FRACTAIS:
Uma Introdução

Mailson Alves Farias

Pedro & João editores

Mailson Alves Farias

FRACTAIS: Uma Introdução

Pedro & João editores

Mailson Alves Farias

Fractais: uma introdução. São Carlos: Pedro & João Editores, 2024. 51p. 16 x 23 cm.

ISBN: 978-65-265-1542-6 [Digital]

1. Educação. 2. Ciências exatas. 3. Matemática. 4. Autor. I. Título.

CDD – 370/510

Capa: Rômulo Dantas; Wilder Santana
Ficha Catalográfica: Hélio Márcio Pajeú – CRB - 8-8828
Revisão: Wilder Kleber Fernandes de Santana; Rômulo Dantas
Diagramação: Rômulo Dantas; Wilder Kleber Fernandes de Santana
Editores: Pedro Amaro de Moura Brito & João Rodrigo de Moura Brito

Pedro & João Editores
www.pedroejoaoeditores.com.br
13568-878 – São Carlos – SP
2024

DADOS DO AUTOR

Mailson Alves Farias possui Graduação – Licenciatura - em Ciências, com Habilitação em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (2006). Especialização em Fundamentos da Educação: Práticas Pedagógicas Interdisciplinares (2019] e Mestrado em Matemática - PROFMAT UFPB (2020). Tem experiência na área de Matemática, atuando como professor há mais de vinte anos na área de Matemática no ensino básico, com projetos e pesquisas que abordam principalmente os seguintes temas: educação matemática, educação, tablet educacional, TDIC (tecnologia digital da informação e da comunicação), estatística e geometria.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por Sua proteção e fortalecimento da minha vida, me conduzindo nessa estrada que me traz a paz e a felicidade.

Aos meus pais, por estarem incondicionalmente ao meu lado e, por me ensinarem a ser o que sou.

À minha amada esposa Jussara, por partilhar cada segundo do meu dia e por abraçar os meus sonhos sempre ao meu lado.

Às minhas irmãs Suilan e Suilane e, aos meus sobrinhos, pela paciência e apoio durante todo o tempo que me afastei na realização desse estudo.

Aos meus professores, por toda a educação e pelos momentos de ensinamentos, que me fizeram crescer continuamente, com caráter e humildade, acima de tudo.

À minha orientadora, Profa. Miriam, por toda dedicação, incentivo, orientação, contribuição e paciência ao longo da construção deste trabalho.

Aos professores Flank Bezerra e Nivaldo Júnior, por terem aceitado o convite para a banca examinadora.

Aos professores Bruno, Elisandra e Eduardo, por todos os incentivos, que me fizeram continuar, para conquistar mais essa vitória.

Aos amigos de graduação, os quais tive o prazer de reencontrá-los atuando como professores desta honrada instituição, Prof. Joedson e Manassés, os quais admiro e respeito, por cada momento partilhado nos estudos e por cada conselho recebido, serei eternamente grato.

Aos meus amigos, Erielson, Rafael e Rômulo que, muitas vezes cederam seus preciosos tempos de descanso para me ajudarem e me incentivarem a construção deste trabalho e a conquista deste objetivo.

Aos amigos do PROFMAT, Diego Lima, José Carlos Junior, com os quais retomei a jornada e o gosto pelo estudo e, aos amigos Jucélio, Glauco e João Batista Meireles por cada momento partilhado ao longo dessa jornada e, a todos os demais amigos do curso que, com amor e respeito posso dizer, se tornaram parte direta dessa realização. Por fim, a todos os meus familiares e amigos que, de forma direta ou indireta, estiveram ao meu lado, torcendo por essa conquista.

Por cada obstáculo superado, através da força e apoio que cada um de vocês me proporcionaram, gratidão eterna a todos!

APRESENTAÇÃO

Neste trabalho, estudamos a Geometria Fractal, caracterizando alguns fractais clássicos e apresentando alguns aspectos históricos relacionados à esta teoria. Além disso, queremos destacar que a Geometria Fractal permite observar uma interessante conexão entre a construção de elementos matemáticos e alguns objetos presentes na natureza. Um aspecto interessante e que alguns conceitos relacionados já podem ser abordados no Ensino Fundamental e Médio.

A Geometria Fractal é uma área fascinante da matemática que estuda objetos geométricos complexos que apresentam uma estrutura auto-semelhante em diferentes escalas. Neste trabalho, ao caracterizar alguns fractais clássicos, como o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski, destaca-se não apenas a beleza matemática desses objetos, mas também sua aplicabilidade em descrever formas encontradas na natureza, como montanhas, árvores, nuvens e costas litorâneas.

Historicamente, a Geometria Fractal ganhou visibilidade com o matemático Benoît Mandelbrot, que cunhou o termo "fractal" na década de 1970. A partir de então, o estudo dessa geometria se expandiu, mostrando que muitos fenômenos naturais e padrões que antes pareciam caóticos podiam ser explicados por meio de leis fractais.

Um aspecto relevante do estudo da Geometria Fractal é a sua aplicabilidade no ensino básico, especialmente nos níveis Fundamental e Médio. Certos conceitos fundamentais, como a auto-semelhança e o conceito de iteração, podem ser abordados por meio de exemplos visuais e dinâmicos que despertam o interesse dos alunos. A introdução à Geometria Fractal pode ocorrer, por exemplo, quando se estudam as funções matemáticas, sequências ou progressões geométricas, oferecendo aos estudantes uma maneira intuitiva de explorar padrões complexos com regras simples.

Além disso, queremos destacar que o ensino de fractais pode também enriquecer o aprendizado ao conectar a matemática com a realidade cotidiana. Ao observar a natureza, os alunos podem perceber como formas fractais aparecem em estruturas naturais, como galhos de árvores ou flocos de neve, oferecendo uma ponte entre o abstrato e o concreto.

Essa abordagem pode ajudar a desenvolver o pensamento crítico e a criatividade nos alunos, que passam a ver a matemática não como uma ciência distante, mas como uma ferramenta poderosa para compreender o mundo ao seu redor.

Assim, o estudo da Geometria Fractal não só amplia o saber matemático, mas também estabelece relações interdisciplinares entre a matemática e outros campos de saber, como a biologia e a física, evidenciando que os padrões naturais frequentemente seguem lógicas geométricas profundas. Ao incorporar no currículo escolar conceitos de fractais, podemos estimular o interesse dos alunos e proporcionar uma visão inovadora e visualmente apelativa da matemática.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 8

CAPÍTULO 1- CONCEITOS BÁSICOS 10

Mailson Alves farias, 2024 10

CAPÍTULO 2 - GEOMETRIA EUCLIDIANA E A GEOMETRIA FRACTAL: SEUS ASPECTOS RELEVANTES 25

Mailson Alves farias, 2024 25

REFERÊNCIAS 50

INTRODUÇÃO

Há muito tempo, os estudos e análises de situações vividas no cotidiano tem se desenvolvido através de observações e padrões apresentados e relacionados, muitas vezes, com aspectos relevantes da Matemática.

Seja por meio da abstração dos teoremas ou proposições, ou por meio das representações geométricas conectando a teoria com a realidade, podemos fazer conexões e entender a diversidade de fatos e coisas que existem em nosso planeta. Diante de situações como essas, o homem começou a ampliar o seu conhecimento e, através da observação, passou a identificar outros elementos, além daqueles já presentes na geometria euclidiana, introduzindo no século XIX uma nova teoria.

A geometria fractal foi desenvolvida com a intenção de justificar, através da repetição de padrões em figuras e objetos, as relações existentes em figuras e formas que antes não apresentavam os padrões das figuras da Geometria de Euclides, como por exemplo, a couve-flor, os relâmpagos, as ramificações de uma árvore, montanhas, entre outras formas encontradas na natureza.

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um breve histórico da geometria fractal, a classificação, características, construções e propriedades pertinentes a alguns fractais clássicos, bem como o cálculo da sua dimensão. Assim, estruturamos o trabalho em quatro cap´ıtulos que foram divididos da seguinte forma:

No *Capítulo* 1, apresentamos, inicialmente, o infinito nas obras de Escher e alguns tópicos básicos de matemática, como as Progressões Geométricas e os Logaritmos, algumas noções da topologia, com o intuito de apresentar uma base matemática para os conceitos desenvolvidos nos demais cap´ıtulos.

O *Capítulo* 2 é dedicado a um breve histórico da geometria de Euclides à Mandel-brot com o surgimento da geometria dos fractais, bem como a sua relevância para o desenvolvimento da ciência e das tecnologias.

CAPÍTULO 1-
CONCEITOS BÁSICOS

Mailson Alves Farias

CAPÍTULO 1- CONCEITOS BÁSICOS

Mailson Alves farias, 2024

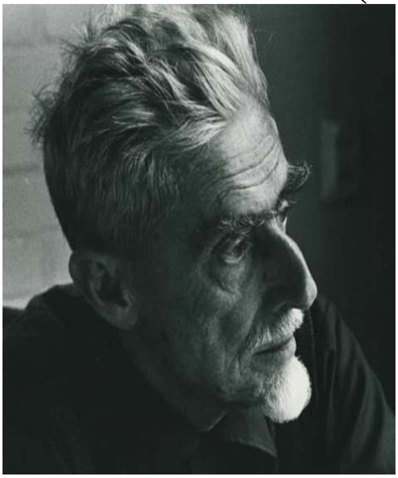
Neste capítulo, apresentamos definições e teoremas necessários para a compreensão do trabalho, com o intuito de desenvolver uma abordagem sobre a geometria de fractais. Para tanto, utilizamos as seguintes referências: [3], [4], [8], [9], [10], [11], [12] e [13].

O infinito nas obras de Escher

Em muitas obras de arte, é possível perceber a relação existente entre as técnicas utilizadas e os traços que nos remetem a conceitos relevantes da Matemática. Podemos citar, por exemplo, a geometria das figuras planas ou espaciais presentes em quadros e pinturas de variados artistas.

Mauritus Cornellis Escher (Figura 1.1) é um artista que quando analisamos suas obras encontramos uma estética impecável e desenvolvida, sobretudo, por meio de três técnicas peculiares: xilografia[1], litografia[2] e meio-tom, obtidas por matrizes que servem como uma espécie de carimbo para papéis e tecidos especiais, sendo que as duas primeiras constituem a maior parte de seu acervo art´ıstico.

Figura 1.1: Mauritus Cornellis Escher (1898-1972)



Fonte: @M.C.EscherPage (2014, p. 1)

Podemos perceber, em algumas das suas obras, que,

> Escher era um gênio da imaginação lúdica e um artesão habilidoso nas artes gráficas, mas a chave para muitos dos seus efeitos surpreendentes é a Ma- temática. Não a Matemática dos números e das fórmulas, mas a Geometria em todos os seus aspectos. Escher podia imaginar os efeitos fantásticos, mas a Geometria era uma ferramenta necessária para capturar esses efeitos. (TJABBES, 2010, p.9)

Escher criou estruturas impossíveis, em sintonia com a arte contemporânea, desenvolveu um novo campo de inspiração na inevitável contradição entre a bidimensionalidade do papel ou da tela e a realidade tridimensional.

Através desta percepção, ele desconstrói a previsibilidade nos desenhos, acrescentando movimentos de translação, rotação e reflexão, ou seja, transformações isométricas[4] dando movimentos a figura no espaço.

Existem relatos de que o trabalho de Escher pode ser analisado e relacionado ao infinito, por meio de três características: Ciclos Sem Fim, Preenchimento de Superfícies e Limites.

Intuitivamente, podemos compreender o significado de Ciclo como a ocorrência de fatos ou ações de caráter periódico, a representação de um processo que não termina, deixando implícito neste significado a noção de infinito. Escher ilustrou os ciclos através de suas obras:

Queda d'Água e, subindo e descendo que podem ser vistas nas Figuras 1.2 e 1.3 (próximas páginas):

Feita em litografia, a Figura 1.3, é outra figura que nos remete a observação de algo impossível, já que, nesse caso, alguns cavaleiros estão subindo ou descendo, sempre, numa escada sem fim. Esta arte, inspirou a construção de ilusões de óticas em diversas obras, como por exemplo no filme “A Origem”lançado em 2010, em que uma das cenas está representada na Figura 1.4.

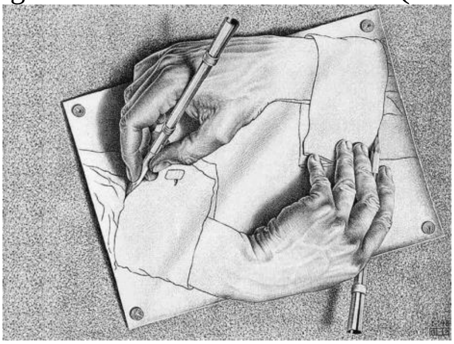
Figura 1.2: Cena do Filme ”A Origem”(2010)

Fonte:[22], (2018, p.1)[5]

Nessas obras, a impressão que temos é de que as imagens estão sempre numa continuidade infinita, caracterizando os traços marcantes de uma das técnicas utilizadas por Escher, o ciclo sem fim.

Continuando a observação das obras de Escher, em relação à écnica de preenchimento de superfícies, podemos destacar a existência de algo estático mas, que nos causa a impressão de movimento, tendo em vista que há uma transformação do plano para espaço e de espaço para plano, numa interação entre os objetos bidimensionais e tridimensionais existentes nas figuras. Em relação a isso, destacamos a obra: Mãos Desenhando-se (Figura 1.5), em que é retratada uma folha de papel onde há pulsos que permanecem no plano da folha, enquanto duas mãos estão em ascensão de forma tridimensional, de frente uma para a outra e numa ação controversa ambas se desenham, usando o recurso de uma dobradura nos cantos.

Figura 1.3: Mãos Desenhando-se (1948)



Fonte: [4], (1994, p. 69)

As ideias de contradição são frequentemente utilizadas nas obras de Escher, tendo nesta obra um dos seus exemplos mais notórios. Note que, transformar uma parte unidimensional em uma parte tridimensional é realmente fascinante, o detalhe das linhas se apresentam de tal forma que é realmente difícil imaginar como ele conseguiu fazê-las parecer tão naturais e realistas.

Outro elemento da técnica de preenchimento de superfícies, utilizado por Escher, está representado na obra *Répteis* (Figura 1.4). Nesta obra foi usado um efeito contínuo de rotações e translações que nos deixa a impressão dos répteis estarem saindo e entrando continuamente na folha de papel.

Figura 1.4: Répteis (1943)

Fonte: [4], (1994, p. 28)

Nesta imagem, podemos ver um livro de esboços de desenhos, três tipos de mosaicos com a forma de lagartos em fila, que se dirigem para um dodecaedro pentagonal, causando a impressão de um movimento contínuo em que pode ser destacado o preenchimento da superfície.

Com relação à obra de Escher relacionada aos Limites, podemos perceber uma tentativa do autor em transmitir a ideia de infinito, considerando, além das translações isométricas, as semelhanças entre os desenhos, que diminuem sucessivamente, preenchendo o plano até o limite permitido pelo campo visual. Para exemplificar essa fase das obras de Escher podemos observar a figura 1.5, onde esta reproduzida a obra chamada de, cada vez menor.

Figura 1.5: Cada vez menor (1956)

Fonte: [4], (1994, p. 20)

Podemos, num primeiro momento, olhar a Figura 1.7 apenas como um mosaico como intuito de decoração. No entanto, com um pouco mais de atenção, o que fica notório e que a figura demonstra um padrão determinado pelas formas que, gradativamente tem o seu tamanho ampliado da parte central para as bordas da figura, variando a forma dos limites apresentados, sendo infinitamente grande ou infinitamente pequenoa partir de um ponto central.

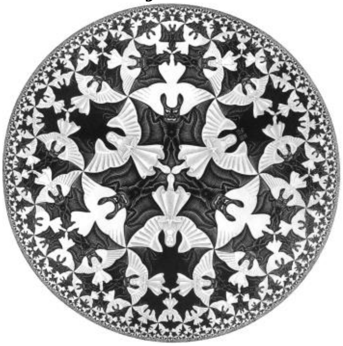
Um fato semelhante pode ser observado na obra Limite Circular III (Figura 1.6), onde é possível detectar semicírculos de cor branca se intersectando e dividindo a figura, em proporções correspondentes, de modo que, em cada uma das proporções formadas, a ideia transmitida é de que a infinidade de traços presentes nos deixam a impressão de limites máximos ou mínimos apresentados pelos peixes inseridos na figura, delimitado pelo trajeto de todas as fileiras formadas.

Figura 1.6: Limite Circular III (1959)

Fonte: [4], (1994, p. 24)

É possível observar ainda, que Escher utilizou quatro cores diferentes para representar os peixes da figura, contribuindo ainda mais para a distinção de cada uma das fileiras, o que provoca em nossa percepção, o sentido de que a redução da figura é feita da parte central para as extremidades, deixando a impressão de que as fronteiras nesta figura são inatingíveis. Podemos associar estes e muitos outros trabalhos de Escher com a divisão do plano regular à teoria dos fractais, tema do nosso trabalho. Podemos, informalmente, definir um fractal como um objeto geométrico que pode ser multiplicado infinitamente em partes menores, cada uma delas semelhante ao objeto original. É possível perceberisso, por exemplo, na obra Anjos e Demônios (Figura 1.7).

Figura 1.9: Anjos e Demônios (1941)



Fonte: [4], (1994, p. 25)

NOÇÕES PRELIMINARES

Definição 1.1. Uma sequência de números reais ´e uma função f : N → R, definida no conjunto N = {1, 2, 3, 4, · · · } dos números naturais e tomando valores no conjunto R dos números reais. O valor f(n) será representado por an, para todo n ∈ N e chamado o termo geral, ou *n*-ésimo termo da sequência.
Observação 1.1. Usaremos ainda a notação {an} para indicar o conjunto de valores da sequência. Essa distinção ´e importante, pois uma sequência pode possuir infinitos elementos, mesmo que seu conjunto de valores seja finito.
Exemplo 1.1. A sequência 1, −1, 1, −1, 1, −1, · · · ´e infinita, cujo *n*-ésimo termo é igual a an = (−1) n−1.

É importante observar que, de acordo com a Definição 1.1, o primeiro índice de uma sequência an é n = 1, ou seja, a1 ´e o primeiro termo da sequência. Por outro lado, podemos observar que a sequência an = 1 √ n − 3 só faz sentido para n = 4, 5, · · · de modo que seu primeiro termo é a4, mas não podemos pensar que isso seja um obstáculo, já que podemos fazer uma translação de ´índices de forma que o primeiro termo da sequência tenha ´índice n = 1. De fato, definindo a sequência por bn = an+4 = 1 √ n, a sequência fica definida a partir de n = 1.

Seja (an) uma sequência. Dizemos que (an) ´e crescente se a1 < a2 < a3 < · · · < an < · · · , ou seja, se an < an+1. Por outro lado, se a1 > a2 > a3 > · · · > an > · · · , ou seja, se an < an+1 dizemos que a sequência ´e decrescente e, ainda, a sequência (an) ´e dita não-crescente se a1 ≤ a2 ≤ a3 ≤ · · · ≤ an ≤ · · · e não-decrescente se a1 ≥ a2 ≥ a3 ≥ · · · ≥ an ≥ · · · .

Se uma sequência satisfaz qualquer uma dessas condições ela é dita monótona. Uma sequência (an) é dita limitada superiormente se existir um número real θ tal que, para todo número natural n, temos an ≤ θ. De maneira análoga dizemos que uma sequência (an) ´e limitada inferiormente se existir um número real α tal que, para todo número natural n, temos an ≥ α. Se existirem reais α e θ tais que, para todo número natural n, temos, α ≤ an ≤ θ dizemos que an ´e uma sequência limitada.

Diante disso, podemos perceber que uma sequência é limitada se, e somente se, ela ´e limitada superiormente e inferiormente. Em outras palavras, uma sequência é limitada se todos os seus termos pertencem ao intervalo [α, θ]. E interessante perceber que algumas sequências Matemáticas apresentam uma certa regra, isto ´e, uma lei de formação, capaz de caracterizá-las através de um determinado padrão. Um exemplo disso são as Progressões Geométricas que podem ser determinadas a partir de uma fórmula de recorrência.

Definição 1.2. Dada uma sequência finita (a1, a2, ..., an, ...) chamamos de Progressão Geométrica a sequência em que cada termo an, a partir do segundo termo, ´e igual ao produto do termo anterior por uma constante real q, chamada de razão da progressão geométrica, isto ´e, an = an−1q, n > 1. Podemos determinar uma expressão que nos possibilite obter um termo qualquer da Progressão Geométrica conhecendo o primeiro termo a1 e a razão q. Segue da definição de Progressão Geométrica de razão q, admitindo a1 6= 0 e q 6= 0 que

$$
\begin{aligned}
&a2 = a1q\\
&a3 = a2q = a1qq = a1q^{2}\\
&a4 = a3q = a1q\ 2\ q = a1q^{3}\\
&a5 = a4q = a1q\ 3\ q = a1q^{4}\\
&.\\
&.\\
&.\\
&an = an-1q = a1q\ n-2\ q = a1q^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Assim, a expressão

“an = a1q $^{n-1}$”

É chamada de Fórmula do Termo Geral da Progressão Geométrica. Esta fórmula nos permite conhecer qualquer termo da progressão Geométrica em função do primeiro termo a1 e da razão q.

Definição 1.3. Seja $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ uma Progressão Geométrica de razão q, com $q > 0$ e $q \neq 1$. Denotamos a soma desses n primeiros termos como S_n, isto é,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \tag{1.2}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por q, já que $q > 0$ e $q \neq 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} qS_n &= q\,(a_1 + a_2 + a_3 \\ &\quad + \cdots + a_{n-1} + a_n) \\ &= a_1q + a_2q + a_3q + \cdots + \\ &\quad a_{n-1}q + a_nq \\ &= a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + {}_{n}q. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Fazendo a diferença entre (1.3) e (1.2),

$$qS_n - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_nq) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = a_nq - a_1.$$

Como $a_n = a_1q^{n-1}$, segue que

$$S_n(q-1) = a_1q^{n-1}q - a_1 = a_1q^n - a_1 = a_1(q^n - 1).$$

Dividindo por $(q-1)$ o resultado obtido, a soma dos n primeiros termos de umaProgressão Geométrica pode ser escrita como:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1},\ (q \neq 1).$$

É importante observar que se $q = 1$ o resultado não pode ser aplicado.

Neste caso, a Progressão Geométrica seria estacionária, pois todos os seus termos seriam iguais. Assim, para calcular a soma dos seus n primeiros termos ´e suficiente escrever a seguinte expressão Sn = na1.

Exemplo 1.2. Considere uma Progressão Geométrica de termo geral $a_n = q^n$ com

$n \in \mathbb{N}$ onde $q = \frac{1}{10}$. Podemos caracterizar a sequência da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{10} = 0,1 \\
a_2 &= \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} = 0,01 \\
a_3 &= \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} = 0,001 \\
a_4 &= \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10000} = 0,0001
\end{aligned}$$

.

Logo, a sequência obtida ´e uma Progressão Geométrica cujos termos são $(0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \cdots)$. Assim, a medida que o valor de n aumenta, o valor de an diminui, ficando cada vez mais próximo de 0.

Definição 1.4. Uma sequência $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$, onde $n \in \mathbb{N}$ tem um limite l se, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter um número natural n_0 tal que $| a_n - l | < \varepsilon$ quando $n > n_0$. Neste caso, indica-se $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ e dizemos que a sequência converge para l.

Exemplo 1.3. A sequência $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right)$ converge para 1. Com efeito, note que, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ tal que $n > n_0$, então $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. Portanto, segue da Definição 1.4 que a sequência (a_n) converge para 1.

Teorema 1.1. *Toda sequência da forma* $(1, q, q^2, q^3, \cdots, q^n, \cdots)$, *com* $q \in \mathrm{R}$, *tal que* $|q| < 1$, *converge para zero.*

Demonstração. Como $q \in \mathrm{R}$ e $|q| < 1$, vamos analisar algumas possibilidades que q pode assumir:

1º caso) Se $q = 0$, então claramente a sequência converge para 0, pois, a partir do primeiro termo a sequência (q^n) é constante e igual a zero.

2º caso) Se $0 < q < 1$, então podemos escrever $q = \left|\frac{1}{b}\right|$, com $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Para mostrar que $b_n a_n = 0$, por definição, dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

se $n > n_0$ então $|q^n - 0| < \varepsilon$. Para isso, como $q^n = \left|\frac{1}{b}\right|^n$, note que:

$$|q^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{b}\right|^n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|b|^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{|b|^n}} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{|b|} < \sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} < |b|.$$

Sendo assim, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} < |b|$. Portanto, se $n > n_0$, então $|q^n - 0| < \varepsilon$, o que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, com $0 < q < 1$.

3º caso) Se $-1 < q < 0$, considere as subsequências: $(y_k) = (1, q^2, q^4, \cdots, q^{2k}, \cdots)$ e $(z_k) = (q, q^3, \cdots, q^{2k-1}, \cdots)$ cujos expoentes são pares e ímpares, respectivamente. Como todos os termos de (y_k) são positivos, pelo que foi provado no segundo caso, obtemos que $\lim y_k = 0$. Por outro lado, como $(z_k) = (q, q^3, \cdots, q^{2k-1}, \cdots) = q(1, q^2, \cdots, q^{2k-2}$, $q(y_k)$, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \lim\limits_{k\to\infty} q(y_k) = 0$, pois $\lim y_k = 0$ e q é constante (em particular q é limitado, já que $-1 < q < 0$). Sendo assim, segue que $\lim q^n = 0$, com $-1 < q < 0$.

Com isso, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, com $q \in \mathbb{R}$, tal que $|q| < 1$. ■

Teorema 1.2. *Se* $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ *é uma Progressão Geométrica infinita, com razão* q*, tal que* $-1 < q < 1$*. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{1.5}$$

Demonstração. Inicialmente, notamos que.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Pelo Teorema 1.1 temos $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

■

Observação 1.2. Se $a_1 = 0$, a condição $-1 < q < 1$ é desnecessária para a convergência da sequência $(S_1, S_2, S_3, \cdots)$. Nesse caso, a Progressão Geométrica é $(0, 0, \cdots)$ e sua soma é 0 qualquer que seja q. Se $a_1 \neq 0$ e $q < -1$ ou $q > 1$, a sequência $(S_1, S_2, S_3, \cdots)$ não converge.

1.3 Logaritmos

Nesta seção, relembramos a definição e algumas propriedades dos logaritmos.

Definição 1.5. Sejam a e b números reais positivos com $a \neq 1$. O logaritmo de b na base a é o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a^x seja igual a b, ou seja,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b. \tag{1.6}$$

Na expressão (1.6), dizemos que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo.

No próximo resultado descrevemos algumas propriedades operacionais dos logaritmos.

Proposição 1.3. Sejam a, b e c números reais com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b, c > 0$.

1) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$;

2) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

3) $\log_a(b^r) = r \log_a b$, para qualquer $r \in \mathbb{R}$;

4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, $c > 0$ e $c \neq 1$.

Demonstração.

Durante a prova, usamos $\log_a b = x$, $log_a c = y$.

1) Tomando $log_a(bc) = z$, temos,

$$a^z = bc = a^x a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y,$$

concluimos que $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

2) Agora, seja $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$. Da definição de logaritmo obtemos

$$a^z = \frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y,$$

assim, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

3) Seja $log_a b^r = y$, então

$$a^y = (a^x)^r = a^{rx} \Rightarrow y = rx.$$

Portanto, $\log_a(b^r) = r \log_a b$.

4) Considere $\log_c a = z$. Inicialmente, note que, z 6= 0 pois a 6= 1. Assim:

$$(c^z)^x = a^x = b = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}.$$

Então, $\log_a b = \dfrac{log_c b}{log_c a}$

O item 4 da Proposição 1.3 ´e utilizada em algumas ocasiões que precisamos converter logaritmos que possuem bases diferentes para uma única base conveniente. Tal propriedade ´e conhecida como mudança de base.

CAPÍTULO 2-
GEOMETRIA EUCLIDIANA E A GEOMETRIA FRACTAL: SEUS ASPECTOS RELEVANTES

Mailson Alves Farias

CAPÍTULO 2 - GEOMETRIA EUCLIDIANA E A GEOMETRIA FRACTAL: SEUS ASPECTOS RELEVANTES

Mailson Alves farias, 2024

Neste capítulo relembramos alguns matemáticos importantes da geometria euclidiana, como também, para outro tipo de geometria, considerada não-euclidiana, bem como, apresentamos as características e a classificação dos fractais, além da definição de uma das suas características mais importantes, relacionadas à sua medida, a dimensão, na intenção de conhecer um pouco mais da riqueza matemática presente na geometria desses elementos. As principais referências usadas foram: [1], [5], [10], [6], [15], [14] e [17].

Alguns conceitos da Geometria euclidiana

É comum observarmos elementos geométricos que nos fazem lembrar dos polígonos regulares, ou até mesmo dos sólidos geométricos, como por exemplo, demarcações de lotes de terreno, plantas-baixa de casas, pirâmides, cones, entre outros. Elementos como esses fazem parte da história da matemática, bem como das construções criadas pela humanidade desde séculos, pois, a partir de figuras como essas, grandes construtores tiveram inspiração e modernizaram o nosso mundo.

Inicialmente, a palavra Geometria, a qual vem do Grego "*Geometrein*", se origina da composição de palavras: "*Geo*" que significa "*Terra*" e "*Metria*" cujo significado é "Medida". Assim, a palavra "Geometria" significa "Medida da Terra". Comparar formas e medidas, é uma das primeiras considerações relacionadas à geometria, visto que, o homem sentia a necessidade de fazer algumas observações que estavam diretamente ligadas ao trabalho daquele tempo.

A história colabora com essa afirmação relatando que, no antigo Egito, no vale do Rio Nilo, o homem efetuava medições na terra devido às grandes inundações que ocorriam, dada a necessidade de remarcar os terrenos assim que o nível da água baixava. Esses motivos, levaram ao homem, algumas técnicas para desenvolver instrumentos que fossem úteis para a medição de áreas, volumes, bem como o próprio tempo.

Com isso, a Geometria foi se inserindo e aos poucos tomando origem em partes doOriente Antigo, inicialmente como uma ciência prática para solucionar problemas relacionados à agricultura e à engenharia, com a finalidade de analisar formas diferenciadas de objetos.

Desse modo, uma das primeiras descobertas geométricas foram feitas baseadas na noção de distância, que foi um dos primeiros conceitos geométricos desenvolvidos. Com isso, o homem ”primitivo”preparou, meio que inconscientemente, em grande escala o caminho para o desenvolvimento da Geometria que posteriormente seria conhecida e aplicada.

Diante dessa necessidade do homem em medir, quantificar formas e calcular, a Geometria teórica tornava-se um critério essencial para o desenvolvimento e a aplicação de suas comprovações.

> Seja por interesse nas necessidades práticas da construção das pirâmides e da remarcação de terras, seja pelo simples lazer dos sacerdotes, o fato é que naquela época foram descobertas intuitivamente importantes propriedades geométricas que serviram de estímulos para que outros povos se dedicassem ao estudo da geometria, entre os quais o povo grego, que transformou a geometria em algo muito diferente de seus predecessores. A geometria puramente intuitiva deu lugar a uma geometria sistemática, em que os fatos geométricos eram demonstrados através de raciocínio dedutivo. (BIANCHINI e PACCOLA, 1995, p. 326)

No entanto, foram necessários alguns séculos de estudos e contribuições à geometria até que tal área da matemática fosse analisada e estudada. . As disputas ocorridas naqueles tempos, acabaram derrubando o trono dos reis egípcios e os gregos assumiram o papel. Personagens como Tales de Mileto (Figura 2.1).

Tales foi o fundador da geometria demonstrativa, entre outros, marcaram os avanços nos estudos da geometria que transcederam o tempo.

Figura 2.1: Tales de Mileto (625-548 a.C., aproximadamente)

Fonte: [2], (1995, p. 326)

Um pouco mais tarde, surge então, o museu de Alexandria, que com seu aspecto de Universidade atraiu os maiores cientistas e pesquisadores da época. Muito embora, não se tenha registros que confirmem com maior exatidão, sobre o nascimento e a existência de Euclides (Figura 2.2).

Ainda assim, a geometria e todos os aspectos relacionados as figuras planas e aos sólidos geométricos recebem o nome desse notável matemático.

Na próxima página, poderemos observar, disposto, Euclides de Alexandria, que na Figura 2.2: Euclides de Alexandria.

Figura 2.2: Euclides de Alexandria

> Sabe-se muito pouco sobre a vida de Euclides; nem mesmo é comprovado que tenha nascido em Alexandria, como se afirma com frequência. Há evidências, contudo, de que seja autor, além dos *Elementos*, de outras obras de matemática, sobre lugares geométricos, cônicas, etc. *Os Elementos* de Euclides são um conjunto de treze livros publicados por volta do ano 300 a.E.C., mas não temos registros da obra original, somente versões e traduções tardias. (ROQUE, 2012, p.151)

Em sua obra, é possível perceber com detalhes a arte de Euclides, seu método, rigor e capacidade de sistematizar, descrevendo a Geometria em forma de axiomas e postulados essenciais para a estrutura da Geometria reconhecida até os dias atuais como Geometria Euclidiana. Do livro I de Euclides podemos destacar, os seguintes postulados:

1) Pode-se traçar uma única reta ligando-se dois pontos;

2) Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente em ambas as direções;

3) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio;

4) Todos os ângulos retos são iguais;

5) Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão esses ângulos.

Mesmo sendo um dos mais antigos escritos da Matemática na forma axiomática-dedutiva e, sem sombra de dúvidas, uma excelente contribuição para o estudo da Geometria, com o passar dos tempos, foram surgindo vários questionamentos sob sua estruturação lógica, principalmente relacionado ao quinto postulado de Euclides, o que fez com que muitos considerassem que Euclides usava pressupostos não explicitados sobre o assunto e assim, novas pesquisas e contribuições nos estudos da geometria surgiram, mas certamente a grandiosidade da sua obra e a sua influência científica é considerada, até os dias atuais, como inigualável.

A geometria de Mandelbrot e o surgimento dosfractais

Com o passar do tempo, o homem começou a observar a natureza e percebeu a existência de padrões que, muitas vezes, não se encaixavam aos padrões apresentados nas figuras planas ou nos sólidos geométricos, pois, outras características podiam ser identificadas e assim, cada uma dessas novas características, tornava-se desejada à investigação matemática, para tentar justificar a geometria que havia em cada uma dessas figuras naturais.

Na tentativa de encontrar um esquema, um determinado padrão que possibilitasse descrever as estruturas que cada uma dessas figuras apresentava, o homem começou a perceber, através de formas como: a couve-flor, os raios, o curso de um rio e suas ramificações, até padrões presentes em algumas árvores e os detalhes dos seus galhos e folhas, na análise da geometria dos órgãos do corpo humano e suas estruturas, que estava diante de relações geométricas que transcendia a geometria euclidiana.

> As formas encontradas nos animais e plantas chamam a atenção dos matemáticos, por exemplo, muitas conchas formam espirais, as estrelas do mar possuem um conjunto simétrico de braços, alguns vírus adotam formas geométricas regulares. Mas além dos padrões de forma, existem os padrões de movimento, como o andar humano, os pés tocam o solo num ritmo regular, esquerda-direita, ou a sidewinder, uma cobra do deserto que se move como uma espiral de uma mola helicoidal, jogando seu corpo para frente em forma de curvas tentando minimizar seu contato com a areia quente. (STEWART, 1996, p. 122)

Características como essas nos faz acreditar, assim como historicamente é relatado que, de fato, há uma explicação Matemática por trás disso. Mas, antes de nos aprofundarmos na natureza e nos padrões de figuras como essas, apresentamos um pouco da história de um dos grandes pesquisadores que contribuiu para a criação de uma nova geometria.

Nascido em Varsóvia, capital da Polônia, no ano de 1924, Benoit B. Mandelbrot (Figura 2.3), descendente de uma fam´ılia judaica, aos 12 anos de idade, teve que deixaro seu país junto com a sua família, tendo em vista as constantes ameaças trazidas pela guerra à Europa.

Figura 2.3: Benoit B. Mandelbrot (1924-2010)

Fonte: [17], (2018, p. 235).

Embora não tivesse estudado álgebra avançada ou cálculo, Benoit Mandelbrot percebeu que o seu gosto e aproximação com a geometria acabava explicando problemas em outros ramos da matemática. Para ele, as figuras geométricas eram tão próximas que, a sua intimidade em lhe dar com tais figuras, tornava o seu prazer pela matemática ainda mais interessante.

No ano de 1952, Mandelbrot obteve o seu título de PHD na Universidade de Parise, aos poucos, o seu esforço contínuo para ampliar os conhecimentos matemáticos adquiridos fez com que ele fosse para o Instituto de Estudos Avançados em Princeton, onde continuou a explorar muitos campos diferentes da Matemática.

Buscando relações para descrever a geometria observada na natureza e que, transcendia os estudos apresentados por Euclides, Benoit Mandelbrot começou a investigar e analisar estruturas naturais, percebendo que tais estruturas, apresentavam determinados padrões que se repetiam em cada uma das suas partes, mas que não se encaixavam perfeitamente as características apresentadas pelas formas da geometria euclidiana.

Benoit B. Mandelbrot, fez com que a história da geometria, ganhasse novos capítulos tendo em vista que ele considerou elementos novos, que antes, apesar de serem perceptíveis não considerados. Em um dos questionamentos feitos por Mandelbrot, podemos perceber isso, já que, a geometria apresentada por ele

> Dá conta de extensões com reentrâncias e saliências, depressões e fragmentação. Foi dele a indagação: "que extensão tem o litoral da Grã-Bretanha?". Ele sabia que a resposta variava conforme a escala de medição, considerando as distâncias, não apenas por segmentos de retas, mas levando em conta os contornos das curvas e outros acidentes. (SOUZA, 2018, p. 235).

Esse questionamento feito por Mandelbrot foi importante para o avanço do estudo da Geometria, de tal modo que,

> Era preciso ter uma imaginacão excepcional para considerar a possibilidade de uma geometria diferente daquela de Euclides, pois o esp´ırito humano por dois milênios estivera limitado, pelo preconceito da tradição, à firme crença de que o sistema de Euclides era certamente a única maneira de descrever em termos geométricos o espaço físico, e que qualquer sistema geométrico contrário não poderia ser consistente (EVES, 1997, p.22).

Mandelbrot observou que boa parte de elementos da natureza não podem ser descritos pela geometria euclidiana, pois nessa, as formas estão associadas a eixos perpendiculares, especificada assim, em uma, duas ou três dimensões, de certa forma, a algum ponto pertencente a uma linha, área ou volume respectivamente. Em uma das suas afirmações, Mandelbrot, considera que nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, troncos de árvores não são suaves e relâmpagos não viajam em linha reta.

Diante dos questionamentos e levando em consideração todas as observações feitas por Mandelbrot foi criada a Geometria Fractal. O termo Geometria Fractal tem origem no adjetivo em latim "*Fractus*", do verbo em latim "Frangere" que corresponde a "Fraturado" ou "quebrado", refletindo uma natureza de irregularidades. Essa geometria estuda estruturas mais complexas que as formas apresentadas na geometria euclidiana, analisando as propriedades e comportamentos de cada uma dessas estruturas, buscando estabelecer padrões para as formas encontradas na natureza.

Fractal é uma estrutura geométrica ou física, cujas partes apresentam semelhanças, geralmente, com a estrutura original, mesmo estando em diferentes escalas. Mas valesalientar que, a característica da semelhança entre as partes da estrutura de fractais naturais torna-se limitada em função da escala. Seja por meios geométricos ou por forma de padrões aleatórios, através de processos recursivos, os fractais podem ser obtidos, apresentando caracter´ısticas que podem ser encontradas em diversas formas da natureza e se encontram em diversos lugares, como por exemplo, nos flocos de neve.

É importante ressaltar que, os fractais do tipo matemático, são considerados distintos dos fractais naturais, tendo em vista que esse último, são considerados finitos, já os do tipo matemático são criados por meio de processos de iterações recursivas e alguns deles serão apresentados nos próximos capítulos deste trabalho.

Fractais na Ciência e Tecnologia

Com o avanço das tecnologias computacionais, bem como das ciências, artes, músicas, entre outros, a geometria fractal tem se destacado cada vez mais. Uma vez que, algumas estruturas que não se encaixavam aos padrões geométricos euclidianos, passaram, através do estudo com fractais, a receber determinados algoritmos matemáticos que as caracterizavam, observando-se melhor os seus devidos detalhes. Com isso, alguns elementos da natureza que antes não eram elaborados de forma matemática, começaram a se aproximar muito mais dessa geometria, passando a ser verificados, tornando possível criar modelos mais próximos daquilo que se apresenta na realidade de cada um desses elementos.

Dado o avanço das teorias e estudos desenvolvidos pela Matemática, Astronomia, Biologia e Física, entre outras ciências, é possível destacar a importância da geometria fractal, como nas imagens de satélites, que cada vez mais, tornam possíveis a aproximação da realidade, mostrando as características do nosso planeta, suas planícies, áreas territoriais, dentre outros aspectos relevantes, como linhas costeiras, como podemos observar na Figura 2.4, destacando-se que, independente da escala em que se amplie a imagem, outros detalhes são apresentados, mas sempre relacionados com a imagem original.

Figura 2.4: Imagem de Satélite

Fonte: Google Maps[1] (2019, com adaptações).

Nessa imagem, é possível perceber um recorte de um mapa apresentado numa tela de computador. Considerando esse recurso é possível aproximar a imagem, destacando que em cada aproximação, alguns detalhes que antes eram imperceptíveis sem o auxílio da tecnologia e da teoria dos fractais, passam a ser destacados com uma maior precisão. Segundo Mandelbrot, um "raio não viaja em linha" e com isso pode-se destacar através da análise das suas ramificações, a presença de fractais, com os seus padrões associados à semelhança e a proporcionalidade relacionados em cada uma de suas partes.

Na Figura 2.5 podemos perceber esses padrões destacados por Mandelbrot.

Figura 2.5: Relâmpagos

Fonte: Escola Focus[2] (2019, p. 1).

Algumas estruturas da natureza apresentam uma distribuição de partes idênticas, mas não são estruturas exatamente equivalentes, como é o caso da couve-flor (Figura 2.6) e a samambaia (Figura 2.7). Mas ainda assim, são estruturas que podem ser analisadas sob os aspectos estruturais da geometria fractal, como veremos adiante.

Figura 2.6: Couve-Flor

Figura 2.7 – Folha de Samambaia

Fonte: Retirada de [10] (2016)

Outros exemplos que possuem característica fractais que podem ser citados e vistos na natureza são as nuvens formadas no céu, algumas árvores e galhos, bem como suas ramificações, em que é possível destacar a repetição de padrões.

Esses padrões transcendem o campo da geometria euclidiana, mas de certo modo, chama a atenção na riqueza de detalhes e nos algoritmos matemáticos que estão por trás de toda essa proporcionalidade existente entre as partes que formam a estrutura, bem como nos leva a compreender a beleza da teoria associada à prática Matemática.

A teoria apresentada por Mandelbrot é de extrema importância no avanço dos estudos da geometria, já que:

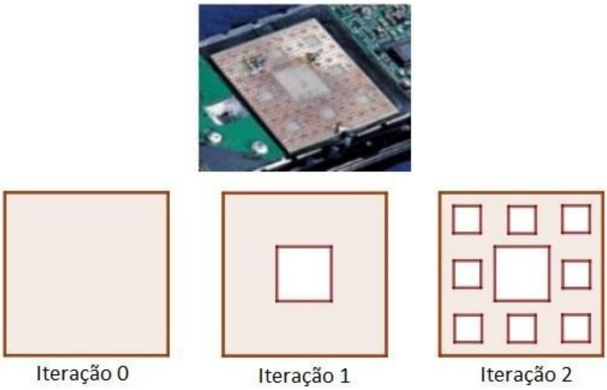
> Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas e rios, rochas, plantas e animais, e acima as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulos, círculos, esferas, cones, etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas. (BARBOSA, 2005, p.10-11).

As irregularidades predominante nos fenômenos naturais, ou na tecnologia criada pelo avanço dos estudos feitos pelo homem, originou uma ciência conhecida como Teoria do Caos, através da qual, alguns padrões são identificados, mesmo que em situações caóticas, ou seja, desordenadas, sem uma previsão lógica, de forma aleatória.

Com essa percepção, Benoit Mandelbrot, o “pai dos fractais”contribuiu para que a geometria, considerada não-euclidiana, tivesse um importante avanço também na análise das novas tecnologias, como é o caso das inovações das TV’s digitais, antenas fractais (Figura 2.8), criadas por engenheiros para serem utilizadas em telefones celulares e outros dispositivos sem fio que precisam de uma antena que possa ter recepção similar em muitos comprimentos de onda diferentes, ou seja, essas antenas necessitamde uma estrutura semelhante em escalas diferentes.

Por exemplo, uma antena celular baseada no Tapete de Sierpinski, a qual é uma figura plana construída a partir de processo recursivo, na qual suas características são definidas como fractais e que podem ser criados a partir de um quadrado, o qual inicialmente é dividido em nove quadrados de mesma área, em seguida retira-se o quadrado central, considera-se os quadrados restantes e repete-se esse procedimento continuamente.

Figura 2.8: Antena Fractal relacionada ao Tapete de Sierpinski na Iteração 2

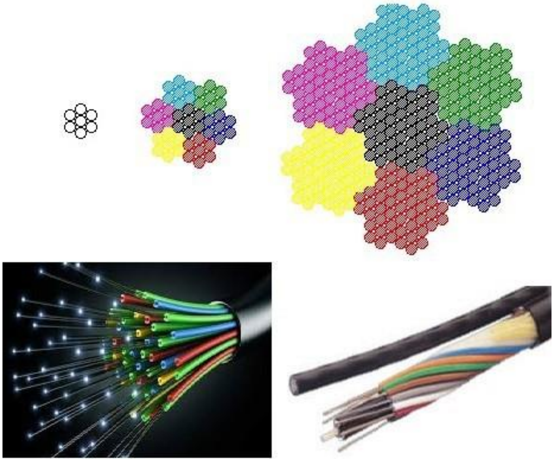


Fonte: Tranversos[3] (2019, com adaptações).

Muito embora, a evolução tecnológica sempre esteja se modificando e outras formas estejam surgindo, tais antenas, revolucionaram o ramo da telefonia, já que a partir delas, os sinais dos aparelhos celulares obtiveram uma melhoria na capacidade de transmissão e na otimização do espaço telefônico utilizado, criando e melhorando a distribuição dos serviços oferecidos.

Outra alta tecnologia que pode ser citada utilizando fractais, foi obtida pela empresa Incom[4] em 1994, a qual desenvolveu um envelopamento de fibras ópticas apropriado para produzir ondas com baixas distorções. Com isso, a empresa idealizou o desenho de feixes de fibras ópticas fractais, nomeadas de multifibras, fornecendo uma melhoria no contraste de imagem.

Figura 2.9: Fibra Ópticas Fractais



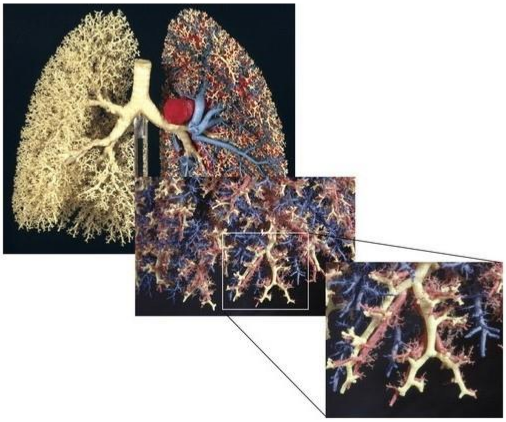
Fonte: Prisma e MTI Tecnologia[5] (2019, com adaptações).

Na área das telecomunicações, as antenas e fibras fractais tem contribuído na emissão de sinais, oferecendo respostas em frequências distintas, cada vez mais eficazes, aumentando o nível de capacidade na interação entre os seus usuários, oferecendo uma inigualável vantagem em projetos de redes sem fio, como é o caso das transmissões *wireless* com antenas cada vez mais leves e compactas, ocupando de forma integradaao interior do aparelho as conexões necessárias para a alta tecnologia na comunicação.

É possível destacar a importância do aprofundamento no estudo da geometria fractal e a Teoria do Caos com o advento do avanço tecnológico, especificamente no ramo da computação gráfica e recursos cada vez mais sofisticados que possibilitam ao homem ir mais além, criando e recriando, soluções que favorecem ao bem da humanidade e a evolução na pesquisa de outras áreas, seja através da percepção no campo das ciências e tecnologias ou, através do desenvolvimento de projetos para a economia, avaliando a cotação da bolsas de valores, analisando situações da vida real, como por exemplo, as oscilações no coração e no cérebro, através de exames de imagens cada vez mais sofisticados, análise da corrente sanguínea e suas interligações microscópicas, permitindo equacionar e reformular antigos problemas da humanidade, buscando possíveis soluções.

Diante disso, podemos destacar a importância da geometria fractal na modelagem das ramificações do pulmão (Figura 2.10) ou no sistema de artérias do coração, dentre outros orgãos do corpo humano, já que, padrões utilizados por alguns fractais, servem como modelo para essas estruturas naturais.

Figura 2.10: Ramificações no Pulmão (Modelagem e computação gráfica)



Fonte: Journal of Applied Physiology[6] (2019, p. 1)

Esses órgãos necessitam de concentrar uma maior superfície e um maior volume em pequenos espaços, assim como o sistema circulatório que percorre uma grande área num volume limitado. Estruturas como essas, tem semelhança com outro fractal obtido por meio de funções iteradas, chamado de Curva de Koch, o qual apresentamos suas características. Nesse caso, a estrutura pressiona uma linha de extensão infinita numa área pequena, bem como os vasos sanguineos que também formam uma continuidade, se ramificando, dividindo e voltando a ramificar-se, se tornando cada vez mais estreitos. Aspectos dessa natureza, estão intrinsicamente ligados aos fractais.

Podemos perceber, a partir dos estudos e pesquisas feitas por Mandelbrot que, os fractais estão em toda parte do universo. Em tudo que se manifesta sob formas inanimadas, em aspectos biológicos vivos, como em protozoários, na pluricelularidade da vida, em formas microscópicas, conservando entre elas uma similaridade que faz com que estejam intrinsicamente ligadas por meio de propriedades expressando toda beleza e conjectura da geometria fractal.

2.4 Classificação e característica dos Fractais

Antes de reconhecer as caracter´ısticas de um fractal, vamos fazer uma breve apresentação dos tipos de fractais existentes, procurando estabelecer um pouco mais de conhecimento sobre essas estruturas, antes vista como objetos estranhos na matemática, ou como alguns literários relatam, “monstros matemáticos”.

Dependendo da forma de como é gerado, podemos classificar os fractais em três grupos principais:

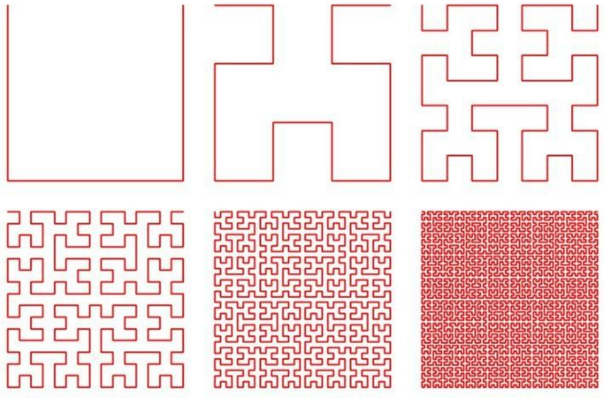
1) Fractais gerados por meio de sistemas de funções iteradas;

2) Fractais gerados por meio de relações de recorrência;

3) Fractais aleatórios.

Fractais gerados por meio de sistemas de funções iteradas, também conhecido como fractais determinísticos ou fractais geométricos, são aqueles, gerados por uma regra fixa de substituição geométrica, mas bem definida, aplicada a cada iteração. Uma característica marcante nesse tipo de fractal é a autossemelhança, já que cada uma das partes da estrutura fractal se assemelha com o todo, mesmo em diferentes escalasde ampliação. Como exemplo dessa classe de fractais podemos citar: o triângulo de Sierpinski, a curva e a ilha de Koch e o conjunto de Cantor, que serão apresentados com um pouco mais de detalhes, no capítulo seguinte, além desses, podemos ver na Figura 2.11 a curva de Hilbert, que é uma curva fractal contínua de preenchimento de espaço descrita em (1891) pelo alemão David Hilbert (1862 - 1943).

Figura 2.11: Curva de Hilbert até a quinta iteração

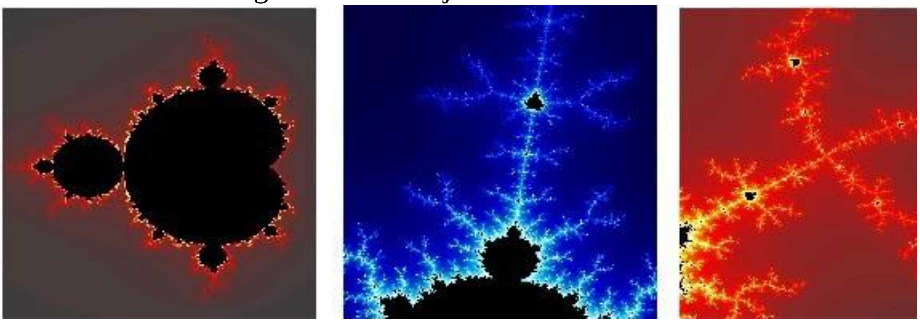


Fonte: DataGenetics[7] (2019, p. 1).

Os Fractais definidos por uma relação de recorrência, são chamados também de fractais de fuga do tempo. Reconhecidos por possuirem uma forma mais livre de similaridade, de modo que o fractal apresenta inúmeras cópias reduzidas, mesmo sendo imagens distorcidas ou degeneradas, com isso não são considerados totalmente auto-semelhantes.

Com o avanço da tecnologia computacional, fractais dessa classe podem ser reproduzidos apresentando toda a sua complexidade. Um exemplo dessa classe de fractais é o conjunto de Mandelbrot, o “pai dos fractais”. A imagem desse fractal pode ser vista na Figura 2.12, na qual está exposta, também, duas ampliações do conjunto.

Figura 2.12: Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Alguma Matemática[8] (2019, p. 1).

Os Fractais aleatórios, também conhecidos como fractais naturais, é uma classe de fractais em que destacamos a autossemelhança estatística. Nessa classe de fractais podemos perceber que a parte total da figura se assemelha a ampliação de uma parte. Essa classe de fractais estão relacionadas com a Teoria do Caos, dadas as estruturas fragmentadas, extremamente bela e complexas encontradas nessa classe de fractais, buscando padrões dentro de um sistema dinâmico.

O estudo dessa classe de fractais é muito utilizado para a modelagem em diversas áreas de estudo e tecnologia, como na Biologia, Medicina, Geografia, Mercado financeiro, Ciências da Computação, entre outras áreas. Um exemplo dessa classe de fractal pode ser observado através de cada uma das partes de um floco de neve, como nos mostra a Figura 2.13.

Figura 2.13: Floco de Neve

Fonte: pxhere.com[9] (2019, p. 1)

Os Fractais, além de apresentar estruturas geométricas complexas e diferentes das formas geométricas euclidiana, apresentam determinadas características que faz com que esses elementos sejam ainda mais especiais.

Uma das primeiras caracter´ısticas observadas em figuras fractais pode ser definidada seguinte forma;

Autossemelhança, que é a semelhança em que uma parte do objeto fractal tem com o todo, podendo ser subdividida em autossemelhança exata e autossemelhança aproximada ou estatística, mantendo uma semelhança, independente da escala em que o objeto é observado.

Com relação a essa subdivisão encontrada na autossemelhança, podemos diferenciá- las dizendo que;

A autossemelhança exata, presentes em figuras criadas por processos de iteração matemática são elaboradas através de um conjunto de réplicas perfeitas da figura ou objeto original, considerando ainda que, esse tipo de autossemelhança está presente em muitos fractais.

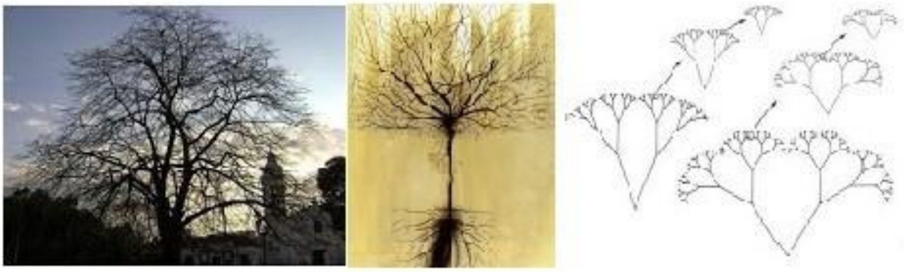
A autossemelhança aproximada, conhecida também como autossemelhança estatística, é aquela que se aproxima dos objetos naturais, como é possível destacar a presença dessas cacacterística em algumas figuras da natureza, a exemplo disso, as ramificações de uma árvore.

Outra característica fractal destacada pela grande quantidade de detalhes que são apresentados em cada uma das partes da figura é a complexidade infinita.

Complexidade Infinita é a característica pela qual, por mais que se amplie um objeto fractal, independente da escala de ampliação, os detalhes que são observados são infinitos, ou seja, sempre existirão, de forma infinita, reentrâncias, saliências e rugosidades apresentadas a cada ampliação, podemos citar como exemplo dessa característica, as linhas costeiras, que a cada ampliação num mapa podemos perceber uma maior quantidade dos detalhes que vão aparecendo no desenho.

Uma das formas em que os fractais são construídos é chamada de processo de iteração que é a repetição de um procedimento aplicado infinitamente. Portanto, quanto maior for o número de iterações nesse processo, mais detalhes serão percebidos, mesmo que aconteça a continuidade de formação de novas partes semelhantes da figura ou objeto e com isso, uma Complexidade Infinita de detalhes, na qual é considerado o limite do processo de iterações. A exemplo disso, podemos observar a Figura 2.14.

Figura 2.14: Autossemelhança e Complexidade infinita



Fonte: Fractais na natureza[10] (2019, com adaptações).

Na Figura 2.14, podemos observar a semelhança entre as árvores naturais com a árvore fractal que além de apresentarem uma autossemelhança estatística, apresentam também, um grande número de detalhes, o que nos faz perceber, a complexidade infinita em cada uma das suas ramificações.

Uma das mais importantes características fractais é chamada de Dimensão fractal que diante da rugosidade apresentada em muitos objetos fractais, é utilizada para quantificar, de certa forma, o grau de irregularidade, fragmentação ou intensidade do conjunto considerado.

Dada a importância dessa característica, reservamos uma seção desse capítulo para abordar um pouco mais sobre a dimensão fractal.

2.5 Dimensão

Inicialmente, é preciso considerar que, quando estamos pensando em dimensões de figuras, objetos, dentre outras coisas, estamos nos referindo à possibilidade de medí-los, considerando um determinado espaço. Assim, podemos dizer que a dimensão é o número de parâmetros necessários para a identificação de um ponto nesse espaço.

O homem utilizava essa definição, pelo menos até o século XIX, se baseando no número de coordenadas, o que se fazia suficiente para criar possibilidades de realizar medidas em cada uma das direções de um espaço. Naquela época, tal definição atendia as necessidades matemáticas e esse tipo de dimensão é chamada de dimensão euclidiana. A exemplo disso, podemos citar o cálculo de distâncias através de um mapa, no qual, as coordenadas são utilizadas para identificar pontos no plano e a partir desses pontos, com auxílio de um instrumento de medida é possível dimensionar a distância entre eles. Tendo em vista que, a geometria euclidiana, é a parte da matemática responsável por estudar as formas geométricas, podemos perceber através das formas apresentadas por essa geometria que, as dimensões podem ser classificadas em: adimensional (forma geométrica sem dimensão, ou seja, dimensão zero: pontos), unidimensional (forma geométrica que possui apenas uma direção ou um sentido: retas), bidimensional (formas que possuem duas direções ou dois sentidos: o plano) e tridimensional (formas que são caracterizadas por apresentarem três direções diferentes, como altura, largura e profundidade: sólidos geométricos), como podemos ver na Figura 2.15.

Figura 2.15: Tipos de dimensões euclidianas

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Durante muito tempo, o comprimento, a largura e a altura de um objeto geométrico, nos davam, de certo modo, uma definição de dimensão, cujo valor é um número positivo. Mas, com o passar do tempo, outras ideias e estudos surgiram, como é o caso da Geometria Fractal que apresenta outras possibilidades de dimensões, as quais estão inteiramente relacionadas com o formato dos objetos ou figuras, apresentando umacorrespondência existente entre as irregularidades, mesmo que estejam em diferentes escalas e que, muitas vezes, pode ser representada, também, por um número racional.

2.6 Dimensão Fractal

Como vimos, através dos fractais, podemos dizer que o homem conseguiu sobrepor barreiras e assim, começou a observar elementos naturais através de outras formas geométricas, percebendo que cada uma delas apresentava uma determinada semelhança que se enquadravam em classes, agora, subdivididas, de acordo com a sua forma e o seu grau de irregularidades, bem como através das características fractais apresentadas.

Atualmente, utilizando recursos tecnológicos computacionais, o homem pode avançar ainda mais, na análise de formas e irregularidades que caracterizam os fractais. A partir disso, começaram a surgir programas específicos que possuem a capacidade de medir, como por exemplo, através de imagens geradas por satélite que utilizam softwares cada vez mais avançados em imagem e escalas métricas, capaz de nos apresentar diversos detalhes importantes, a cada ampliação.

A dimensão fractal é uma das características que faz com que ela se torne ainda mais útil para comparar formas fractais, pois através dessa, conseguimos representar o nível de ocupação da forma no espaço. Com isso, quanto maior for o número de irregularidades apresentadas em uma forma fractal, maior será a sua dimensão.

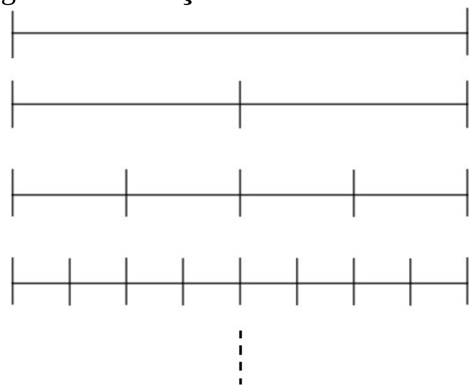
Desse modo, podemos observar que a dimensão fractal não é caracterizada, necessariamente, por um número inteiro, já que, essa medida representa o grau de ocupação deste no espaço e surge como uma alternativa de medição, obtendo assim o grau de complexidade de uma forma.

Para calcular a dimensão de um fractal Benoit Mandelbrot, utilizou as ideias do matemático alemão Hausdorff (1868 - 1942), que desenvolveu trabalhos na área de topologia e Besicovitch (1891 - 1970), matemático russo com estudos e contribuições na área de conjuntos de dimensão não-inteira. Com isso, podemos calcular a dimensão fractal do seguinte modo.

Inicialmente, seja $N(\varepsilon)$ a quantidade de objetos formados em uma determinada dimensão.

Considere um segmento (unidimensional d = 1) cujo comprimento seja l e em seguida seccione esse segmento em segmentos iguais, cuja medida seja ε. Observe a Figura 2.16.

Figura 2.16: Secções numa linha de medida l



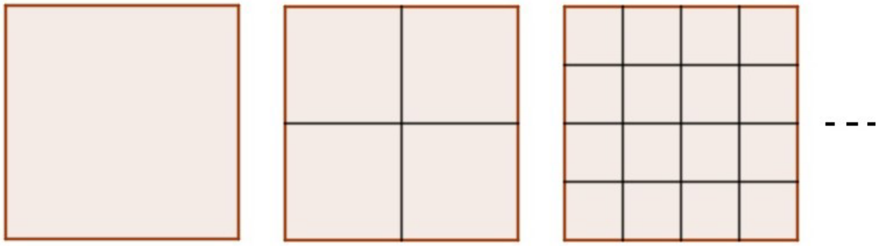
Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Observe que, a medida que ε diminui, a quantidade de segmentos formados $N(\varepsilon)$ aumenta, de tal forma que,

$$N(\varepsilon) = l \; \frac{1}{\varepsilon} \; . \tag{2.1}$$

Analogamente em um plano, seja l o lado do quadrado (bidimensional d = 2)(Figura 2.17). Dessa forma, note que,

Figura 2.17: Secções num quadrado de lado l

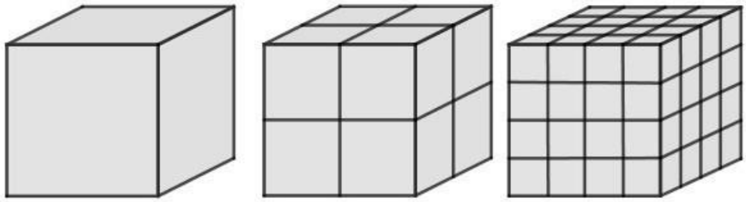


Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

a cada vez que o tamanho de ε diminui, a quantidade de quadrados $N(\varepsilon)$ aumenta. Assim, temos, $N(\varepsilon) = l^2 \; \frac{1}{\varepsilon}^{2}$.

Continuando esse processo, usando um objeto tridimensional, seja l a aresta de um cubo (Figura 2.18) e, note que,

Figura 2.18: Secções num cubo de aresta l



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

a cada vez que o tamanho de ε diminui, a quantidade de cubos $N(\varepsilon)$ aumenta. Assim, temos, $N(\varepsilon) = l^3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^3$.

Se continuarmos esse processo, podemos verificar que a quantidade de objetos formados é dada por:

$$N(\varepsilon) = l^d \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d. \qquad (2.2$$

onde d é a dimensão que o objeto ocupa.

Para verificar a validade dessa igualdade, procedemos usando o princípio da indução em d. Usando o caso base, para $d = 1$ note que isso é verdade, basta considerar 2.1. Supondo que $N(\varepsilon) = l^d \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d$ seja verdadeira e multiplicando $N(\varepsilon)$ por $l \frac{1}{\varepsilon}$ segue que, $l^d \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d l \frac{1}{\varepsilon} = l^{(d+1)} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(d+1)}$. Assim a igualdade é válida para $d + 1$ e, portanto, pelo princípio da indução finita, a Equação 2.2 é verdadeira.

Agora, aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade, segue que:

$$\begin{aligned} \log N(\varepsilon) &= \log l^d \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \\ &= \log l^d + \log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \\ &= d \left(\log l + \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

portanto, como o termo em l será desprezível para pequenos valores de ε, temos que a dimensão de capacidade é dada por:

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \qquad (2.3)$$

onde ε é o tamanho da aresta da caixa e $N(\varepsilon)$ é a quantidade de caixas preenchidas. Com esse resultado, podemos concluir que a dimensão d de objetos autossemelhantes, sejam eles fractais ou não, é dada pela equação 2.3.

Utilizando esse resultado, podemos verificar o valor da dimensão das figuras fractais. Constata-se que alguns elementos e propriedades que constituem essa maravilhosa descoberta, a cada instante tem aberto portas e caminhos, antes jamais imaginados, mas que revolucionam as pesquisas e os debates que interessam não só a matemática, mas as ciências e suas ramificações, bem como a construção de fractais clássicos e algumas de suas propriedades.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, RUY MADESEN, *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala deaula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BIANCHINI, EDWALDO E PACCOLA, HERVAL, *Matemática, volume 2: versão alfa*. São Paulo: Moderna, 1995.

DANTE, LUIZ ROBERTO, *Matemática: Contexto e Aplicações*, São Paulo: Ática, 2ª Ed., 2013.

ESCHER, MAURITS CORNELIS, *Gravuras e Desenhos*,Taschen, 1994.

EVES, HOWARD, *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria*, Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

FALCONER, KENNETH, *Fractal Geometry: Mathematical foundations and applications*, John Wiley, England, 2004.

FREITAS, C. O infinito. Technical Report, *Popularização da Matemática - Núcleo de Estágio da EB 2, 3*, Rio Grande do Sul, 2008.

IEZZI, GELSON, HAZZAN, S., *Fundamentos de Matemática Elementar*, São Paulo: Atual, 7ª Ed., 2004.

IEZZI, GELSON, DOLCE, OSVALDO, MURAKAMI, CARLOS, *Fundamentosde Matemática Elementar*, São Paulo: Atual, 9° Ed., 2004.

IEZZI, GELSON,. [ET. AL.], *Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, vol. 2*. São Paulo: Saraiva, 2016.

LIMA, ELON LAGES, *Análise Real volume 1. Funções de uma variável*, Rio de Janeiro: IMPA, 12° Ed., 2016.

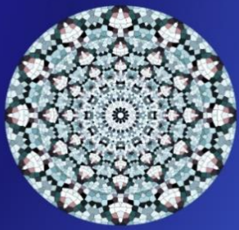
LIMA, ELON LAGES, *Espaços Métricos.*, Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 3° Ed., 1993.

LIMA, ELON LAGES, *Curso de Análise 2*, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

NUSSENZVEIG, H. MOYSÉS(Organizador), *Complexidade e Caos*, Rio de Janeiro: UFRJ/COPEA, 1999.

MANDELBROT, BENOIT. B, *The fractal geometry of nature*, San Francisco: W. H. Freeman, 1982.

ROQUE, TATIANA, *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahat, 2012.
SOUZA, MARIA HELENA, *21 Teoremas Matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.
STEWART, IAN, *Os Números da Natureza: a realidade irreal da imaginação matemática*. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.
MENDES, ADIM MARTINS, *Uma breve introdução ao estudo da análise no R^n*. Dissertação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.
TJABBES, P., *O Mundo Mágico de Escher*, Rio de Janeiro: Centro Cultural Banco do Brasil, 2010.
RUE, EVA LA, *Relâmpagos.* [S.I], 2018. Disponível em: https://focusfoto.com.br/relampagos/. Acesso em: 03 mai. 2019. il. color.
http://www.blog.365filmes.com.br/2018/04/M-C-Escher-e-o-cinema-em-7-filmes.html. Acesso em: 20 mar. 2019.
https://culture.pl/en/article/sierpinski-fractals-code-breaking-and-a-crater-on-the-moon. Acesso em: 10 jun. 2019.
http://www.math.ubc.ca/ cass/courses/m308/projects/fung/page.html. Acessoem: 10 jun. 2019.
https://thatsmaths.com/2014/07/31/degrees-of-infinity/. Acesso em: 25 jun.2019.
https://pt-br.facebook.com/M.C.EscherPage/ Acesso em: 08 jul. 2019.



Neste trabalho, estudamos a Geometria Fractal, caracterizando alguns fractais clássicos e apresentando alguns aspectos históricos relacionados à esta teoria. Além disso, queremos destacar que a Geometria Fractal permite observar uma interessante conexão entre a construção de elementos matemáticos e alguns objetos presentes na natureza. Nesse sentido, em dois capítulos didáticos, ao caracterizar alguns fractais clássicos, como o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski, destaca-se não apenas a beleza matemática desses objetos, mas também sua aplicabilidade em descrever formas encontradas na natureza, como montanhas, árvores, nuvens e costas litorâneas.

Pedro & João Editores
pedroejoaoeditores.com.br

ISBN 978-65-265-1542-6