **Introdução à Álgebra Abstrata.** Maceió: EDUFAL, 2002.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. C. de. **Tendências em educação matemática.** Palhoça: UnisulVirtual, 2.ed, 2005.

GROENWALD, C. G. O. Pensamento Aritmético, a Resolução de Problemas e o Processo de Ensino-Aprendizagem. In: X Encontro

Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. **Anais.** Salvador: SBEM, 2010.

HEFEZ, A. **Aritmética.** (Notas de aula PROFMAT). Rio de Janeiro: SBM, 2014.

LAUDARES, J. B.; LEITE, J. R. M. O Desenvolvimento do Pensamento Aritmético a Partir de Experiência Matemática. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, ano 16, n. 34, p. 52-61, nov. 2011.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.**São Paulo: Papirus, 1997.

MARTINEZ, F. B.; *et al*. **Teoria dos números:** um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Rio de Janeiro: IMPA, 2.ed, 2013.

MATTOS, S. R. P.; PUGGIAN, C.; LOZANO, A. R. G. Aritmética modular e suas possibilidades na formação continuada de professores de Matemática. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife. **Anais.** Recife: CIAEM, 2010.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepção & Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

POFFO, E. M. A resolução de problemas como metodologia de ensino: uma análise a partir das contribuições de Vygotsky. In: II Seminário em Resolução de Problemas, 2011, Rio Claro. **Anais.** Rio Claro: UNESP, 2011.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autentica, 2003.

SILVA, R. N. **Álgebra e Aritmética no Ensino Fundamental:** um estudo de como ensiná-las de forma integrada e com base em significados. 2007. 20 f. Trabalho de Conclusão de Curso

(Licenciatura em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2007.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 13, n. 14, pp. 66-91, 2000.

Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. **Banco de Questões da XXXI Olimpíada Brasileira de Matemática.** Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

Operações aritméticas fundamentais e seus desdobramentos no estudo de equações

Alexandre Maicher Neto[1]
Túlio Oliveira de Carvalho[2]

Introdução

Este trabalho vem trazer uma reflexão acerca de como o processo de ensino de matemática é condicionado pelas referências ou livros didáticos mais conhecidos e *utilizáveis* no contexto de sala de aula. Para tanto, vamos delimitar o tema às equações de primeiro e segundo graus.

As habilidades envolvidas na solução de equações podem ser qualificadas como instrumentais, no sentido de que, por exemplo, uma das habilidades cujo desenvolvimento a Matemática procura favorecer é aquela de articulação de argumentos, que contribuem para que o indivíduo seja capaz de tomar decisões em atividades cotidianas.

Uma das referências nas quais nos baseamos para o estudo da solução de equações é Caraça (2005), que explica o problema por meio das operações aritméticas elementares e do pensamento inverso em relação às mesmas. Por exemplo, ao responder qual o número que deve ser multiplicado a 3 para que o resultado seja 15, está-se formulando o problema inverso do multiplicativo, portanto envolvendo a operação de divisão.

As operações elementares são *quatro*: soma, multiplicação, subtração e divisão, nomeadas em ordem de dificuldade. Caraça

[1] Professor da Rede Estadual de Educação do Estado do Paraná. E-mail: alexandremaicherneto@gmail.com. https://orcid.org/0000-0002-8061-3645
[2] Professor do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina. E-mail: tuliocarvalho@uel.br. https://orcid.org/0000-0002-6344-2418

(2005) inclui ainda a potenciação (multiplicação de um número por si mesmo) e as inversas possíveis para o problema que relaciona três quantidades por meio da equação

$$a^n = b.$$

Estas operações são nomeadas *radiciação,* quando são dados b e n, e a *logaritmação,* quando são dados a e b. Ponderamos que Caraça considera apenas o problema de logaritmação em que a potência n seja um número natural positivo.

Estruturar o aprendizado de conjuntos numéricos a partir das operações elementares parece-nos uma abordagem interessante, em que pese o fato de que a inclusão da radiciação e logaritmação trazem a urgência e necessidade de caracterizar os números reais.

O trabalho aritmético com as quatro operações é comumente denominado *matemática básica*, nome que sugere facilidades. Sobre esta interpretação, apresentamos alguns contrapontos neste texto. Entretanto, coincidimos em atribuir a este trabalho o significado de *fundamental* por ser alicerce, e dar sustentação, a toda uma gama de conhecimentos. Nunca será demais revisitar estes temas estruturantes.

Uma boa pavimentação dos conceitos e propriedades operatórias é imprescindível para compreender corretamente outros conceitos no decorrer da vida escolar do indivíduo e consequentemente compreender a matemática como de fato ela é, uma ciência fundamentada em propriedades e teoremas que conectam uma rede de conteúdos, que podem ser instrumentais para tomadas de decisão.

Ao professor cabe a condução do processo de apresentar as propriedades fundamentais e problemas relacionados às operações aritméticas. Devemos lembrar que é a formação do professor que agora entra em cena e um dos objetivos deste texto é defender o ponto de vista que a insatisfação do mesmo com a sua formação é fundamental para a evolução deste processo.

Independentemente do nível de atuação de um professor devidamente licenciado, com a maturidade e autocrítica, é provável e natural que este já tenha se perguntado se sua atuação em sala de aula poderia ser *melhorada*, se aborda os temas como deveriam ser abordados, se estava "ensinando" da forma como se deve ensinar ou o fazendo de acordo com suas próprias experiências *limitadas*. Em que pese o fato de que cada professor, como indivíduo, carrega a própria experiência prévia em sua prática, chamamos a atenção neste trabalho para algumas atitudes que, a nosso ver, não seriam apropriadas para o ensino nos anos iniciais.

A indagação sobre a própria atuação pode ser perturbadora, pois se esse profissional tem a licença, muito provavelmente atende os requisitos necessários para desempenhar sua função. Certamente pode não haver nada de errado com a matemática da forma como é usada, uma matemática de forma resumida, com macetes e certos vícios pedagógicos, que a experiência ao longo de anos de estudo e trabalho proporciona.

Mizukami (2013) relata que os professores e futuros professores enfrentam diversas dificuldades durante o processo de formação, sendo uma delas o "aprender a ensinar", pois trazem consigo suas experiências enquanto estudantes, o que tem reflexo naquilo que pensam sobre o processo de ensino e aprendizagem. No entanto, essas experiências podem não ser suficientes para relacionar o *saber* com o *saber fazer*.

> "aprender a ensinar" requer que os futuros professores compreendam e pensem o ensino de maneiras diferentes daquelas que aprenderam a partir de suas próprias experiências como estudante. Mizukami (2013, p. 216)

Ao ensinar a matemática, o professor *conta uma história* que, não necessariamente, foi aquela que ouviu: as passagens operacionais que hoje ele percebe como relevantes no processo de ensino, por entender que contribuem a uma compreensão mais significativa, podem não ter sido outrora.

Precisamos pontuar que nosso objeto de estudo é o ensino da matemática para o público em idade escolar, para o qual há a preocupação e a necessidade de apresentar fundamentos sólidos que favoreçam as conexões entre os objetos do conhecimento da matemática. Por outro lado, sabemos que existem ambientes de aprendizado da matemática nos quais conhecer os fundamentos carece de importância, pois o que de fato se espera são macetes que aceleram os cálculos, o ensino de atalhos, porque em suma o objetivo é marcar a opção certa em um teste. Este é o caso de cursos preparatórios para concursos, onde acontece o esvaziamento da matemática em termos conceituais, e a ênfase reside em técnicas resolutivas, ao saber-fazer, para chegar a uma resposta, não sendo importante o que essa resposta representa.

Bodin (1989), ao examinar o problema da avaliação do conhecimento matemático, aborda esta questão relatando que a operacionalização dos objetivos pode favorecer o condicionamento. Os objetivos descrevem, em geral, um "saber-fazer" que pode, ou não, ser associado a um saber amplo o suficiente. No artigo, relata-se um exemplo no qual grande parte dos estudantes são capazes de resolver uma equação como $5x + 4 = 2x - 8$. Entretanto, ao ser perguntado em seguida se 5 é solução da mesma equação, os mesmos não teriam sido capazes de responder.

Os atalhos e macetes para resolução de questões padrão, podem ser denominados *vícios pedagógicos*. Estes estariam impregnados na prática pedagógica em sala de aula, pois o professor acaba reproduzindo a forma como aprendeu, seja essa experiência de aprendizado em ambiente acadêmico ou escolar. Deste modo, se o professor permanecer centrado exclusivamente na prática de procedimentos técnicos operatórios, ao invés de buscar saber os conceitos que permeiam as técnicas, e por consequência também o ensino dos mesmos, o conteúdo poderá permanecer esvaziado de significado.

Pesquisas relacionadas à psicologia da educação matemática apontam que esse deve ser um cuidado que o professor de matemática precisa ter com o objeto de conhecimento que ensina. Para que não seja um conhecimento de senso comum, é imprescindível que o professor conheça seu conteúdo com profundidade permitindo com isso estabelecer conexões com conhecimentos de domínio do estudante.

> A revisão da literatura mostra que as pesquisas centram-se, quase sempre, no aluno, deixando de lado a aprendizagem, a retenção, a re-estruturação cognitiva do professor, o conhecimento declarativo e de procedimentos que ele possui sobre o conteúdo que ensina. (Brito, 2005 p. 51)

Dentro dessa perspectiva, entendemos que o fundamental para o sucesso no processo de ensino e aprendizagem é conectar as habilidades básicas da matemática, desenvolvidas nas séries iniciais do ensino fundamental e a partir delas, incrementar novos saberes que são consequências daqueles já apropriados, estabelecendo assim a conexão de conhecimentos.

Olhando os Números

Seguindo Caraça (2005), fazemos um breve delineamento acerca dos objetos sobre os quais atuam as operações aritméticas: os números. Na referência citada, algumas reflexões interessantes são postas para a introdução gradual dos conjuntos numéricos. Estas reflexões seguem a construção histórica, começando do conjunto dos números naturais e alcançando o conjunto dos números complexos. Nesta obra, é interessante notar e destacar que os números inteiros negativos vão surgir como números somente depois de terem sido construídos os números racionais (positivos).

Dentro da perspectiva de reescrever para formar, vamos tratar de duas questões que consideramos críticas para o entendimento futuro da solução de equações, quais sejam, o conceito de número racional e o seu contraponto, o conceito de número irracional.

No desenvolvimento do estudo de equações, pode-se dizer que a concepção de número racional, posteriormente definido como número da forma $\frac{p}{q}$, com p inteiro e q um número natural diferente de zero, visa apresentar soluções para uma equação como $5x = 9$. Esta introdução é acompanhada da própria operação de divisão. É interessante pontuar que, a partir deste momento, as operações anteriores, notadamente a soma e a subtração, ganham novos contornos.

De fato, a soma de números racionais, adequada como extensão da soma de números inteiros, requer a regra operacional

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

que está muito longe de ser óbvia para o ensino fundamental. Para explicá-la, pode-se recorrer à noção de frações equivalentes, o que traz um obstáculo epistemológico de um só número passar a ter mais de uma *representação.*

Reconhecemos nesta etapa uma perda de referencial, um embaralhamento sobre as regras anteriores ou habituais, para o estudante que não compreender que a soma de números racionais coincide com a soma anterior, quando as parcelas são inteiras.

Já a introdução de números irracionais no ensino básico pode ser justificada pelo estudo de equações de grau dois. A solução do problema da medida da diagonal de um quadrado de lado 1 recai na determinação de um número positivo tal que $x^2 = 2$. Os exemplos de números irracionais no ensino médio contam-se nos dedos: $\pi, \sqrt{2}, e, \sqrt{3}$ se tanto.

Uma descrição adequada para estes números, adotada em Muniz Neto (2012) por exemplo, é considerar representações decimais infinitas que não se repetem. A concepção de representação decimal infinita pode ser construída a partir de um número racional (cujo denominador contenha um fator primo distinto dos fatores 2 e 5), para em seguida levar o estudante a conceber representações decimais sem repetições a partir de qualquer posição dos algarismos.

A compreensão de representações decimais já traz algumas dificuldades apontadas em Almouloud (2007), por exemplo, como dois números naturais separados por uma vírgula, que acarretam erros de localização ou ordenamento entre números.

Mencionando o mesmo problema da medida da diagonal do quadrado, Caraça (2005) introduz a definição de corte, concebida por Dedekind, nas palavras do mesmo.

Revela-se, independentemente da abordagem dos números reais um conflito de ideias, que podemos chamar *antinomia,* neste caminhar construtivo dos números, pois que ao finalmente dispormos do conjunto dos números reais, as operações aritméticas não serão mais postas em ato! Exemplificando: o que faria um aluno diante de um exercício de rotina como "Efetue $\sqrt{2}-\sqrt{3}$."?

Conceda-se que a potenciação vai ter comportamento adequado para apresentação aos estudantes de regras como $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, mas reconheçam-se tais regras como de natureza algébrica e não mais aritmética. Em termos curriculares, tais propriedades são vistas normalmente no 9º ano do ensino fundamental.

Carvalho (2024) reconhece que, na abordagem de questões do chamado Cálculo, os conjuntos numéricos merecem maior tempo de exposição do que o tempo que se poderia depreender avaliando a proporção de páginas dedicadas ao tema (ver, por exemplo, Guidorizzi (2018)). O professor de nível superior pode ser levado a assumir que as regras operacionais para números racionais são conhecidas pelos alunos que ingressam em cursos da área de exatas, o que poderia explicar o alarmante insucesso de tantos.

Fundamentalmente, é preciso destacar que as operações aritméticas estendidas aos números irracionais seriam potencialmente realizadas apenas usando aproximações racionais, tornando necessária o aporte do conceito de aproximação. Como ensina Caraça na terceira parte de sua obra citada, é preciso dar sentido à representação de números por séries e operar multiplicações e *divisões* entre as mesmas. Esta tarefa claramente extrapola o nível da educação básica.

Fazer notar que o tema de equações pode rapidamente tornar-se sombrio (por obscuro) foi o tema desta seção.

Abordagens para Equações

Voltando ao ensino fundamental, no sétimo ano, uma possibilidade de conexão de conhecimentos matemáticos, partindo de conhecimentos prévios já estabelecidos para agregar novos saberes, pode acontecer durante o processo de ensino das equações de primeiro grau. Tratamos de expor situações problema nas quais a forma de apresentar o assunto tem o cuidado de conectar saberes.

É importante destacar como esse tema, de forma velada, sem dizer que é uma equação, adaptado para a série e com os objetivos bem definidos, já é abordado na primeira fase do ensino fundamental, não exatamente como sendo uma equação onde o número desconhecido é representado por uma letra, e também sem classificar esse número como *incógnita*. Essa experiência acontece quando os estudantes são apresentados às operações básicas da matemática e às suas operações inversas, chamadas de prova real.

Faz parte dessa fase de ensino, depois de consolidadas as operações de adição e subtração individualmente, serem apresentadas atividades operatórias de adição e subtração onde, como no exemplo, há a falta de uma das parcelas da soma, representada por uma lacuna, $4 + \_\_ = 10$.

Por se tratar de uma parcela pequena pode ser que o estudante não pense ou não tenha a necessidade de efetuar a subtração, entretanto como sabemos, o encaminhamento do professor deve conduzir o estudante a estabelecer a relação da adição associando-a à sua operação inversa, ou seja efetuar a subtração entre a soma e a parcela conhecida, $10 - 4 = \_\_$. Nesta fase a ideia, de operação inversa é suficiente e ajustada para a compreensão do estudante e esse conhecimento será fundamental e necessário para o aluno quando for apresentado às equações de primeiro grau.

É interessante notar que o simples fato de relacionar essas ideias do início do ensino fundamental, com as equações do primeiro grau, traz a continuidade de estudo, a conexão daquilo que é do conhecimento do estudante, com a posterior representação algébrica para a lacuna, a incógnita e a inserção da ideia de equação para tal operação, $4 + x = 10$

Brito (2005) aponta que o uso do conhecimento anterior do estudante deve fazer parte das estratégias do professor como passo inicial, pois é essencial para motivá-lo para a aprendizagem e também para ajudá-lo a compreender as relações entre os temas da matemática escolar.

Deste modo, o professor precisa saber e apresentar essa relação, fazendo então a conexão do conhecimento estabelecido com o que está por vir, do contrário, sem estabelecer essa conexão a aprendizagem poderá ser lenta e ineficaz, pautada em regras e conteúdos que não se relacionam.

Apesar de recomendáveis, essas estratégias metodológicas de estabelecer pontes com algo já vivido pelo aluno (especialmente no próprio ambiente escolar), nem sempre são suficientes e alcançam o que se espera.

Um bom exemplo disso são as operações envolvendo números inteiros. Ao introduzir esse assunto tranquilamente faz-se as relações entre as medições de temperatura, ou de saldo bancário. Situações desse tipo permitem uma boa compreensão envolvendo a adição de números inteiros, no entanto esta contextualização não contribui para o entendimento operacional da multiplicação e divisão de inteiros.

A compreensão do que chamamos de regra de sinais, empregada nas multiplicações e divisões, sem dúvidas passa pelo processo aditivo e pode ser apoiado nele nessa abordagem, entretanto essa condição vai extrapolar a realidade do aluno e exigir dele a abstração para compreender por que-2 . (-3) = 6. Entendemos esta como uma regra de caráter algébrico, sendo melhor explicada a partir da interpretação da multiplicação por -1 como uma reflexão da reta em torno da origem.

Almouloud (2007), aponta que essa introdução dos números negativos a partir de escalas de temperatura e de extrato de conta bancária, permite ensinar a adição, mas constitui um obstáculo para o uso correto da regra de sinais para a multiplicação.

A depender da experiência do professor, uma encenação, uma história, sobre o que chamamos de regra de sinais, pode até convencer o aluno de um resultado, mas de modo geral o fundamento é inverso, pois as propriedades dificilmente são estudadas a partir de situações do cotidiano.

Por isso propomos um ensino fundamentado em conceitos e procedimentos que se justifiquem, contribuindo com a conexão de saberes da matemática, a nova informação sendo apoiada em argumentos matemáticos relativamente mais simples e do conhecimento do sujeito.

Para isso é imprescindível que as ideias das operações inversas sejam acomodadas e aperfeiçoadas dentro do conceito de equação, como no exemplo que segue, uma adição entre duas parcelas, onde uma delas e a soma são conhecidas.

Por exemplo, no momento em que apresentarmos a equação $4 + x = 10$, devemos imediatamente relacionar a equação com o conhecimento já apropriado do estudante, inclusive do ponto de vista estético 4 + __ = 10, pois remete a algo familiar e sem dúvidas já conecta os conhecimentos.

Na sequência é necessário relembrar os conceitos que envolvem as propriedades da adição, associando-as ao que chamamos de prova real, difundida no início do ensino fundamental e aplicar esse conhecimento prévio para resolver a equação, efetuando uma subtração. Desse modo estaremos partindo do conhecido e apresentaremos conceitos numa perspectiva nova, a ideia de igualdade, e portanto, essa subtração deve ser realizada nos dois membros da equação, preservando a igualdade:

$$4 + x = 10,$$
$$-4 + 4 + x = 10 - 4, \text{ donde}$$
$$x = 6.$$

Agora consideremos equações onde a incógnita e os termos conhecidos aparecem nos dois membros da equação, como por exemplo:

$$5x + 4 = 2x - 8.$$

Repare que utilizando o método conceitual podemos interferir em equações desse formato de mais de uma forma, podemos pensar em adicionar ou subtrair o termo que contém a incógnita, adicionar ou subtrair o termo conhecido ou os dois ao mesmo tempo. Vamos aqui subtrair $2x$ e 4 nos dois membros da equação:

$$-2x - 4 + 5x + 4 = 2x - 8 - 2x - 4, \text{ leva a}$$
$$3x = -12.$$

Nesta passagem da equação temos que o triplo de x é igual a – 12, desse modo, para calcular o quanto vale x será necessário usar a operação inversa da multiplicação, a divisão.

$$\frac{3x}{3} = \frac{-12}{3},$$
$$x = -4.$$

Essa forma de resolver as equações é uma excelente estratégia a ser utilizada quando nos deparamos com equações onde os coeficientes são números fracionários. Como já observamos, a habilidade de pensar e operar com números fracionários não é inata, é preciso um processo de convencimento para torná-la conhecida por cada aluno. Por outro lado, tais números estão presentes em boa parte da prática matemática e em algumas atividades profissionais onde medidas são dadas em frações, portanto precisamos de alternativas para apresentá-las. Considere a equação:

$$\frac{4}{5}x - 7 = 8 + \frac{x}{2}.$$

Embora formalmente esta apresente as mesmas características da anterior, os estudantes naturalmente incomodam-se quando se deparam com equações como essa. Se perguntados sobre o que os atrapalha, sem dúvidas a fração é a responsável. Entretanto, conduzindo a situação, indicando os passos para reconhecer que *neste caso* podemos tornar essas frações divisões exatas, resultando a incógnita em um número inteiro, isso chama a atenção dos alunos, pois eles já terão certa familiaridade com a classe de números inteiros.

O primeiro passo sugerido seria multiplicar os dois membros da equação por 5:

$$5.\left(\frac{4}{5}x - 7\right) = \left(8 + \frac{x}{2}\right).5,$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação obtêm-se:

$$\frac{20}{5}x - 35 = 40 + \frac{5x}{2}, \text{ ou}$$
$$4x - 35 = 40 + \frac{5x}{2}.$$

Percebendo isso, que a fração acabou resultando em um número inteiro, pode gerar no estudante uma quebra de barreira, no sentido de encorajá-lo a reinterpretar a equação inicial levando em consideração conceitos elementares de multiplicação e divisão dentro das equações.

Naturalmente poderá concluir que será razoável aplicar essa ideia com a outra fração, então multiplicando os dois membros da equação por 2 e aplicando a propriedade distributiva.

$$2.(4x-35)=\left(40+\frac{5x}{2}\right).2,$$
$$8x-70=80+5x.$$

Passamos a trabalhar com uma equação com números inteiros, algo bem mais confortável, onde as estratégias já farão parte do arcabouço operatório deles pois foram apresentadas anteriormente. Aplicando as operações convenientemente obtemos a solução igual a 50.

Essa abordagem aplica-se também no caso das constantes estarem na forma de razão e nos dois casos, proporciona ao estudante uma experiência diferente uma vez que geralmente dividimos algo já pronto, no entanto aqui vamos preparar o dividendo, convenientemente, para efetuarmos a divisão de modo que essa divisão resulte em número inteiro, oferecendo mais uma oportunidade de apresentar as operações inversas.

Operar com frações é inclusive oportunidade de argumentar com os estudantes que muitas vezes é até melhor trabalhar com números fracionários do que com decimais oriundos de frações que originam dizimas periódicas.

Equações de segundo grau também estão presentes nesse período de escolarização, as equações da forma $ax^2+c=0$, são abordadas dentro do conceito de área do quadrado, onde a área A do quadrado é dada pelo produto de suas dimensões l, um produto de dois fatores iguais, sendo A e l pertencentes ao reais positivos.

$$A=l.l=l^2.$$

Desse modo, tendo a medida do lado calculamos a medida da área efetuando uma potenciação.

Se tivermos a medida da área podemos encontrar a medida do lado do quadrado, fazendo o caminho inverso da potenciação quadrada, a radiciação:

$$\sqrt{A}=\sqrt{l^2}.$$

Fazendo uso da fatoração para encontrar uma potência de base dois ou um produto de potências de expoente dois, bem como das propriedades da potenciação, concluímos que a medida do lado do quadrado é a raiz quadrada positiva da medida da área do quadrado:

$$l = \sqrt{A}.$$

Neste contexto de área do quadrado abre a oportunidade de conectar duas operações importantes que são íntimas de um dos polígonos mais elementares, o quadrado.

Do mesmo modo podemos estender essa proposta resolutiva as demais formas de apresentação de equações quadráticas, as formas $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$, também usando as propriedades operacionais básicas, mais uma vez oferecendo a oportunidade de conexão entre conceitos de domínio do aluno, aplicando-as em um novo conhecimento, potencializando suas aplicações.

Para estes casos, além da potenciação e radiciação, utilizamos a fatoração do polinômio que compõe a equação, a fim de obtermos uma multiplicação, quando poderemos aplicar as propriedades pertencentes a multiplicação. Esse conceito converge com a técnica de completar quadrados, tendo como objetivo reduzir o grau da equação de dois para um, fazendo uso do suporte geométrico do quadrado, das operações e suas inversas.

Como proposta de aplicação envolvendo equações de segundo grau, faremos uso de duas situações problema presente em Maicher Neto (2021).

1) A construção de quatro imóveis ocupará uma área total de 112 m². Cada um deles terá o formato retangular de modo que o lado maior terá três metros a mais que o lado menor. Sabendo que os quatro imóveis possuem a mesma área, calcule as dimensões de cada um.

Possível solução:

Sendo os quatro imóveis todos iguais, cada um deles terá área de 28m², e suas dimensões ficam representadas por x e *x+3.*

Em se tratando das dimensões do retângulo, vamos considerar apenas as soluções positivas uma vez que não faz sentido termos uma medida de comprimento negativa. Expressando a situação obteremos a seguinte equação, note que a própria escrita para o cálculo da área do retângulo é uma forma fatorada de equação de segundo grau.

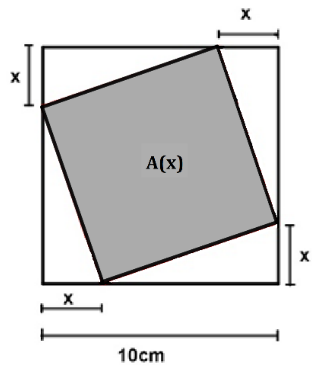
$$x.(x+3) = 28$$

Embora essa equação possa ser expressa da forma $x^2 + 3x = 28$ ou $x^2 + 3x - 28 = 0$, entendemos ser conveniente conservar a escrita na forma multiplicativa, uma vez que pretendemos explorar o conceito operatório da multiplicação, presente no argumento para calcular a área do retângulo, onde esses fatores são as dimensões do imóvel, ou seja, uma multiplicação de dois fatores que resulta em 28.

Fazendo uma inspeção pode-se concluir que o número positivo, multiplicado por outro também positivo, três unidades maior que o primeiro e que resulta em 28 é o número 4. Desse modo as dimensões de cada imóvel são 4 metros de comprimento e 7 metros de largura.

Existem outras formas de pensar nesta questão. Esta maneira de expor pode ser vista como introdutória, porque é uma possibilidade de apresentá-la sem mesmo se falar em equação de segundo grau.

2) Em um quadrado cujo lado mede 10 cm, está inscrito um outro quadrado de área A(x), conforme a figura.



Fonte: ENA 2015 www.profmat-sbm.org.br

Qual é a medida de x se A(x) mede 50 cm²?

Possível solução:

Para calcularmos a medida x, que compõe a medida do quadrado de lado 10cm, precisaremos relacionar a área do quadrado de área *A(x)* com a medida de seu lado, que chamaremos de l, para isso é necessário concluir que a medida do lado deste quadrado, coincide com a hipotenusa dos quatro triângulos, que são congruentes, que completam a figura para compor o quadrado maior.

Como definimos que o quadrado tem lado l, o triângulo retângulo terá sua hipotenusa medindo l, uma vez que coincidem e os catetos medindo $(10 - x)$ e x. Aplicando o teorema de Pitágoras obteremos a seguinte equação:

$$l^2 = (10 - x)^2 + x^2 \text{ , ou}$$
$$l^2 = 2x^2 - 20x + 100.$$

Fazendo uso da informação de que a área do quadrado é igual a 50cm², e fazendo uso da definição de que a área do quadrado é igual a medida do lado elevado ao quadrado teremos:

$$2x^2 - 20x + 100 = 50$$

Subtraindo 50 dos dois lados da equação teremos:

$$2x^2 - 20x + 50 = 0$$

Dividindo os dois lados da equação por 2 teremos:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Obtemos uma equação de segundo grau cujo primeiro membro compõe um quadrado perfeito de lado $(x - 5)$, ou seja, $(x - 5).(x - 5)$ é a forma fatorada da equação obtida, desse modo podemos mais uma vez usar o argumento da área do quadrado para determinar a raiz positiva dessa equação e determinar a medida x perguntada.

$$(x - 5)^2 = 0$$

Nesta situação também podemos abordar duas maneiras para resolver a equação, trabalhar o conceito de operação inversa da potenciação, fazendo a pergunta: quais os números cujo quadrado é zero? Ao aplicar a raiz quadrada dos dois lados da igualdade, o que nos parece mais conveniente, reduzimos o problema a uma equação do primeiro grau onde o conceito de operação inversa será necessário para sua solução.

$$\sqrt{(x - 5)} = \sqrt{0}$$
$$x - 5 = 0$$

Entretanto também podemos explorar as propriedades da multiplicação, escrevendo o termo da esquerda na forma fatorada e usar o fato de se ter uma multiplicação que tem como resultado o zero.

$$(x - 5).(x - 5) = 0$$

Nas duas condições o único número real que satisfaz a igualdade é 5.

Estabelecer essa conexão gradativa e progressiva de conceitos operatórios, consolidando-os numericamente ao longo do início do ensino fundamental, associando as diversas operações com suas inversas, sobretudo no conjunto dos números naturais, vai contribuir para que o estudante estabeleça essa sequência lógica da matemática, perceba a conectividade e reconheça nesta transição a sutileza dos conceitos iniciais sendo aplicado para estabelecer novos conceitos dentro da matemática.

Nesta perspectiva, entendemos que é necessário que os profissionais da disciplina façam essa conexão, oportunizando a continuidade de estudo, conectando o operatório aritmético com o operatório algébrico, uma vez que se trata da mesma matemática.

Deve-se cuidar para que o aluno não pense que as soluções das equações serão sempre números naturais (ou inteiros), pois isto seria também um vício pedagógico acarretado pela indução e uso de exemplos que fazem uma ponte com conhecimentos já adquiridos.

A introdução ao tema equações se dá no sétimo ano, e como sabemos da própria memória, alguns vícios pedagógicos podem ser cometidos quando não abordamos o tema da forma que deveríamos, quando da necessidade das manipulações algébricas para determinar a raiz de uma equação.

Descrever as manipulações na forma *"passar para o outro lado da igualdade com o sinal trocado"*, *"se de um lado está multiplicando passa para outro lado dividindo"* são exemplos de expressões a serem evitadas, pois não contribuem para a compreensão da matemática, e pior ainda, trazem a mensagem de novas regras a serem decoradas.

Abordagens desconectadas como essas, sobretudo nas primeiras experiências do sujeito com o estudo das equações, ainda no sétimo ano, colocam um obstáculo conceitual para compreender a essência das operações aritméticas. Posteriormente, em um outro ano, oitavo ou nono por exemplo, se outro professor apresentar a matemática que de fato acontece, somar, subtrair, multiplicar e dividir dos dois lados da equação, encontramos certa resistência de uma parcela de alunos, sobretudo daqueles que já dominaram a técnica do "passa para o outro lado com o sinal trocado", em adotar a forma conceitual para resolver as equações.

Os cálculos mentais abreviados seriam construções que os próprios estudantes precisam arquitetar, antecipando as operações que serão efetuadas, e eles conseguem utilizá-las após a realização de vários problemas com essa natureza. Essa atitude coincide com uma teoria chamada de arquitetura de operações.

Segundo Lins e Gimenez, (2005) a arquitetura implica o desenvolvimento da aplicação de projetos ou estruturas conceituais e procedimentais complexas que somente podem surgir do trabalho de reflexão e teorização com base em produções dos próprios estudantes.

Utilizando o conceito das operações inversas os estudantes gradativamente compreendem a relação entre elas no contexto das equações com o conceito operatório aritmético e levam isso para as séries seguintes. Lançar mão de instrumentos tecnológicos também pode favorecer o aprendizado: por exemplo, a balança de dois pratos é uma excelente ferramenta para introduzir o trabalho com as equações e consequentemente contribuir para a consolidação desse conceito.

Resultados Esperados

Esse trabalho é fruto da reflexão sobre nossa prática de sala de aula, sobre a necessidade do cuidado de antecipar as consequências do tratamento de cada conteúdo, especialmente o aqui exposto, que constitui uma ligação entre aritmética e álgebra na matemática básica. Sabemos que uma metodologia que não enfatiza as propriedades operacionais básicas gera obstáculos importantes e difíceis de serem superados nos estágios posteriores de ensino, como o ensino médio e superior. Em resumo, deve-se saber antecipadamente um pouco mais do que pretende ensinar.

As generalizações podem ser consideradas um refinamento matemático, principalmente no ensino fundamental, desse modo, os estudantes que tiverem os conceitos de operações inversas bem consolidados no nível numérico, farão a transição para situações algébricas com mais confiança e consequentemente conseguirão conectar a matemática numérica com a algébrica, percebendo a unidade dos conceitos.

> Entende-se como *generalização matemática* a fixação de um modelo, obtido a partir da percepção da regularidade apresentada numérica ou algebricamente, podendo ser sintetizada afim de gerar uma expressão ou uma fórmula, que servirá como algoritmo para resolver casos análogos (Maicher Neto, 2021 p. 10).

Com isso entendemos que as operações algébricas terão maior fluidez se o estudante for exposto a situações em que demande o cálculo algébrico e consequentemente a generalização. Há várias oportunidades de generalização no ensino fundamental, como por exemplo: na dedução da lei dos cossenos, que generaliza o teorema de Pitágoras, e na fórmula resolutiva da equação de segundo grau.

No interior deste conjunto de saberes, a similaridade, a estreita relação entre os cálculos numéricos e os algébricos nos anos iniciais, vão contribuir para a sequência da vida escolar dos estudantes, uma vez que o aluno se depare com situações onde será preciso a generalização de situações presentes em contextos diversos, como nas funções, na geometria e nas sequências por exemplo. Esses conhecimentos são também necessários para investigar situações que têm as generalizações como objetivo, pois materializam-se como uma ferramenta matemática.

Desse modo entendemos ser de fundamental importância a ênfase nos conceitos matemáticos, retomar uma prática pedagógica em que o professor conecte essas operações mostrando as afinidades e dependências umas das outras, e simultaneamente, relacioná-las algebricamente, abrindo portas para a melhor compreensão da matemática que pratica.

Referências

ALMOULOUD, S. A., **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, (2007)

BODIN, A., L'évaluation du savoir mathématique. **Bulletin de l'APMEP**, n. 368, (1989) BRITO, M. R. F., Psicologia da Educação Matemática: **Teoria e Pesquisa**. Florianópolis: Insular, (2005)

CARAÇA, B. J., **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Ed. Gradiva, Lisboa, (2005)

CARVALHO, T.O., **Dez Problemas de Cálculo**. Notas de Aula em pdf. 75f. Londrina, (2024)

GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**. Vol. 1, 7ª ed., LTC, Rio de Janeiro (2018)

LINS, R. C., GIMENEZ, J., **Perspectivas em Aritmética e Álgebra Para o Século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 7ª edição, (2006)

MAICHER NETO, A., O tema de equações do segundo grau como espaço para a generalização. **Dissertação Mestrado em Matemática em Rede Nacional**. Universidade Estadual de Londrina. Londrina (2021)

MUNIZ NETO, A. C., **Tópicos de Matemática Elementar**: números reais. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, SBM, (2012)

MIZUKAMI, M. G. N., **Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contextos e práticas pedagógicas**. In: NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (org.). A Formação do Professor que Ensina Matemática: perspectivas e pesquisas: 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, (2013)

Escrever sobre matemática, trazendo reflexões sobre seu ensino, detendo-se nas riquezas dos detalhes: esta é uma mensagem deste caderno produzido a partir de uma seleção das orientações do Mestrado Profmat da Universidade Estadual de Londrina. O convite ao pensar sobre a prática reconstruindo as visões sobre os temas curriculares é necessário e atual.

Pedro & João Editores

pedroejoaoeditores.com.br

ISBN 978-65-265-1365-1

9 786526 513651