

Gilson Alexandre Ostwald Pedro da Costa
Patrícia Nunes da Silva
Younes Nikdelan
Zochil González Arenas



Matemática, Ciência e Sociedade

Experiências da Semana
do IME-UERJ



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

 Pedro & João
editores



Matemática, Ciência e Sociedade: Experiências da Semana do IME-UERJ



**GILSON ALEXANDRE OSTWALD PEDRO DA COSTA
PATRÍCIA NUNES DA SILVA
YOUNES NIKDELAN
ZOCHIL GONZÁLEZ ARENAS
(Organização)**

**Matemática, Ciência e Sociedade:
Experiências da Semana do IME-UERJ**



Copyright © Autoras e autores

Todos os direitos garantidos. Qualquer parte desta obra pode ser reproduzida, transmitida ou arquivada desde que levados em conta os direitos das autoras e dos autores.

Gilson Alexandre Ostwald Pedro da Costa; Patrícia Nunes da Silva; Younes Nikdelan; Zochil González Arenas [Orgs.]

Matemática, Ciência e Sociedade: Experiências da Semana do IME-UERJ.
São Carlos: Pedro & João Editores, 2025. 376p. 16 x 23 cm.

ISBN: 978-65-265-2061-1 [Digital]

DOI: 10.51795/9786526520611

1. Interdisciplinaridade. 2. Matemática. 3. Popularização da Ciência. 4. Extensão Universitária. I. Título.

CDD – 510/370

Capa: Marcos Della Porta

Ficha Catalográfica: Hélio Márcio Pajeú – CRB - 8-8828

Diagramação: Diany Akiko Lee

Editores: Pedro Amaro de Moura Brito & João Rodrigo de Moura Brito

Conselho Editorial da Pedro & João Editores:

Augusto Ponzio (Bari/Itália); João Wanderley Geraldi (Unicamp/Brasil); Hélio Márcio Pajeú (UFPE/Brasil); Maria Isabel de Moura (UFSCar/Brasil); Maria da Piedade Resende da Costa (UFSCar/Brasil); Valdemir Miotello (UFSCar/Brasil); Ana Cláudia Bortolozzi (UNESP/Bauru/Brasil); Mariangela Lima de Almeida (UFES/Brasil); José Kuiava (UNIOESTE/Brasil); Marisol Barenco de Mello (UFF/Brasil); Camila Caracelli Scherma (UFFS/Brasil); Luís Fernando Soares Zuin (USP/Brasil); Ana Patrícia da Silva (UERJ/Brasil).



Pedro & João Editores

www.pedroejoaoeditores.com.br

13568-878 – São Carlos – SP

2025

APRESENTAÇÃO

A Semana do IME é um evento anual voltado à divulgação científica, à formação e à discussão acadêmica, que desempenha um papel fundamental no desenvolvimento acadêmico e científico do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ).

A primeira Semana do IME foi realizada em 2001, com atividades voltadas para os alunos de graduação dos seis departamentos do instituto. Em 2008, com a criação do Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais e Modelagem Matemática (PPG-COMPMAT), o evento passou a incluir atividades voltadas aos seus discentes.

A partir de 2017, a Semana do IME inseriu o instituto no calendário nacional de popularização e divulgação da ciência ao se tornar o braço local da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT) na UERJ. Naquela edição, a Semana do IME passou a incluir atividades voltadas para alunos da educação básica. Nos anos seguintes, o esforço para ampliar essa participação foi intensificado, e alunos de escolas dos ensinos fundamental e médio de diferentes municípios do Estado do Rio de Janeiro passaram a participar sistematicamente da Semana.

Um dos principais objetivos do evento é o de atrair alunos de graduação para a pesquisa científica, estimulando a interação com discentes dos programas de pós-graduação do IME. Para os alunos do ensino básico, o evento promove um primeiro contato com a universidade, aproximando-os da perspectiva de cursar o ensino superior em matemática, estatística e computação. Para os alunos de pós-graduação, a Semana do IME representa um ambiente para a troca de conhecimento e experimentação em docência. Já para os docentes do IME, a Semana possibilita colaborações e o intercâmbio de experiências acadêmicas e pedagógicas.

As atividades do evento incluem palestras, mesas redondas, oficinas e minicursos — estes últimos, em sua maioria, ministrados por discentes da pós-graduação —, além de duas competições, as maratonas de Matemática e Computação. As palestras são apresentadas por pesquisadores renomados, com atuação destacada no cenário nacional, permitindo que alunos de diferentes níveis ampliem seus horizontes e desenvolvam uma visão crítica e contemporânea das possibilidades e desafios da produção científica no país.

Alunos de todos os níveis são incentivados a submeterem trabalhos e os apresentarem em pôsteres ou oralmente, proporcionando para a maioria deles o primeiro contato com estas atividades. Os trabalhos submetidos são avaliados por uma Comissão Científica formada por docentes do IME e alunos de pós-graduação do instituto.

Para se ter ideia do impacto do evento, a edição de 2024 teve 1.070 participantes: 382 estudantes da educação básica; 462 de graduação; 59 de pós-graduação; 42 professores da educação básica; além de professores de ensino superior e outros profissionais. Recebemos alunos de cinco escolas públicas dos municípios de Armação dos Búzios, Magé, Duque de Caxias e Rio de Janeiro, aos quais foram oferecidas 10 oficinas voltadas para a divulgação científica, ministradas por docentes e discentes do PPG-COMPMAT e dos departamentos de Geologia, Oceanografia e Arqueologia da UERJ. Em consonância com o tema da SNCT de 2024 — “Biomias do Brasil: diversidade, saberes e tecnologias sociais” —, foram apresentadas três palestras sobre Mata Atlântica e Floresta Amazônica, além de uma mesa redonda intitulada “Entre o Sertão e as águas”, com a participação de líderes da Articulação do Semiárido Brasileiro; da UNEMAT; e um descendente indígena Guató (Pantanal brasileiro).

Este e-book é uma iniciativa para ampliar a expressão e o alcance da Semana do IME. Além de valorizar e dar visibilidade aos trabalhos dos alunos e ao próprio evento, esta publicação constitui mais um instrumento para atrair alunos para a produção

de conhecimento científico. Agradecemos à FAPERJ — Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro, Processo SEI-260003/013099/2022 - APQ2, Ref. Proc. E-26/219.018/2023, pelo apoio para produção deste material.

O e-book não corresponde propriamente aos anais da Semana do IME. Autores de trabalhos considerados destaques da edição de 2024 do evento foram convidados a complementá-los e estendê-los para publicação. Os artigos submetidos foram novamente revisados por uma comissão de docentes do IME. Além disso, alguns dos artigos aqui publicados relatam as organizações, experiências e dinâmicas de oficinas e atividades do evento. O livro contém ao todo 27 capítulos, 11 dos quais elaborados por alunos de graduação, 6 por alunos de pós-graduação e 10 por docentes organizadores de atividades da Semana do IME.

Desejo a todos uma boa leitura.

Cordialmente,

Gilson Alexandre Ostwald Pedro da Costa

Coordenador da XVII Semana do IME

SUMÁRIO

1. A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL NA DINÂMICA DE POPULAÇÕES	13
2. ANÁLISE COMPUTACIONAL DE IMAGENS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA PARA DETECÇÃO AUTOMÁTICA DE ADENOMIOSE	23
3. ESTABILIDADE DE POÇOS: ABORDAGEM ANALÍTICA EM CILINDROS OCOS	41
4. APRENDENDO QUÍMICA NA PRÁTICA: OFICINAS DE GELEIA PARA BANHO COMO ESTRATÉGIA EDUCACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA	49
5. ARGUMENTANDO COM DOBRADURAS	61
6. A ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM ATIVA: RELATO DE UMA OFICINA REALIZADA NA XVII SEMANA DO IME	69
7. AR SANDBOX – UMA FERRAMENTA NA CONSCIENTIZAÇÃO PARA REDUÇÃO DE RISCO DE DESASTRES (RRD)	79
8. CONSEQUÊNCIAS DA CONTAMINAÇÃO POR PETRÓLEO E SEUS SUBPRODUTOS NO AMBIENTE MARINHO	87

9. CONSTRUINDO VISUALIZAÇÕES EM 3D DE DEFORMAÇÃO DE CORPOS EM VELOCIDADES RELATIVÍSTICAS	107
10. DESENVOLVENDO O PENSAMENTO COMPUTACIONAL EM ESCOLAS PÚBLICAS DO RIO DE JANEIRO	123
11. DESENVOLVIMENTO ÁGIL DE SOFTWARE: UMA VISÃO DE SUA UTILIZAÇÃO NA PRÁTICA	137
12. JOGO DOS ODS - UMA MANEIRA LÚDICA DE INTRODUÇÃO DOS OBJETIVOS DO DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL PARA CRIANÇAS E JOVENS DA EDUCAÇÃO BÁSICA	149
13. LABORATÓRIO ITINERANTE DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA LÚDICA	163
14. LEITURA E ESCRITA DE EXPRESSÕES - MODELAGEM MATEMÁTICA	171
15. MODELAGEM DE UMA DINÂMICA DE METAPOPLAÇÕES DENSIDADE-DEPENDENTE	183
16. MOVIMENTOS RÍGIDOS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS	205
17. OFICINA ADA LOVELACE: RELATO DE EXPERIÊNCIA	215
18. OFICINA BICICLETA ENERGIA	231

19. OFICINA DE PRODUÇÃO DE REPELENTES À BASE DE PRODUTOS NATURAIS: POPULARIZAÇÃO DA QUÍMICA NUMA ABORDAGEM CTS (CIÊNCIA, TECNOLOGIA E SOCIEDADE)	241
20. PROPOSIÇÃO DE RECICLAGEM DE SEDIMENTOS MARINHOS NA BAÍA DE SEPETIBA: UMA ESTRATÉGIA SUSTENTÁVEL DE SUSTENTABILIDADE AMBIENTAL E SOCIAL	265
21. RELATO DE EXPERIÊNCIA: JOGO O “X” DA QUESTÃO	277
22. SISTEMA DE REALIDADE VIRTUAL CONTROLADO POR INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL EMBARCADA PARA APOIO NO TRATAMENTO DE FOBIAS	285
23. SOBRE FORMAS MODULARES PARA O GRUPO MODULAR E O SISTEMA DE RAMANUJAN	293
24. TRANSFORMANDO A EXPERIÊNCIA DO PACIENTE NO SUS COM O CHATBOT SUSI-CARIOCA	317
25. TRANSFORMANDO CONHECIMENTO EM AÇÃO: A LINHA DO TEMPO DO ELETROMAGNETISMO E O MOTOR ELÉTRICO	327
26. UMA ABORDAGEM DE APRENDIZADO PROFUNDO PARA ESTIMAR A POSIÇÃO RELATIVA DE FRAGMENTOS CERÂMICOS	339
27. VI MARATONA DE MATEMÁTICA DO IME-UERJ	361

A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL NA DINÂMICA DE POPULAÇÕES

Priscila Oliveira Pereira^{a,1}, Patrícia Nunes da Silva^{a,2}

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: O estudo da dinâmica de populações ilustra a estreita relação entre matemática e biologia. Neste capítulo, estamos interessados em observar a presença da função de probabilidade exponencial em modelos de dinâmica de populações. Vamos explorar dois cenários: a Equação Fundamental de Equilíbrio da dinâmica populacional e os modelos compartimentais do tipo SIR. Além disso, vamos mostrar que se uma função de probabilidade não tem memória, ela é exponencial.

Palavras-chave: Distribuição exponencial; dinâmica populacional; epidemiologia; distribuição sem memória.

INTRODUÇÃO

Thieme [5] nos diz que, na natureza, a dinâmica de uma espécie dificilmente pode ser isolada da de outras espécies. No entanto, no espírito de dividir para conquistar, a modelagem matemática concentra-se primeiro em uma população e expressa sua variação em termos de conceitos como taxas de natalidade, taxas de mortalidade e taxas de emigração e imigração. Isso nos leva à chamada Equação Fundamental de Equilíbrio da Dinâmica Populacional:

$$N'(t) = B(t) - D(t) + I(t) - E(t),$$

onde $B(t)$, $D(t)$, $I(t)$ e $E(t)$ denotam respectivamente a quantidade de nascimentos, mortes, imigrantes e emigrantes por

¹ priscila.poliveira@yahoo.com.br.

² nunes@ime.uerj.br.

unidade de tempo t . Essa equação expressa a variação da população $N(t)$ em termos desses fatores. Um dos desafios é encontrar expressões para esses fatores.

A taxa de variação das mortes também pode ser expressa como uma taxa per capita. A taxa per capita de mortalidade, $\mu(t)$, é o número médio de mortes por cada indivíduo por unidade de tempo, no instante t . Com ela, podemos calcular $D(t)$ multiplicando $\mu(t)$ por $N(t)$, o tamanho da população no instante t . Para determinar $\mu(t)$, seguiremos a abordagem de Thieme [5]. Considere $\mathcal{F}(t)$, a função de probabilidade de ainda estar vivo no tempo t . Seja $\Pi(t, r)$, $t \geq r$, a função de probabilidade de ainda estar vivo no tempo t , dado que se está vivo no tempo r . Isto é, para $t = r + h$, $\Pi(t, r) = \mathcal{F}(h|r) = \frac{\mathcal{F}(t)}{\mathcal{F}(r)}$. Temos $\Pi(r, r) = 1$ e $0 \leq \Pi(t, r) \leq 1$. A probabilidade de morrer entre os instantes r e t é dada por $1 - \Pi(t, r)$. Assim, a taxa de mortalidade per capita $\mu(t)$ é definida como:

$$\mu(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \Pi(t + h, t)}{h},$$

supondo que esse limite exista. De $\Pi(t, r) = \Pi(t, s)\Pi(s, r)$, para $t \geq s \geq r$, segue que

$$\frac{d}{dt}\Pi(t, r) = -\mu(t)\Pi(t, r), \quad \Pi(r, r) = 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} \Pi(r + h, r) &\stackrel{t=r+h}{=} \Pi(t, r) = \exp\left(-\int_r^t \mu(s)ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^h \mu(u - r)du\right). \end{aligned}$$

Se μ é constante, vemos que $\Pi(r + h, r)$ é exponencial.

No contexto de epidemiologia, reencontramos a exponencial nos modelos compartimentais do tipo SIR. Em um modelo SIR, a população é dividida nos compartimentos de Suscetíveis (S), Infectados (I) e Recuperados (R). Vamos considerar

o modelo sem fatores demográficos em que a taxa de infecção é σ e a de recuperação é ρ :

$$\begin{cases} S' = -\sigma SI \\ I' = \sigma SI - \rho I \\ R' = \rho I \end{cases} . \quad (1)$$

Ao supor que $\sigma = 0$ em (1), obtemos para a equação dos infectados

$$I' = -\rho I.$$

A solução $I(t) = I_0 e^{-\rho t}$, com I_0 o número inicial de infectados, nos diz que

$$e^{-\rho t} = \frac{I(t)}{I_0}.$$

Isto é, $e^{-\rho t}$ é a probabilidade de ainda estar infectado após um período de tempo t .

Nestes dois cenários de dinâmica populacional, encontramos probabilidades associadas à distribuição exponencial. Neste capítulo, vamos apresentar algumas propriedades da distribuição exponencial. Estamos particularmente interessados na falta de memória.

A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Em um espaço amostral S , uma função real definida em S é chamada de variável aleatória. Se X é uma variável aleatória e C é um subconjunto de \mathbb{R} tal que $X \in C$ é um evento, denotamos por $\Pr(X \in C)$ a probabilidade de ocorrência de um resultado s do espaço amostral que seja tal que $X(s) \in C$. A distribuição de X é a coleção de todas as probabilidades da forma $\Pr(X \in C)$ para todos os subconjuntos de \mathbb{R} para os quais C defina um evento. Uma função f cuja integral sobre um intervalo define a probabilidade de X estar neste intervalo é chamada de função densidade de probabilidade. Neste caso, dizemos que X tem uma distribuição contínua.

Definição 1. *Seja $\beta > 0$. Uma variável aleatória X tem distribuição exponencial com parâmetro β se X admite uma função densidade de probabilidade da forma*

$$f_{\beta}(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Vimos que a função de sobrevivência $\Pi(r + h, r)$ (quando a taxa de mortalidade é constante) e o comprimento do período infeccioso são exponencialmente distribuídos.

Teorema 1. *Suponha que X tem distribuição exponencial com parâmetro β e considere $t > 0$. Então para todo real $h > 0$,*

$$\Pr (X \geq t + h | X \geq t) = \Pr (X \geq h).$$

Demonstração. Para cada $t > 0$,

$$\Pr (X \geq t) = \int_t^{\infty} \beta e^{-\beta x} dx = e^{-\beta t}.$$

Logo, para $t, h > 0$,

$$\Pr (X \geq t + h | X \geq t) = \frac{\Pr (X \geq t + h)}{\Pr (X \geq t)} = e^{-\beta h} = \Pr (X \geq h).$$

■

O exercício proposto por Degroot e Schervish [2, Exercício 23, p. 326] está diretamente associado ao projeto proposto por Bartle [1, Projeto 20.α, p. 140]. Ambos indicam como estabelecer a recíproca do Teorema 1. Isto é garantem que as distribuições exponenciais são as únicas distribuições contínuas sem memória.

SEM MEMÓRIA

Observe que se $\mathcal{F}(t)$ não tem memória, temos $\mathcal{F}(r + h) = \mathcal{F}(r)\mathcal{F}(h)$. Queremos saber se podemos afirmar que \mathcal{F} é exponencial. Para responder a essa pergunta, vamos resolver uma adaptação do projeto proposto por Bartle [1].

Seja g uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} , não identicamente nula, que satisfaz a equação funcional

$$g(x + y) = g(x)g(y); \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Tal como em Bartle [1], vamos considerar uma sequência de passos para deduzir que g é uma “exponencial”.

- (a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que $g(x) > 0$, $g(0) = 1$ e $g(-x) = (g(x))^{-1}$.

Escolheremos em (2) alguns valores para x ou y para estudarmos como a função g se comporta.

$$g(x) = g\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right) = g^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0.$$

Suponha que exista $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) = 0$. Por (2), para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = g(x - x_0 + x_0) = g(x - x_0)g(x_0) = 0.$$

Como g não é identicamente nula, tal x_0 não existe. Logo, $g(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tomando em (2), $x = y = 0$, temos

$$\begin{aligned} g(0) &= g(0 + 0) = g(0)g(0) = g^2(0), \\ g(0)(g(0) - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Como $g(0) > 0$, concluímos que $g(0) = 1$.

Usando $g(0) = 1$ e $y = -x$ em (2), temos

$$1 = g(0) = g(x - x) = g(x)g(-x).$$

Portanto, $g(-x) = (g(x))^{-1}$.

- (b) Seja $a = g(1)$. Prove que $g(r) = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Observe que sendo $a = g(1) > 0$, a expressão apresentada para restrição de g a \mathbb{Q} está bem definida. Inicialmente, provaremos por indução que $g(n) = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por construção, temos $g(1) = a = a^1$. Se $g(n) = a^n$, temos por (2)

$$a^{n+1} = a \cdot a^n = g(1)g(n) = g(n + 1).$$

Além disso, $g(0) = 1 = a^0$ e se $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, então

$$g(m) = g(-|m|) = (g(|m|))^{-1} = (a^{|m|})^{-1} = a^m.$$

Antes de concluir a prova para \mathbb{Q} , observe que se $q \in \mathbb{N}$ e $q > 1$, então, por um argumento indutivo, temos

$$\begin{aligned}
a &= g(1) = g\left(\frac{q-1}{q} + \frac{1}{q}\right) = g\left(\frac{q-1}{q}\right)g\left(\frac{1}{q}\right) \\
&= g\left(\sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{q}\right)g\left(\frac{1}{q}\right) = g^q\left(\frac{1}{q}\right).
\end{aligned}$$

Para $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ tais que $r = \frac{p}{q}$.

Logo,

$$g(r) = g\left(\frac{p}{q}\right) = \left(g\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r.$$

(c) Se $a > 0$, então existe no máximo uma função contínua g que verifica (2) e tal que $g(1) = a$.

Pelo item anterior, usando a densidade de \mathbb{Q} em \mathbb{R} , temos $g(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

No projeto proposto por Bartle [1], há itens adicionais. Um deles, apresentado no próximo lema, é útil para prova do principal resultado de Nelsen [4].

Lema 1. *Mostre que a função g é contínua em \mathbb{R} se e somente se ela é contínua em $x = 0$.*

Demonstração. Se g é contínua em \mathbb{R} , então g é contínua em $x = 0$. Para provar a recíproca, considere $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Note que

$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x_0)| \left| \frac{g(x)}{g(x_0)} - 1 \right|.$$

Vimos que podemos substituir $\frac{1}{g(x_0)} = g(-x_0)$, dessa forma

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(x_0)| &= |g(x_0)| |g(x)g(-x_0) - 1| \\
&= |g(x_0)| |g(x - x_0) - 1|.
\end{aligned}$$

Sabendo que $g(x_0) > 0$, da continuidade de g em 0, segue a existência de $\delta > 0$ tal que se $|y| < \delta$, então

$$|g(y) - 1| < \frac{\varepsilon}{|g(x_0)|}.$$

Logo, se $|x - x_0| < \delta$, temos

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Portanto, g é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Nelsen [4] também discute a recíproca do Teorema 1 com uma abordagem mais próxima da de Degroot e Schervish [2]. Seu principal resultado é

Teorema 2. *Se X é uma variável aleatória que não tem memória em \mathbb{R} , então X é exponencial.*

Nelsen [4] considera uma distribuição de probabilidade

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = 1 - \Pr(X > x)$$

da variável aleatória X . Como consequência dos axiomas de probabilidade, ele deduz que F tem as seguintes propriedades

- (i) F é não crescente em \mathbb{R} .
- (ii) F é contínua à direita em \mathbb{R} .
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Com argumentos análogos aos apresentados anteriormente, ele prova

Teorema 3. *Seja F é uma distribuição de probabilidade da variável aleatória X . Suponha que X não tem memória em \mathbb{R} . Então*

- (a) $F(0) = 0$ ou equivalentemente, $\Pr(X > 0) = 1$;
- (b) se $x > 0$, então $0 < F(x) < 1$;
- (c) F é contínua em \mathbb{R} .

Para provar o Teorema 2, além do Teorema 3, Nelsen [4] apresenta uma versão de um resultado conhecido de uma certa equação funcional. Por completude, apresentamos também sua demonstração.

Lema 2. *Suponha que g é uma função contínua em $[0, \infty)$ que satisfaz a equação*

$$g(x + y) = g(x) + g(y),$$

para todo $x, y > 0$. Então $g(x) = g(1)x$.

Demonstração. Suponha que exista $x_0 > 0$ tal que $g(x_0) \neq g(1)x_0$. Considere $h(x) = g(x) - g(1)x$. Note que

$$h(x + y) = g(x + y) - g(1)(x + y) = h(x) + h(y).$$

Além disso, $h(x_0) \neq 0$. Argumentando indutivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, $h(nx) = nh(x)$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |h(nx_0)| = +\infty.$$

No entanto, mostraremos que isso não pode acontecer pois h é uma função limitada. De fato, temos $h(1) = 0$. Logo

$$h(x + 1) = h(x) + h(1) = h(x).$$

Isto é, h é periódica. Como h é contínua em $[0,1]$, ela é limitada. A periodicidade garante a limitação em $[0, \infty)$. ■

Tanto o exercício proposto por Degroot e Schervish [2, Exercício 23, p. 326] quanto Nelsen [4] utilizam uma função auxiliar $g(x) = \ln [1 - F(x)]$ para provar o Teorema 2.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, exploramos a presença da distribuição exponencial na dinâmica de populações, com ênfase em sua propriedade de falta de memória e nas implicações dessa característica para a modelagem matemática de processos biológicos. Investigamos dois cenários fundamentais: a equação fundamental de equilíbrio da dinâmica populacional e os modelos compartimentais SIR, demonstrando como a distribuição exponencial surge na descrição da mortalidade e do período infeccioso.

Mostramos que o modelo assume implicitamente que a probabilidade de ainda estar infectado após um intervalo de tempo t segue uma distribuição exponencial. A partir dessa suposição, exploramos suas consequências para a estimativa do tempo médio de infecção. Observamos que a maioria dos modelos matemáticos utilizados na epidemiologia de doenças virais infantis, como o sarampo, adota essa distribuição para descrever o período infeccioso. No entanto, essa hipótese implica que a chance de recuperação é constante ao longo do tempo, independentemente do momento da infecção. Do ponto de vista epidemiológico,

Lloyde [3] aponta que essa suposição não é realista. Estudos estatísticos sobre a transmissão do sarampo em pequenas comunidades indicam que, na realidade, a probabilidade de recuperação não é constante: ela é inicialmente baixa e aumenta ao longo do tempo. Assim, a distribuição exponencial tende a superestimar o número de indivíduos com tempos de infecção muito curtos ou muito longos em relação à média.

Por fim, este estudo reforça a importância da modelagem matemática como ferramenta essencial para compreender fenômenos biológicos complexos. A aplicação de abordagens quantitativas rigorosas permite não apenas descrever e prever padrões epidemiológicos, mas também identificar limitações dos modelos tradicionais, promovendo avanços na análise e no combate a doenças infecciosas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPERJ, Processo E-26/010/101140/2018 e do Programa PIBIC-UERJ.

REFERÊNCIAS

- [1] BARTLE, R. G. **Elementos de análise real**. Rio de Janeiro: Campus, 1983.
- [2] DEGROOT, M. H.; SCHERVISH, M. J. **Probability and Statistics**. New York: Pearson, 2012.
- [3] LLOYDE, A. L. **Realistic Distributions of Infectious Periods in Epidemic Models: Changing Patterns of Persistence and Dynamics**. *Theoretical Population Biology*, v. 60, p. 59-71, 2001.
- [4] NELSEN, R. B. **Consequences of the Memoryless Property for Random Variables**. *The American Mathematical Monthly*, v. 94, n. 10, p. 981-984, 1987.

- [5] THIEME, H. R. **Mathematics in Population Biology**.
Princeton: Princeton University Press, 2003.

ANÁLISE COMPUTACIONAL DE IMAGENS DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA PARA DETECÇÃO AUTOMÁTICA DE ADENOMIOSE

**Marcus Vinícius Cunha Soares^{a,1}, Ana Cristina
Loubacker Amim^a, Debora Laine de Siqueira^a, Evelyn
de Souza Ribeiro^a, Deborah Monteiro Soares^b,
Cristina Asvolinsque Pantaleão Fontes^c, Lincoln Faria
da Silva^a**

^a*Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil*

^b*Departamento de Radiologia - Clínica de Imageamento Diagnóstico (CDPI)/DASA,
Rio de Janeiro, Brasil*

^c*Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói, Brasil*

Resumo: Este trabalho é parte de um projeto de pesquisa que tem como objetivo identificar a presença de adenomiose no útero em imagens de ressonância magnética, utilizando *Deep Learning*. Foram utilizadas 598 imagens de pacientes com e sem a doença. O treinamento foi feito com a arquitetura de rede neural *ResNet-50*. Foi obtida uma Acurácia de 88.33%, uma Loss de 0.2937 e um F1-Score de 84.4%. Em geral foram bons resultados, que ainda podem ser melhorados com um maior número de imagens.

Palavras-chave: *Deep learning*; visão computacional; classificação; útero; adenomiose.

INTRODUÇÃO

A adenomiose é uma condição benigna do útero, onde partes do tecido que reveste o interior do útero (endométrio) crescem na camada muscular do útero (miométrio). Foi

¹ marcusv.arts@gmail.com.

historicamente diagnosticada com base em exames detalhados após a histerectomia (remoção do útero); especificamente pela visualização de glândulas endometriais ectópicas e estroma a uma profundidade mínima de 2,5 mm abaixo da junção endometriometrial (Bird *et al.*, 1972). Hoje, exames por imagem ajudam no diagnóstico, permitindo o tratamento precoce.

A adenomiose provoca um impacto negativo considerável na qualidade de vida das pacientes. Apesar de ser uma doença ginecológica benigna, provoca vários sinais e sintomas desagradáveis tais como: dor pélvica crônica, dismenorreia, dispareunia, infertilidade e sangramento uterino anormal (Upson; Missmer, 2020; Gordts *et al.*, 2018). Previamente, acreditava-se que essa enfermidade afetava principalmente mulheres com mais de 40 anos; entretanto, atualmente, essa doença pode ser identificada em até 30% das mulheres mais jovens e em 24% daquelas que sofrem de infertilidade, com base em exames por imagens (Abu Hashim *et al.*, 2020; Puente *et al.*, 2016). Estudos demonstraram uma associação entre a adenomiose e um maior risco de parto prematuro e pré-eclâmpsia em mulheres grávidas que concebem naturalmente. A adenomiose também é associada a taxas reduzidas de gravidez bem-sucedida e nascimentos vivos, em conjunto com um aumento do risco de aborto espontâneo em mulheres submetidas à fertilização *in vitro* (Nelsen *et al.*, 2018; Vercellini *et al.*, 2014; Taran *et al.*, 2010).

O exame histopatológico do miométrio continua sendo o padrão ouro para o diagnóstico de adenomiose, com uma prevalência estimada de 21% a 36% entre mulheres que realizaram histerectomia. No entanto, apenas uma pequena porcentagem de mulheres sintomáticas com adenomiose passa por histerectomia, o que subestima a real prevalência da doença (Raimondo *et al.*, 2023).

O diagnóstico por ressonância magnética (RM) está ligado às características da zona juncional, como irregularidades e espessura, e inclui também sinais diretos e indiretos como a presença de glândulas endometriais no miométrio e aumento do volume uterino (Tamai *et al.*, 2006). No entanto, apesar dos achados

de imagem por RM descritos na literatura poderem identificar a patologia, a análise da zona juncional não é fácil, e costumeiramente apresenta algumas particularidades e desafios, como um pseudo-espessamento durante a menstruação, tornando o exame não recomendável em período menstrual. Além de outras variações uterinas de acordo com a fase do ciclo menstrual, estado reprodutivo, idade e uso de medicamentos hormonais (Bazot; Darai, 2018). Adicionalmente, uma armadilha comum nessa análise é a presença de contrações miométriais transitórias, que podem prejudicar a delimitação da zona juncional ou ainda simular um espessamento focal dessa região relacionado à patologia (Tamai *et al.*, 2005). Uma recente meta-análise comparou dois dos principais métodos de diagnóstico da adenomiose, sendo esses: a RM e a ultrassonografia transvaginal (USTV). Ambos demonstraram boa sensibilidade, sendo a RM em torno de 77-78% e a USTV, 72-79%. Entretanto, a RM mostrou superior especificidade, 88-93%, comparada à USTV que obteve 78-81%. (Liu *et al.*, 2021)

A computação tem evoluído e contribuído em diversas áreas da sociedade ao longo dos anos. A abordagem interdisciplinar da computação permite avanços significativos em atividades de outras áreas, como a área da saúde. Técnicas computacionais ajudam os profissionais da medicina na avaliação, detecção e diagnóstico de doenças. Além de agilizar o processo, também auxiliam na identificação de possíveis erros de diagnóstico. Uma das possíveis aplicações das técnicas computacionais na área da saúde é a detecção da adenomiose.

O *Deep Learning*, uma das principais áreas da inteligência artificial (IA), tem se mostrado cada vez mais promissor na área da medicina. Com sua capacidade de analisar e interpretar grandes quantidades de dados, esse ramo da IA tem se mostrado fundamental para o avanço da medicina e o desenvolvimento de novas aplicações (Awari, 2023). Embora seja amplamente utilizada, ainda há muito a ser explorado e novas aplicações têm surgido a cada dia, por ser uma área em constante inovação.

MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Embora o uso de *Deep Learning* na área da saúde tenha aumentado nos últimos anos, algumas patologias específicas ainda carecem de aplicações práticas, como é o caso da adenomiose. Desse modo, este trabalho visa preencher essa lacuna, avaliando o potencial dessa técnica na detecção da adenomiose de forma automática e precisa, podendo trazer avanços no diagnóstico precoce e auxiliando os profissionais da saúde. O objetivo deste trabalho é classificar as imagens de RM do útero entre útero normal e útero com anormalidade, principalmente a adenomiose. Este trabalho faz parte de um projeto que tem como objetivo detectar focos de adenomiose em RMs do abdômen e é uma continuação da etapa anterior, a detecção do útero (Cunha *et al.*, 2023). O foco deste trabalho foi a classificação das imagens entre útero normal e útero com anormalidade, utilizando redes neurais convolucionais.

TRABALHOS RELACIONADOS

Em Raimondo *et al.* (2023) os autores avaliaram a eficácia de um modelo de aprendizado profundo (*Deep Learning*, DL) no diagnóstico de adenomiose a partir de imagens ultrassonográficas transvaginais do útero e, posteriormente, o comparou ao desempenho de trainees intermediários em ultrassonografia (US). O trabalho realizado foi um estudo observacional prospectivo com 100 pacientes em idade fértil que passaram por USTV para diagnosticar adenomiose. Os vídeos desses exames foram analisados por um modelo de *Deep Learning* e por três *trainees* em US. As métricas de avaliação incluíram acurácia, sensibilidade, especificidade, valor preditivo positivo (VPP), valor preditivo negativo (VPN) e *F1-score*. O modelo de DL apresentou acurácia de 51% no diagnóstico de adenomiose, enquanto os *trainees* alcançaram 70%. Embora o modelo DL tenha exibido menor sensibilidade (43%) comparado aos *trainees* (72%), o mesmo apresentou maior especificidade (82% versus 69%), sugerindo um

desempenho melhor na identificação de úteros sem adenomiose e uma menor taxa de falsos positivos. Este estudo é um dos primeiros a explorar o uso de DL para diagnóstico de adenomiose via USTV. O estudo teve uma amostra limitada e foi realizado em um único centro, o que reduz a generalização dos resultados. Além disso, a ausência de confirmação histopatológica e o uso restrito de recursos ultrassonográficos (como *Power Doppler*) também podem ter influenciado o desempenho do diagnóstico. O estudo sugere que o DL pode ser útil para excluir casos sem adenomiose, mas requer melhorias em precisão e sensibilidade antes de uma aplicação ampla.

No trabalho Zhao *et al.* (2024) os autores propuseram uma nova técnica automatizada e não invasiva para diagnóstico de adenomiose utilizando uma rede neural baseada em transformers, chamada *A2DNet* (*Adenomyosis Auto Diagnosis Network*), para melhorar a acurácia diagnóstica usando USTV. Esse estudo prospectivo envolveu 1.654 pacientes diagnosticados com adenomiose por ultrassom transvaginal. O modelo *A2DNet* foi desenvolvido para identificar automaticamente sinais de adenomiose em imagens empregando aprendizado por transferência e redes *transformers* para extração de características. A estrutura da *A2DNet* usa três imagens ultrassonográficas de cada paciente, combinando os resultados por um mecanismo de votação para simular o processo diagnóstico dos médicos. A *A2DNet* obteve uma acurácia de 92,33%, precisão de 96,06%, sensibilidade de 91,71% e F1-score de 93,80% no conjunto de teste, demonstrando uma taxa de diagnóstico correto acima de 92% tanto para amostras normais quanto para adenomiose. O estudo introduz uma abordagem pioneira que auxilia a reduzir a dependência da experiência do operador e oferece um suporte diagnóstico que pode aprimorar a detecção da adenomiose. O estudo foi baseado em imagens ultrassonográficas estáticas e não analisou a diferenciação entre adenomiose e outras doenças, como miomas. Também não foi investigada a correlação entre características ultrassonográficas e a gravidade dos sintomas, o que poderia

aprimorar a aplicação clínica do modelo. Essa pesquisa sugere que o *A2DNet* tem potencial para ser uma ferramenta clínica eficaz no diagnóstico de adenomiose, embora mais estudos sejam necessários para validar seu uso em tempo real e para diferenciação de outras condições ginecológicas.

Em Li *et al.* (2021), um algoritmo de *Deep Learning* foi treinado baseado em aprendizado com poucos exemplos (*few-shot learning*) para prever a razão de volume não perfundido (NPV) em pacientes com adenomiose tratados por ablação com ultrassom focalizado de alta intensidade (HIFU) usando imagens de ressonância magnética (RM). A previsão da razão NPV é importante para avaliar a eficácia clínica do tratamento e ajudar na seleção de pacientes elegíveis. A pesquisa utilizou uma arquitetura de aprendizado profundo que integra redes neurais convolucionais (RNC) e aprendizado por transferência (transfer learning). O modelo conteve um conjunto de dados de 208 pacientes, divididos em imagens ponderadas em T1 e T2. A metodologia incluiu a normalização de intensidade das imagens, extração de características usando RNC e redução de dimensionalidade com PCA e t-SNE. Técnicas de validação cruzada foram utilizadas para avaliar o desempenho do modelo. O modelo obteve precisão de 60% a 76,2% e sensibilidade de 85,6% a 92,8% em diferentes configurações de classificação. Na análise da curva ROC para diferentes intervalos da razão NPV, o modelo apresentou valores de área sob a curva ROC (AUC) elevados, com destaque nas classificações mais altas de ablação. Este é o primeiro estudo a aplicar aprendizado com poucos exemplos para prever a razão NPV em tratamentos de HIFU para adenomiose. A proposta melhora a precisão do diagnóstico e a predição de eficácia clínica usando uma abordagem eficiente para imagens de ressonância, o que é particularmente valioso devido à limitada disponibilidade de dados nesse campo. A pesquisa não inclui previsões da razão NPV para eficácia a longo prazo do tratamento, devido à falta de dados de acompanhamento.

O presente trabalho é diferente dos descritos anteriormente, pois propõe uma abordagem computacional para o rastreamento de adenomiose em imagens de ressonância magnética, usando técnicas e algoritmos de *Deep Learning*.

METODOLOGIA PROPOSTA

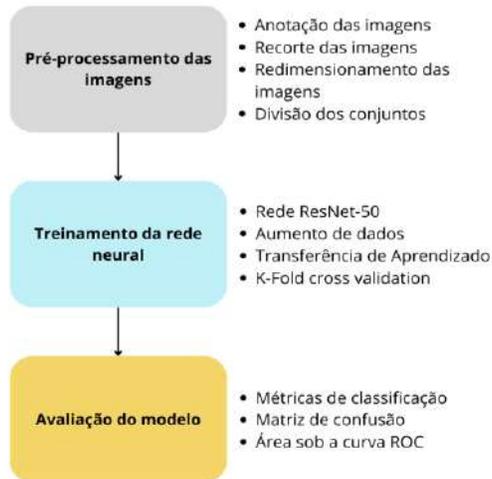
Para todas as tarefas deste projeto, foi utilizado o *Google Colab*, uma plataforma baseada em nuvem que permite a execução dos códigos de forma interativa, também possibilitando a execução de processos pesados de forma rápida. As imagens foram armazenadas no *Google Drive*, que possui integração com o *Google Colab* e também permitia a interação fácil entre todos os participantes do projeto. A programação foi feita na linguagem *Python* (van Rossum, 1995). As imagens foram coletadas pelo laboratório da DASA, em parceria com o projeto. Essas imagens são de RM, no plano sagital (Figura 1). O estudo recebeu aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do Hospital Universitário Pedro Ernesto da UERJ, para que todos os procedimentos seguissem as diretrizes éticas e regulamentares necessárias. Todas as informações dos pacientes foram cuidadosamente anonimizadas para proteger a privacidade e a confidencialidade dos dados. O estudo foi registrado na Plataforma Brasil com o número CAAE: 56305321.9.0000.5259. A metodologia proposta inclui as etapas: pré-processamento das imagens; treinamento da rede neural; e avaliação do modelo construído pela rede neural. A Figura 2 ilustra as etapas de tal metodologia.

Figura 1. Exemplo de imagem de RM.



Fonte: Laboratórios DASA.

Figura 2. Metodologia proposta para a tarefa de classificação.



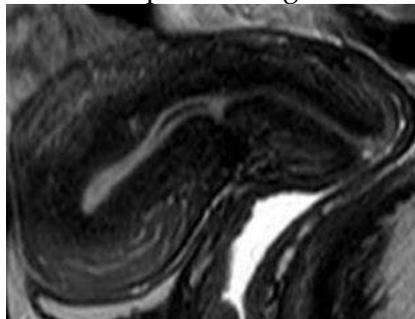
Fonte: Os Autores, 2025.

A etapa de pré-processamento das imagens tem início com a anotação do útero em cada imagem. Tal anotação é um processo que, manualmente, um retângulo envoltório é desenhado em volta do útero. Para cada imagem do conjunto de dados, foi realizada a anotação na plataforma *MakeSense AI* (MakeSense.AI, 2025) e

aprovada por médicas radiologistas, participantes do projeto. As imagens anotadas foram recortadas, com base nas coordenadas, mantendo apenas a região do útero, eliminando outras partes da RM desnecessárias ao estudo e que inclusive poderiam diminuir o desempenho de modelos de redes neurais, treinadas em etapas posteriores do projeto. Essas imagens, como exibida na Figura 3, foram utilizadas na etapa de classificação. O objetivo do projeto, em que o presente trabalho está inserido, é propor um sistema que automaticamente detecte e recorte o útero, identifique o útero com focos de adenomiose e detecte tais focos.

A camada de entrada da *ResNet-50*, arquitetura de rede neural que será utilizada como base neste trabalho, possui uma camada de entrada de 224x224 pixels. Assim, as imagens recortadas foram redimensionadas para esse tamanho, de forma automática, ao serem importadas com a biblioteca *Python OpenCV* (Bradski, 2000), através da função *resize*. Ainda no pré-processamento, as imagens foram separadas, de forma aleatória e mantendo as proporções, em dois grupos, sendo 90% para a construção do modelo e 10% para avaliar o poder de generalização desse modelo. O primeiro conjunto (90%) foi dividido da seguinte forma: 80% treinamento da rede neural e 20% para ajuste dos hiperparâmetros e validação do modelo construído. Todas as divisões foram feitas por meio da função “*train_test_split*” da biblioteca em python *scikit-learn* (Pedregosa, 2011).

Figura 3. Exemplo de imagem recortada.



Fonte: Laboratórios DASA.

Visto que, no presente trabalho, o conjunto de dados era composto de 255 imagens de úteros normais e 343 imagens de úteros com anormalidades, posteriormente foi necessário utilizar técnicas para lidar com o desbalanceamento das classes e evitar os efeitos negativos na tarefa de classificação pela rede neural. Por fim, como foi definida uma classificação binária (útero normal e útero com anormalidade), as imagens do conjunto de imagens foram divididas conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1. Composição das classes.

Útero normal	Útero com anormalidade
Normal	Com adenomiose e contrações
Normal com contrações	Com adenomiose e outras doenças
	Somente com adenomiose

Fonte: Os Autores, 2025.

Já na etapa de treinamento da rede neural (Figura 2) foi implementada uma nova arquitetura, tomando como base a *ResNet-50*, uma rede muito utilizada nesse tipo de tarefa. Segundo He *et al.* (2016), essa rede foi projetada para abordar problemas de degradação do gradiente que surgem em redes muito profundas. Esses problemas são caracterizados pela dificuldade de treinamento e pela saturação de desempenho à medida que a profundidade da rede aumenta. Além disso, para lidar com o baixo número de imagens e reduzir a probabilidade de um possível overfitting foi executada a técnica de aumento de dados, ou *data augmentation*, que visa aumentar o número de imagens durante o treinamento através de transformações nas imagens originais. Foi criada uma camada, na arquitetura da rede neural, para aumento de dados, inserida antes da arquitetura da *Resnet-50*, como ilustrado na Figura 4. Essa camada aplica flip horizontal, rotação e

zoom nas imagens que serão interpretadas como novos dados pela rede e geralmente melhoram os resultados. Os novos dados são gerados aleatoriamente, como parte do processo de treinamento.

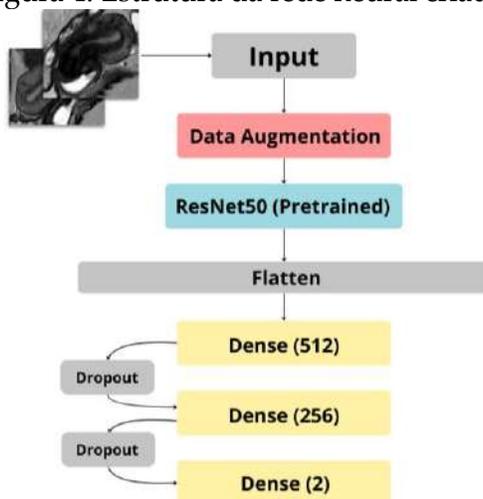
Ainda na etapa de treinamento da rede neural (Figura 2), para diminuir o esforço computacional, e conseqüentemente o tempo de treinamento, foi aplicada a técnica de transferência de aprendizagem (*Transfer Learning*). Nessa técnica, é aproveitado o conhecimento adquirido pela rede neural *Resnet-50*, na tarefa de detectar elementos básicos dos objetos de uma imagem, quando treinada no conjunto de imagens do *ImageNet* (Deng *et al.*, 2009), que possui cerca de 14 milhões de imagens em sua base de dados. Neste trabalho, a estrutura de rede neural *Resnet-50* pré-treinada foi obtida por meio da biblioteca *Keras* (Keras, 2025) da linguagem *Python*.

Essa rede pré-treinada, como descrito anteriormente, foi treinada em um grande conjunto, a *ImageNet*, e já era capaz de classificar uma grande variedade de objetos. Porém era necessário adaptá-la para a classificação da adenomiose. Para isso, o último bloco de camadas da rede foi removido e as camadas restantes “congeladas”, ou seja, elas não seriam novamente treinadas, mantendo os pesos já obtidos. Após a remoção, foram adicionadas novas camadas, que seriam treinadas a partir das camadas anteriores para a classificação das imagens saudáveis/doentes.

O modelo pré-treinado foi tratado como uma única camada pela importação do *Keras*, assim como na sua representação da Figura 4, porém continha uma série de camadas ocultas da rede. Em seguida foi adicionada uma camada de aumento de dados, para lidar com o número insuficiente de imagens, uma camada *Flatten*, que transforma a matriz multidimensional em um vetor unidimensional e as camadas densas. No total foram três camadas densas com 512, 256 e 2 neurônios respectivamente, intercaladas por camadas de *dropout*, que serão discutidas na próxima seção. As camadas densas também são conhecidas como camadas totalmente conectadas, pois seus neurônios possuem conexão com cada neurônio da camada anterior, e seus pesos são calculados

considerando todas essas conexões. As primeiras duas camadas densas possuem a função de ativação “ReLU”, enquanto a camada de saída possui a função de ativação “Sigmoid”. A compilação foi feita com os parâmetros de otimizador *Adam* (*learning rate* de 0.001), função de perda “*binary_crossentropy*” e métricas de acurácia e *AUC* (Área sob a curva).

Figura 4. Estrutura da rede neural criada.



Fonte: Os Autores, 2025.

As camadas de *dropout*, que foram colocadas entre as 3 camadas densas, tem como objetivo reduzir o *overfitting*, ou seja, evitar que o modelo memorize os dados e tenha dificuldades em classificar corretamente os dados novos. Para isso, essas camadas desfazem conexões entre neurônios de camadas sucessivas aleatoriamente durante o treinamento, fazendo a rede se adaptar às mudanças e não depender de resultados progressos.

Também foi implementado o parâmetro “*class_weights*”, ou pesos de classes, que através da função “*compute_class_weights*” da biblioteca *scikit-learn*, colocam pesos em cada classe e priorizam as classes minoritárias durante o treinamento. Essa técnica, ao dar mais atenção às classes com menos dados, melhora os resultados

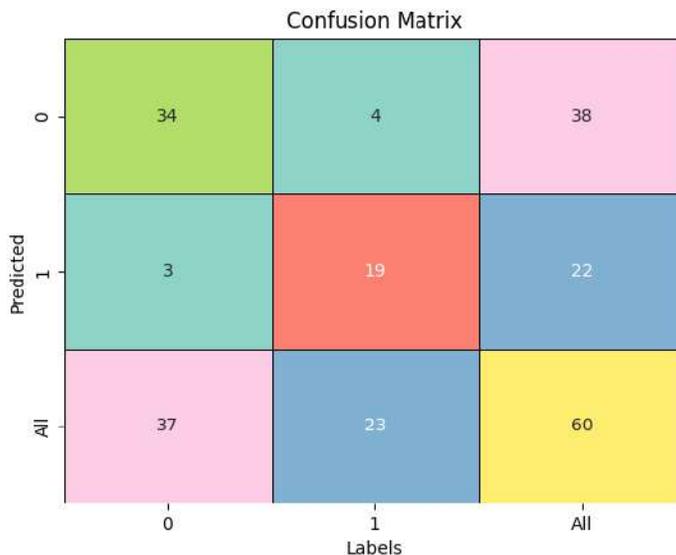
da classificação. Por fim foram adicionados parâmetros para melhorar a performance do treinamento. O parâmetro de *Early Stopping* foi incluído para parar o treinamento em caso de ociosidade, o parâmetro de *Model Checkpoint* para salvar o melhor peso obtido ao fim do treinamento e o parâmetro *ReduceLROnPlateau* para reduzir a taxa de aprendizado após certo número de épocas em ociosidade.

Antes do treinamento final para a construção do modelo, foi utilizada a técnica de *K-Fold cross validation* para definir os melhores hiperparâmetros de treinamento da arquitetura *ResNet-50*. Após obter os melhores valores para os hiperparâmetros, o conjunto total foi treinado por um máximo de 200 épocas, tendo terminado antes por conta do *early-stopping*.

RESULTADOS

Como descrito na Figura 2, a última etapa da metodologia foi a avaliação do modelo, através das métricas de classificação. Além disso, foi gerada uma matriz de confusão (Figura 5) para comparar os valores preditos e calcular algumas métricas adicionais importantes, com base no número de verdadeiros positivos, verdadeiros negativos, falsos positivos e falsos negativos. Na Figura 5, o valor 0 corresponde às imagens de pacientes com adenomiose e 1 às imagens de pacientes saudáveis, sendo o eixo horizontal os valores reais e o eixo vertical os valores preditos pela rede. O valor *All* corresponde à soma de imagens reais e preditas de ambas as classes, sendo o último campo, em amarelo, o total de imagens do conjunto de teste. As métricas fornecem uma visão detalhada quanto aos resultados obtidos, mostrando também os pontos que devem ser melhorados. Em trabalhos desse tipo, é comum esperar a mitigação de falsos negativos, ou seja, casos em que não se identifica uma anormalidade, mas ela esteja presente. Os resultados obtidos no conjunto de teste, separado previamente, estão descritos na Tabela 2.

Figura 5. Matriz de confusão.



Fonte: Os Autores, 2025.

Tabela 2. Resultados da classificação.

Acurácia	88.3%
Precisão	86.4%
Recall	82.6%
F1-Score	84.4%
Especificidade	91.9%
AUC	94.5%
Loss	0.2937

Fonte: Os Autores, 2025.

DISCUSSÃO

A principal limitação do presente trabalho é uma base de dados com uma quantidade reduzida de imagens. Isso certamente refletiu nos resultados mais baixos de algumas medidas de classificação como o *recall* (ou sensibilidade). Além disso, como detalhado na seção de trabalhos relacionados, não foram

encontrados estudos que possibilitem uma comparação direta. Embora possuam semelhanças quanto ao tema principal, estudos sobre o uso de *deep learning* para rastreamento de adenomiose ainda são raros, principalmente em imagens de RM. Vale ressaltar que a base de imagens usadas no presente trabalho ainda está em construção, o que descarta a possibilidade do uso da mesma por outros autores para fins comparativos.

Para lidar com essas limitações, futuramente será realizada a avaliação de outras arquiteturas de redes neurais convolucionais, incluindo redes com transformadores. Também será aplicada a técnica de validação cruzada para maior robustez dos resultados obtidos. Além disso, uma análise estatística será executada para inferir os resultados para a população de onde a amostra foi retirada, através de intervalos de confiança construídos e testes estatísticos, como o teste qui-quadrado. Os próximos trabalhos incluem a segmentação do útero, a detecção dos focos de adenomiose e a construção de uma pipeline que integre todas as etapas do projeto, incluindo a detecção e recorte automático da região do útero.

CONCLUSÃO

Com base nos resultados, os valores das métricas são promissores, havendo um número considerável de acertos. Para melhorá-los será necessário principalmente um maior número de imagens e a implementação de novas técnicas além do aumento de dados para ter um conjunto significativo de imagens. As acurácias nos conjuntos de treinamento, validação e teste foram 96.05%, 92.6% e 88.3%. Isso mostra que mesmo sem o número de imagens ideal, o aumento de dados e técnicas de regularização, além da camada de *Dropout* diminuíram o overfitting dos dados, tornando o modelo generalizado e eficaz em imagens diversas.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pelo financiamento da bolsa de estudos e a DASA pelo fornecimento das imagens utilizadas.

REFERÊNCIAS

ABU HASHIM, H. *et al.* **The prevalence of adenomyosis in an infertile population: a cross-sectional study.** Reproductive Biomedicine Online, v. 40, p. 842-850, 2020.

AWARI. **Deep Learning na Medicina: Avanços e Aplicações.** Disponível em: <https://awari.com.br/deep-learning-na-medicina-avancos-e-aplicacoes/>. Acesso em: 10 fev. 2025.

BAZOT, M.; DARAÏ, E. **Role of transvaginal sonography and magnetic resonance imaging in the diagnosis of uterine adenomyosis.** Fertility and Sterility, v. 109, p. 389-397, 2018.

BIRD, C. C.; McELIN, T. W.; MANALO-ESTRELLA, P. **The elusive adenomyosis of the uterus - Revisited.** American Journal of Obstetrics and Gynecology, v. 112, p. 583-593, 1972.

BRADSKI, G. **The OpenCV Library.** Dr. Dobb's Journal of Software Tools, v. 120, p. 122-125, 2000.

CUNHA, M. V. *et al.* **Pré-processamento das imagens de ressonância magnética ginecológicas e detecção do útero usando aprendizagem profunda (*Deep Learning*).** Livro de Resumos da SEMIC-UERJ 2023. SEMIC-UERJ. Setembro, 2023. p. 631-632.

Disponível em: <http://www.dcarh.pr2.uerj.br/download/LIVRO-DE-RESUMOS-SEMIC-UERJ-2023.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2025.

DENG, J. *et al.* **ImageNet: A Large-Scale Hierarchical Image Database.** IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), p. 248-255, 2009.

GORDTS, S.; GRIMBIZIS, G.; CAMPO, R. **Symptoms and classification of uterine adenomyosis, including the place of hysteroscopy in diagnosis.** Fertility and Sterility, v. 109, p. 380-388.e1, 2018.

HE, K. *et al.* **Deep residual learning for image recognition.** IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, p. 770-778, 2016.

KERAS. **Keras: Deep Learning for humans.** Disponível em: <https://keras.io/>. Acesso em: 10 fev. 2025.

LI, J.; WANG, W.; LIAO, L.; LIU, X. **Analysis of the nonperfused volume ratio of adenomyosis from MRI images based on few-shot learning.** Physics in Medicine & Biology, v. 66, n. 4, p. 045019, 2021.

LIU, L. *et al.* **Diagnostic Accuracy of Transvaginal Ultrasound and Magnetic Resonance Imaging for Adenomyosis: Systematic Review and Meta-Analysis and Review of Sonographic Diagnostic Criteria.** Journal of Ultrasound in Medicine, v. 40, p. 2289-2306, 2021.

MAKESENSE.AI. **MakeSense: Free online AI annotation tool.** Disponível em: <https://www.makesense.ai>. Acesso em: 10 mar. 2025.

NELSEN, L. M. *et al.* **Experience of Symptoms and Disease Impact in Patients with Adenomyosis.** Patient, v. 11, p. 319-328, 2018.

PEDREGOSA, F. *et al.* **Scikit-learn: Machine Learning in Python.** Journal of Machine Learning Research, v. 12, p. 2825-2830, 2011.

PUENTE, J. M. *et al.* **Adenomyosis in infertile women: prevalence and the role of 3D ultrasound as a marker of severity of the disease.** Reproductive Biology and Endocrinology, v. 14, p. 60, 2016.

RAIMONDO, D. *et al.* **Application of deep learning model in the sonographic diagnosis of uterine adenomyosis.** International Journal of Environmental Research and Public Health, v. 20, 2023.

TAMAI, K. *et al.* **MR imaging findings of adenomyosis: correlation with histopathologic features and diagnostic pitfalls.** Radiographics, v. 25, p. 21-40, 2005.

TAMAI, K. *et al.* **Spectrum of MR features in adenomyosis.** Best Practice & Research Clinical Obstetrics & Gynaecology, v. 20, p. 583-602, 2006.

TARAN, F. A. *et al.* **Understanding adenomyosis: a case control study.** Fertility and Sterility, v. 94, p. 1223-1228, 2010.

UPSON, K.; MISSMER, S. A. **Epidemiology of Adenomyosis**. *Seminars in Reproductive Medicine*, v. 38, p. 89-107, 2020.

VAN ROSSUM, G. **Python Library Reference**, 1995. Disponível em: <https://ir.cwi.nl/pub/5009/05009D.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2025.

VERCELLINI, P. *et al.* **Uterine adenomyosis and in vitro fertilization outcome: a systematic review and meta-analysis**. *Human Reproduction*, v. 29, p. 964-977, 2014.

ZHAO, Q. *et al.* **Automatic diagnosis for adenomyosis in ultrasound images by deep neural networks**. *European Journal of Obstetrics & Gynecology and Reproductive Biology*, v. 301, p. 128-134, 2024.

ESTABILIDADE DE POÇOS: ABORDAGEM ANALÍTICA EM CILINDROS OCOS

Renan Pereira Souza^{a,1}, Patrícia Nunes da Silva^{a,2}

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: A perfuração de poços é uma etapa crucial na extração de hidrocarbonetos, uma vez que o colapso do poço pode acarretar impactos financeiros significativos. Este capítulo tem como objetivo apresentar uma análise simplificada das equações de equilíbrio de um cilindro oco, utilizando um método analítico para examinar o comportamento da tensão e deformação nesse contexto. Essa abordagem permite uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos que ocorrem durante a perfuração, bem como das interações entre o poço e as formações geológicas circundantes. O modelo analisado é fundamental para compreender a estabilidade do poço, pois permite prever a distribuição das tensões ao redor do furo e analisar a influência da pressão interna do fluido e da tensão externa da formação.

Palavras-chave: Elasticidade; poços; leis constitutivas; cilindro oco.

INTRODUÇÃO

A engenharia de petróleo é uma área de grande relevância dentro das ciências exatas, essencial para a extração de hidrocarbonetos. Nesse contexto, engenheiros desempenham um papel fundamental na determinação das condições físicas e geológicas da área de perfuração, bem como no monitoramento do comportamento do reservatório ao longo do processo extrativo. Além disso, a engenharia de petróleo também está intimamente

¹ renan.prrs@gmail.com

² nunes@ime.uerj.br

ligada à sustentabilidade e à eficiência energética, uma vez que a exploração de recursos naturais deve ser realizada de forma a minimizar impactos ambientais e maximizar a recuperação dos reservatórios.

O estudo da estabilidade de poços tem natureza multidisciplinar envolvendo diversas áreas das ciências como: geologia, engenharia mecânica e matemática. Essa complexidade exige uma análise integrada para garantir que a perfuração ocorra de maneira segura e eficiente. A indústria de petróleo e gás depende anualmente milhões de dólares na perfuração de poços para extração de hidrocarbonetos, tornando essencial o gerenciamento da tensão ao redor dessas estruturas para evitar colapsos e danos financeiros substanciais. Para abordar esse desafio, técnicas de análise de tensão-deformação são essenciais.

A análise de estabilidade de poços também deve considerar as propriedades mecânicas das rochas, como resistência à compressão e ao cisalhamento, além das condições de pressão e temperatura do reservatório. Esses fatores influenciam diretamente a integridade estrutural do poço e a eficiência do processo de extração. Portanto, o desenvolvimento de modelos matemáticos e simulações computacionais que integrem esses aspectos é crucial para prever e mitigar possíveis falhas durante a perfuração.

Além disso, a evolução tecnológica tem permitido a utilização de ferramentas avançadas, como sensores de monitoramento em tempo real e técnicas de inteligência artificial, para aprimorar a análise de estabilidade de poços. Essas inovações não apenas aumentam a precisão das previsões, mas também reduzem os riscos operacionais e os custos associados à perfuração. Dessa forma, a engenharia de petróleo continua a se beneficiar de avanços interdisciplinares, garantindo a segurança e a eficiência na exploração de recursos energéticos.

A solução de problemas de mecânica aplicados à estabilidade de poços, conforme descrito por Chen [1], envolve três etapas fundamentais: a aplicação das equações de equilíbrio, a consideração das condições de geometria ou compatibilidade das

deformações e a utilização das leis constitutivas do material, que descrevem as relações entre tensão e deformação. De acordo com Biot [2], um material se deforma ao reagir à ação de forças externas, evidenciando a importância do estudo da estabilidade na perfuração de poços.

DESENVOLVIMENTO

Fjær *et al.* [3] afirmam que, quando um corpo está em repouso sob a ação de forças, essas devem estar em equilíbrio, ou seja, devem se anular mutuamente. Essa condição implica requisitos específicos para o tensor de tensões, uma representação matemática das forças internas atuantes em um corpo.

O equilíbrio das tensões é expresso em coordenadas cilíndricas, permitindo relacionar as tensões dentro de um corpo com as forças internas e externas atuantes em sua superfície. Três equações de equilíbrio descrevem essa relação para um elemento infinitesimal do corpo em termos dos seis componentes do tensor de tensão.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho_{fr} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho_{f\theta} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho_{fz} = 0. \quad (3)$$

A influência do material é expressa por um conjunto de equações, nomeadas como equações constitutivas. Elas definem como os materiais respondem às tensões aplicadas. No caso linear, existem seis equações expressando os componentes de deformação em termos de componentes de tensão, ou vice-versa. Estas são conhecidas como a lei de Hooke:

$$\sigma_r = (\lambda_{fr} + 2G_{fr})\varepsilon_r + \lambda_{fr}\varepsilon_\theta + \lambda_{fr}\varepsilon_z \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = \lambda_{fr}\varepsilon_r + (\lambda_{fr} + 2G_{fr})\varepsilon_\theta + \lambda_{fr}\varepsilon_z \quad (5)$$

$$\sigma_z = \lambda_{fr}\varepsilon_r + \lambda_{fr}\varepsilon_\theta + (\lambda_{fr} + 2G_{fr})\varepsilon_z \quad (6)$$

$$\tau_{r\theta} = 2G_{fr}\Gamma_{r\theta} \quad (7)$$

$$\tau_{rz} = 2G_{fr}\Gamma_{rz} \quad (8)$$

$$\tau_{\theta z} = 2G_{fr}\Gamma_{\theta z} \quad (9)$$

σ_r , σ_θ e σ_z representam as tensões radial, tangencial e axial, respectivamente. Elas são calculadas somando as contribuições das deformações nas direções radial, tangencial e axial, multiplicadas pelos coeficientes elásticos apropriados. $\tau_{r\theta}$, τ_{rz} e $\tau_{\theta z}$ representam as tensões de cisalhamento radial-tangencial, radial-axial e tangencial-axial, respectivamente. São calculadas como o dobro do módulo de elasticidade tangencial multiplicado pela taxa de deformação de cisalhamento correspondente.

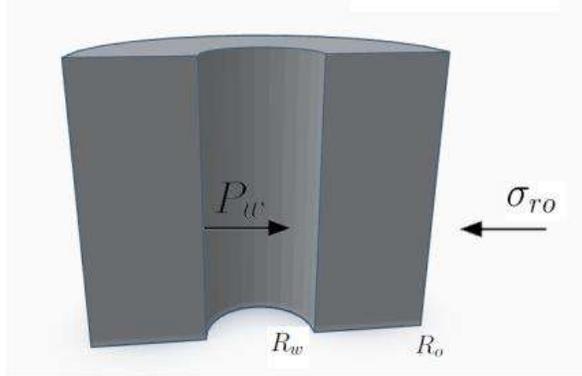
O estado de deformação completo em um ponto dentro de um corpo segundo as direções r θ é descrito por Fjær *et al.* [3] através das equações (10), bem como as tensões efetivas descritas em (11)

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (10)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\alpha p_f, \quad (11)$$

Fjær *et al.* [3] apresentam o problema do cilindro oco infinito, representado na Figura 1, considerando simetria rotacional e translacional, o que resulta em uma pressão constante ao longo de seu eixo. As tensões no cilindro são distribuídas uniformemente. Inicialmente carregado com uma tensão axial σ_v , é possível derivar expressões para as tensões quando submetido a uma pressão interna p_w e uma tensão externa σ_{ro} . As tensões externas no cilindro são normais e independentes de θ e z , de modo que os eixos cilíndricos representam as direções das tensões principais. A única deformação significativa ocorre na direção radial, sem variação ao longo do eixo. Assim, o modelo estará em deformação plana, implicando que a deformação axial $\varepsilon_z = 0$.

Figura 1. Seção do modelo de cilindro oco.



Fonte: Adaptado de Fjær *et al.* [3].

Ignorando as forças de corpo e considerando que, na deformação plana, não há variação ao longo do eixo z , as derivadas com respeito a z são nulas. Além disso, devido à simetria circunferencial, não há variação com relação ao ângulo θ , o que implica derivadas nulas em relação a θ . Finalmente, como as forças de cisalhamento são nulas, as equações de equilíbrio (1)-(3) são simplificadas para uma única

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Agora substituímos a tensão pelo deslocamento radial u usando (4)-(9) (lei de Hooke), a definição de tensão efetiva (7), e as deformações em termos de u das equações (10) e em (11). O resultado é

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{\alpha}{\lambda_{fr} + 2G_{fr}} \frac{dp_f}{dr} = 0. \quad (12)$$

A equação diferencial ordinária (12) descreve o comportamento do deslocamento radial u em função da pressão interna p_f e das propriedades elásticas do material. Quando esta EDO de segunda ordem é resolvida, as deformações radial e tangencial podem ser determinadas, e assim as tensões podem ser encontradas usando a lei de Hooke.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As formações subterrâneas estão constantemente submetidas a tensões, principalmente devido à sobrecarga e às forças tectônicas. Durante a perfuração de um poço, a remoção de material sólido faz com que a sustentação da parede do poço dependa exclusivamente da pressão do fluido no interior do furo. Como essa pressão geralmente não corresponde às tensões naturais da formação, ocorre uma redistribuição de tensões ao redor do poço. Esse processo pode gerar tensões superiores à capacidade de resistência da formação, resultando em falhas estruturais. Dessa forma, compreender as tensões ao redor do poço é fundamental para a análise e prevenção de problemas operacionais.

Fjær *et al.* [3] analisam o problema de um cilindro oco infinito submetido a pressão interna e tensão externa uniformes. Considerando uma configuração com simetria rotacional e translacional, a pressão ao longo do eixo do cilindro permanece constante. Isso permite determinar a distribuição das tensões no material utilizando a Lei de Hooke e as equações de equilíbrio, resultando em uma equação diferencial que, ao ser resolvida, fornece os valores das deformações radial e tangencial, permitindo a avaliação da estabilidade do poço. A análise das equações de equilíbrio do cilindro oco fornece uma compreensão fundamental da mecânica envolvida na estabilidade de poços durante a perfuração. Através da aplicação das equações de equilíbrio e das leis constitutivas, é possível prever o comportamento do poço sob diferentes condições de carga, contribuindo para a prevenção de colapsos e fraturas na formação e, conseqüentemente, minimizando os impactos financeiros associados.

Além disso, é importante considerar que as formações geológicas raramente são homogêneas ou isotrópicas, o que pode influenciar significativamente a distribuição de tensões ao redor do poço. Fatores como a presença de falhas geológicas, variações litológicas e a anisotropia das propriedades mecânicas das rochas podem alterar o comportamento esperado do poço sob carga.

Portanto, modelos mais avançados, que incorporem essas complexidades, são necessários para uma análise mais precisa da estabilidade de poços. Ferramentas computacionais, como simulações numéricas por elementos finitos, têm sido amplamente utilizadas para modelar cenários mais realistas, permitindo uma avaliação mais robusta dos riscos associados à perfuração e à produção de hidrocarbonetos. Essa abordagem complementar pode ser crucial para otimizar o projeto de poços e garantir a segurança operacional em ambientes geológicos desafiadores.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), processos E-26/010/101140/2018 e SEI-260003/014695/2022.

REFERÊNCIAS

- [1] CHEN, W. F.; SALEEB, A. F. **Constitutive Equations for Engineering Materials: Volume 1: Elasticity and Modeling**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [2] BIOT, M. A. **General theory of three-dimensional consolidation**. Journal of Applied Physics, v. 12, p. 155-164, 1941.
- [3] E. Fjær, R.M. Holt, P. Horsrud e A.M. Raaen. **Petroleum Related Rock Mechanics**. Amsterdam: Elsevier Science, 2008.

APRENDENDO QUÍMICA NA PRÁTICA: OFICINAS DE GELEIA PARA BANHO COMO ESTRATÉGIA EDUCACIONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

**Elizabeth Teixeira de Souza^{a,1}, Amanda Monsores
Meuser^a, Luana Dias da Silva^a, Mayara Fajardo
Benevenuto Spizzirri^a, Luiza de Sant'Anna Gouveia
Dittz Chaves^a**

^a Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: O presente trabalho propõe o uso de oficinas pedagógicas como instrumento contextualizador de vários temas da Química, como: ligações químicas, forças intermoleculares, tipos de fórmulas químicas, entre outros. Aliado a confecção artesanal de geleia de banho de maracujá as oficinas proporcionam um ambiente de aprendizagem colaborativo, investigativo e incentivador do protagonismo juvenil. Foi possível atender alunos de várias escolas estaduais do Rio de Janeiro que puderam participar do evento XVII Semana do IME.

Palavras-chave: Ensino de química; goma xantana; formulação; ensino-aprendizagem.

INTRODUÇÃO

O ensino de química no Brasil ainda apresenta características fortes do ensino tradicional como, memorização de fórmulas e conceitos, foco no conteúdo, repetição de informações sem qualquer conexão com a realidade discente, uso apenas de aulas expositivas sem uso de experimentos que proporcionem ao

¹ bethytx@gmail.com.

discente a oportunidade de observar um fenômeno químico e aplicar o método científico para concluir o que está ocorrendo (Silva, 2019).

Todas estas características geram um desinteresse pelo alunado que anseia ver algum sentido no que estuda e deseja aplicar o que aprende nas aulas no seu cotidiano, usando os conceitos químicos como uma ferramenta capaz de ler e compreender o mundo que vive (Abreu, 2016).

As metodologias ativas surgem como uma alternativa para minimizar esta problemática, pois são metodologias que incentivam o pensamento crítico, a resolução de problemas a partir da observação da realidade, o trabalho colaborativo e o protagonismo juvenil (Rocha, 2020). Elas inserem o aluno no centro do processo de ensino-aprendizagem, ele passa a ser o protagonista de seu próprio aprendizado, atuando o professor como mediador que o conduzirá no processo.

São exemplos de metodologias ativas: experimentação, oficinas pedagógicas, gamificação, estudo de casos, aprendizagem baseada em problemas, entre outras. As oficinas pedagógicas são uma estratégia eficaz no ensino de química, pois permitem o uso da experimentação, a interação entre os alunos e o professor, e a construção de conhecimentos, através do desenvolvimento do protagonismo juvenil (Oliveira, 2021). Além de possibilitarem a divulgação científica, as oficinas podem contribuir também para minimizar o efeito desmotivador do ensino baseado na transmissão e recepção de informações, de modo a dar mais sentido ao aprendizado e despertar o interesse pelo estudo da química (Lura, 2022).

Diante disso, a preocupação deste capítulo do presente livro desdobra-se em duas direções. Numa delas, oferece-se uma alternativa relacionada à produção artesanal de geleia para banho, na outra, discute-se uma alternativa pedagógica para impulsionar sua popularização a partir do ensino da Química usando as oficinas pedagógicas, a fim de fortalecer esse ensino como instrumento de desenvolvimento da cidadania e do protagonismo juvenil.

O trabalho divide-se em seis seções, além desta introdução. A próxima apresenta os fundamentos da alternativa pedagógica mencionada. A segunda seção trata de aspectos químicos da geleia para banho. A terceira discute os materiais e o método proposto para sua produção. A quarta seção resume seus resultados, a quinta levanta algumas discussões sobre eles e a sexta e última conclui o capítulo.

USO DE OFICINAS PEDAGÓGICAS NO ENSINO DE QUÍMICA

Segundo Marcondes (2008), as oficinas temáticas são estratégias educacionais que combinam teoria e prática na resolução de problemas. Para que essa abordagem seja eficaz, é primordial que a discussão vá além da apresentação de conceitos, incentivando os alunos a compreenderem sua realidade e desenvolver habilidades para analisar e propor soluções (Silva, 2014). Tais oficinas integram diferentes áreas do conhecimento, articulam conteúdos e contexto social, dessa forma, os temas trabalhados possibilitam a conexão entre o conhecimento prévio dos estudantes e os conteúdos científicos, inserindo-os em um contexto social significativo.

Já as oficinas pedagógicas são atividades de caráter lúdico e pedagógico que visam desenvolver competências relacionadas ao processo de aprendizagem escolar, são uma ferramenta importante para a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento de habilidades, são estratégias didáticas que possibilitam os alunos articularem a teoria e a prática, promovem situações de experiências significativas e espaço de aprendizagem para os educandos (Takahashi, 2021).

Winkler e colaboradores (2017) discutem a importância das oficinas como alternativa ao ensino tradicional de Química. destacam que estas promovem um aprendizado mais contextualizado, interativo e significativo, despertando o interesse

dos alunos e estimulando sua participação ativa no processo de ensino-aprendizagem.

O trabalho propôs a elaboração e aplicação de uma oficina sobre Produtos Naturais, voltada para alunos do Ensino Médio e licenciandos em Química com objetivos de: avaliar a eficácia das oficinas na construção do conhecimento; desenvolver habilidades nos alunos, como pensamento crítico, argumentação e interação social; proporcionar aos licenciandos uma experiência prática e reflexiva sobre sua futura atuação docente.

Os pesquisadores concluíram que a metodologia de ensino estudada se mostrou uma ferramenta eficaz na construção do conhecimento e no incentivo à participação dos alunos. Além disso, favoreceu uma aprendizagem mais ativa e significativa, contribuindo para a formação de cidadãos mais críticos e preparados para compreender a ciência no seu dia a dia.

Oliveira (2021) aborda a importância das oficinas temáticas como ferramenta metodológica para tornar o ensino de Química mais significativo e contextualizado. A pesquisa investiga a aplicação da oficina “Química uma sensação – que função ela tem?”, desenvolvida com alunos do Ensino Médio, com foco na relação entre Química Orgânica e a percepção de aromas. Os pesquisadores concluíram que mostraram um método eficaz para aproximar os alunos da Química e promover uma aprendizagem mais interativa e contextualizada. O uso de metodologias como os Três Momentos Pedagógicos e a experimentação prática contribui para uma construção do conhecimento mais significativa, ajudando os estudantes a compreenderem melhor os conteúdos e sua aplicação na vida cotidiana.

Andrade e Maia (2022) descreveram a aplicação da oficina “A Química da Batata Frita Perfeita”, desenvolvida para ensinar cinética química e os fatores que afetam reações químicas. A pesquisa se baseia na abordagem dialógica de Freire e nos Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov, que estruturam o ensino em: Problematização inicial, Organização do conhecimento e Aplicação do conhecimento. O estudo conclui que oficinas

pedagógicas são ferramentas eficazes para o ensino de Química, pois estimulam o aprendizado significativo e a autonomia dos alunos, favorecendo a construção do conhecimento de maneira interativa e contextualizada.

Diante do exposto é possível inferir que o uso de oficinas é extensamente usado por vários pesquisadores e apresentam resultados muito positivos no processo ensino aprendizagem do alunado, sendo assim seu uso é extremamente indicado para minimizar a problemática da abordagem fortemente teórica da química, ainda praticada no Brasil.

FORMULAÇÕES DE GÉIS PARA BANHO

Os géis cosméticos e dermatológicos são dispersões semi-sólidas que se liquefazem ao contato com a pele, deixando uma camada fina não gordurosa, e são obtidos por mistura de materiais naturais ou sintéticos na água ou mistura de solventes em um processo chamado de geleificação. Esse processo é utilizado não apenas para a formação de géis, mas também para melhorar a absorção de água, efeitos espessantes, fixação de partículas, e estabilizar emulsões e espumas (Pereira, 2019).

A geleia de banho proposta pelo presente trabalho pode ser produzida artesanalmente segundo a metodologia de Mattos (2024) que propõe uma mistura de materiais de baixo custo e fácil acesso, sendo eles: goma xantana; glicerina; lauril líquido; água; essência; corante.

Vale destacar que na formulação original proposta por Mattos (2024) era usado o nipaguard, um conservante para meio aquoso, porém optou-se por não usar tal ingrediente, pois segundo Vandeweghe e Lapeere (2018) ele pode causar alergias atópicas na pele.

A Goma Xantana é um biopolímero, produzido em processos fermentativos por micro-organismos do gênero *Xanthomonas* espécie *X. campestris*, sua estrutura consiste em uma cadeia principal de (1,4) β -D-glicose com estrutura muito parecida

à da celulose. Este polissacarídeo hidrossolúvel é um aditivo alimentar utilizado em diversos produtos, principalmente como agente espessante, emulsificante e estabilizante. Na indústria cosmética, é muito utilizada para encorpar produtos como cremes, hidratantes e xampu, servindo como agente espessante e mantendo a uniformidade do produto (Pereira, 2019).

A Glicerina (glicerol), é um composto orgânico líquido, incolor e viscoso, presente em diversos produtos cosméticos, pois ela possui propriedades, umectantes, lubrificantes e higroscópicas, então quando dissolvida em água e combinada a outros materiais, promove funções benéficas de hidratação e maciez em produtos para a pele ou cabelo (Beatriz, A., 2011).

O Lauril Éter Sulfato de Sódio, o lauril líquido, é um tensoativo suave responsável por reduzir a tensão superficial da água, permitindo que ela interaja mais facilmente com outras substâncias (Barbosa, 1995). Também é um agente de limpeza, sendo assim, muito utilizada em produtos higiênicos, tais como sabonetes, xampu, creme de barbear, entre outros, possuindo alta função desengordurante e a propriedade de limpar a pele.

A água mineral terá a função de hidratar e dar maior volume a consistência da geleia, dissolvendo também a glicerina, permitindo-a desempenhar suas devidas funções.

As essências são compostos orgânicos aromáticos presentes em flores, frutas, especiarias, entre outros, e são responsáveis por atribuir fragrância ao produto. Esses compostos aromáticos podem ser do tipo natural ou sintético, sendo extraídos em forma de óleos essenciais por meio de processos laboratoriais como, por exemplo, destilação por arraste à vapor. Os corantes, assim como as essências, podem ser naturais ou sintéticos, e possuem a finalidade apenas decorativa para os produtos, para dar uma cor mais apresentável ao produto.

METODOLOGIA

O presente trabalho propõe e aplica uma oficina pedagógica que foi realizada no evento XVII Semana do IME- Biomas do Brasil: diversidade, saberes e tecnologias sociais, no dia 25 de outubro de 2024 de 14:30 até 16:30, intitulada: Ciência para curiosos: Oficinas para o ensino básico. O público-alvo foram alunos do ensino médio de escolas estaduais que foram até a UERJ com seus professores participarem do evento. Foi escolhido o tópico forças intermoleculares e solubilidade, para abordar durante a oficina e para explicar o porquê era necessário dissolver toda goma xantana na glicerina antes de adicionar os outros ingredientes. Porém é possível com este experimento abordar muitos temas da química, como: Massa atômica e molecular, mol; Tipos de fórmulas químicas; Geometria molecular; Polaridade; Interações Intermoleculares, Funções Orgânicas; Soluções/Diluição; Unidades de concentração; Misturas; Classificação de Carbono e cadeia, Biomoléculas; Saponificação; Misturas. Vale ressaltar que estes temas estão presentes nos 3 segmentos do ensino médio, podendo o professor aplicar em qualquer série que estiver atuando no momento. É indicado aplicar o experimento em pequenos grupos, para facilitar a visualização e a explicação, obtendo assim um melhor controle da turma.

Ao receber os estudantes em uma sala, foi realizada uma contextualização introdutória com abordagem histórica, explicação sobre os reagentes para a produção de geleia para banho, e a relação entre as forças intermoleculares e a solubilidade, em seguida, iniciou-se o experimento utilizando os materiais necessários com suas respectivas quantidades: 2g de goma Xantana, 7 mL de glicerina, 17 mL de lauril líquido, 100 mL de água, 5 mL de nipaguard, 15 mL de essência, corante (o quanto necessário) e semente de maracujá seca. Seguiu-se o procedimento experimental para a síntese do produto, proposto por Mattos (2024). Dependendo do número de alunos no grupo, realiza-se os ajustes proporcionais para as quantidades a serem utilizadas,

tendo-se como base que esse roteiro rende cerca de 120 mL de produto final. Vale ressaltar que foi solicitado que cada ingrediente fosse pesado e adicionado por um aluno diferente a fim de proporcionar o contato com o experimento para o maior número possível de adolescentes.

Ao término do experimento os alunos envasam o produto em potes plásticos de 35 mL com tampa e cada um pode levar para casa uma amostra da geleia de banho de maracujá produzida (Figura 1).

Figura 1. Fotos do produto final.



Fonte: As autoras, 2025.

RESULTADOS

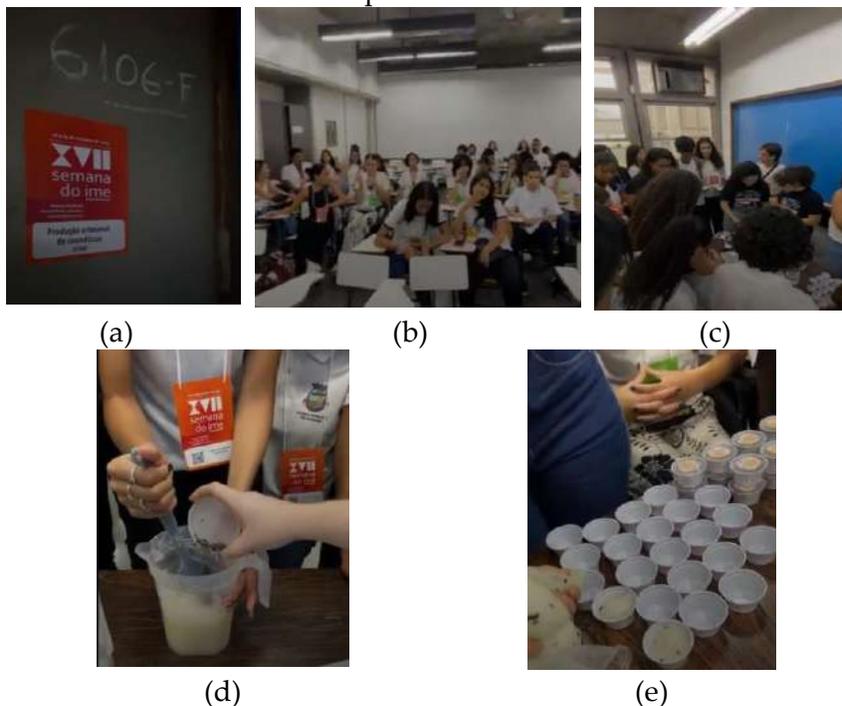
A oficina proposta foi bem recebida pelos alunos, pois eles se envolveram na atividade experimental, aprenderam o procedimento experimental de pesagem de substâncias, e compreenderam melhor como a química está presente no cotidiano e sua importância na sociedade, como cidadão crítico e consciente.

Os discentes demonstraram interesse no assunto sobre cosméticos, e se mostraram entusiasmados em produzir o cosmético proposto na oficina. Puderam usar o conceito de forças intermoleculares e solubilidade para obterem sucesso na síntese do produto proposto, usando assim o conhecimento químico como uma ferramenta para atuar na vida cotidiana.

O produto final foi confeccionado e testado pelos discentes e o resultado foi satisfatório, apresentou um aspecto real de geleia

de maracujá comestível, com a mesma consistência, cor e aroma, além de fornecer maciez à pele e produção de espuma ideal. Com isso, usando pouca quantidade de produto já é possível obter a ação de limpeza desejada para um banho. Abaixo apresenta-se algumas fotos do evento na Figura 2.

Figura 2: (a) porta da sala reservada para oficina (b) alunos que compareceram ao evento (c) discentes interagindo na síntese do produto (d) alunos adicionando os reagentes e (e) envase do produto.



Fonte: As autoras, 2025.

DISCUSSÃO

A experimentação aliada a oficina pedagógica cria um ambiente descontraído e investigativo, o que não só torna o processo de aprendizagem mais envolvente, mas também prepara os alunos para se tornarem cidadãos críticos e participativos. Eles

são capacitados a analisar questões complexas, procurar soluções inovadoras e fazer contribuições valiosas para a sociedade. No que diz respeito ao uso da oficina pedagógica, ela abordou temas do cotidiano dos alunos e, além de tornar os conhecimentos químicos mais aplicáveis e relevantes, também despertou o senso crítico e a habilidade de estabelecer conexões entre eventos, permitindo que os alunos discutissem questões mesmo após a realização da atividade.

Outro ponto importante é o incentivo ao trabalho em equipe, tanto nas oficinas quanto na experimentação. Nesse contexto, cada aluno contribuiu para a síntese do produto proposto, colaborando com os colegas, o que possibilitou o aprendizado mútuo e a troca de experiências, valorizando as diferentes habilidades em busca de um objetivo comum.

Por fim, fica claro que metodologias diversificadas podem trazer benefícios significativos para os processos de ensino e aprendizagem, uma vez que atendem a um público heterogêneo dentro da sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A expectativa é que os alunos tenham reconhecido a química como uma ferramenta útil que contribui para melhorar a vida em sociedade, compreendendo que as atividades experimentais oferecem um ambiente mais descontraído e investigativo para o aprendizado, focado no diálogo, questionamento e discussão. Assim, ao adotar uma abordagem de ensino baseada em experimentação e atividades práticas, o tema dos cosméticos se apresenta como um excelente recurso para contextualizar o ensino de química.

É relevante destacar que, ao produzir experimentalmente um item, é possível ajustar a quantidade dos ingredientes, como o Lauril, que em excesso, como nos sabonetes industriais (para gerar mais espuma), pode causar ressecamento da pele e alergias indesejadas. Portanto, a promoção de atividades experimentais é

fundamental, não apenas para a saúde, mas também para a preservação ambiental.

Por fim, conclui-se que a oficina pedagógica se apresenta como uma excelente alternativa para minimizar os efeitos de rejeição pela química gerado pelo ensino tradicional em alguns alunos, pois possibilitou uma aprendizagem mais significativa, centrada na contextualização e no diálogo em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ABREU, N. S.; MAIA, J. L. **O Ensino de Química Usando Tema Baía de Guanabara: Uma estratégia para Aprendizagem Significativa**. Química Nova na Escola, v. 38, n. 3, p. 237-243, 2016.
- ANDRADE, B. F.; MAIA, P. F. **Oficina Pedagógica: A Química da Batata Frita Perfeita**. Química Nova na Escola, v. 44, n. 1, p. 35-43, 2022.
- BARBOSA, A. B; DA SILVA, R. R. **Xampus**. Química Nova na Escola, n. 2, p. 1-4, 1995.
- BEATRIZ, A., ARAÚJO, Y. J. K., LIMA, D. P. **Glicerol: um breve histórico e aplicação em sínteses estereosseletivas**. Química nova, v. 34, n. 2, p. 306-319, 2011.
- LURA, I. S. O. **Oficinas Pedagógicas como Estratégia Didática na Socioeducação**. 2022. 138 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2022.
- MARCONDES, M. E. R.; AKAHOSHI, L. H.; CARMO, M. P.; SILVA, E. L.; SOUZA, F. L; MARTORANO, S. A. A.; SANTOS JUNIOR, J. B.; TORRALBO, D; SUART, R. C.; SALES, M. G. P. **Uma Contribuição para o Ensino de Química: o uso de oficinas temáticas visando à formação continuada de professores**. Anais da 30ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira de Química, 2007.
- MATTOS, M. P. P.; AREAS, E. S.; MELLO, W. C.; FERREIRA, L. D.; SOUZA, E. T. **Geleia de Maracujá para Banho: Proposta de Aula Experimental no Formato de Oficina Pedagógica**. In: Química: qualidade, produtividade e inovação tecnológica Ponta Grossa-PR: Atena, 2024. p. 1-12.

OLIVEIRA, F. V.; CANDITO, V.; BRALBRANTE, M. E. F. **O uso dos sentidos, olfato e paladar, na percepção dos aromas: uma oficina temática para o Ensino de Química.** Química Nova na Escola, p. 57-64, 2021.

PEREIRA, J. F. MARIM, B. M. MALI, S. **Desenvolvimento de filmes orodispersíveis biopoliméricos à base de amido, goma xantana e gelatina.** Iniciação Científica Cesumar, v. 21, n. 1, p. 61-70. 2019.

ROCHA, C. J. T.; FARIAS, S. A. Metodologias Ativas de Aprendizagens Possíveis ao Ensino de Ciências e Matemática. **Revista da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática.** v. 8, n. 2, p. 69-87, 2020.

SILVA, A. C. S.; MONTEIRO, A. O.; SILVA, S. A.; JUCÁ, S. C. S.; PASCOAL, C. V. P. **Reflexões sobre o ensino tradicionalista de Química e uma comparação entre as ferramentas de ensino: visita técnica e softwares de simulação interativa.** Research, Society and development. v. 8, n. 8, p. e32881228, 2019.

SILVA, G.S; BRAIBANTE, M. E. F; BRAIBANTE, H. T; PAZINATO, M. S; TREVISAN, M. C. **Oficina temática: uma proposta metodológica para o ensino do modelo atômico de Bohr.** Ciência Educação, Bauru, v.20, p. 481-495, 2014.

TAKAHASHI, D. A. G.; BORDONI, A. J.; SILVEIRA, M. P.; KIOURANIS, N. M. M. **Oficinas no Ensino de Química: Uma Análise dos Trabalhos Publicados nos Anais do ENEQ (2008-2018).** Revista Valore, v. 6, p. 425-437, 2021.

VANDEWEGHE, J.; LAPEERE, H. **First report of allergic contact dermatitis caused by sorbitan caprylate.** Contact Dermatitis, v. 78, p. 162-164, 2018.

WINKLER, M. E. G.; SOUZA, J. R. B.; SÁ, M. B. Z. **A utilização de uma oficina de ensino no processo formativo de alunos de ensino médio e de licenciandos.** Química Nova na Escola, v. 39, n. 1, p. 27-34, 2017.

ARGUMENTANDO COM DOBRADURAS

Davi da Silva Rosa^{a,1}, Patrícia Nunes da Silva^a

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Este capítulo apresenta uma atividade aplicada em 2024 em uma turma de Cálculo I de uma universidade pública do Rio de Janeiro. Baseada nas Mentalidades Matemáticas de Jo Boaler, a atividade “Dobradura de Papel” incentivou a argumentação e a construção coletiva do conhecimento. Em duplas, alunos alternavam-se entre “cético” e “convencedor”, explorando conceitos geométricos. Essa abordagem interativa favoreceu uma compreensão mais profunda da matemática.

Palavras-chave: Ensino; matemática; mentalidades matemáticas.

INTRODUÇÃO

Jo Boaler, educadora matemática britânica, baseou-se nos avanços da neurociência e nas pesquisas da psicóloga americana Carol Dweck para desenvolver o conceito de Mentalidades Matemáticas. Esse conceito desafia a crença de que a habilidade matemática é inata, enfatizando que todos podem aprender a disciplina por meio de práticas pedagógicas adequadas. Boaler [1] propõe um ensino que valoriza o erro como parte essencial do aprendizado, estimula a persistência e fomenta desafios intelectuais que favorecem o desenvolvimento do pensamento matemático. Ela propõe e analisa atividades e diretrizes que buscam cultivar uma mentalidade de crescimento, conforme apresentado por Dweck [2], com o objetivo de desmistificar concepções arraigadas na sociedade sobre a matemática e tornar seu ensino mais acessível e inclusivo.

¹ davi_silva80@hotmail.com

Com base nessas abordagens, realizamos intervenções pedagógicas em uma turma de Cálculo I, composta por alunos ingressantes em um curso de Matemática (bacharelado e licenciatura) de uma instituição pública de nível superior, no primeiro semestre de 2024. O objetivo foi investigar como estratégias baseadas nas Mentalidades Matemáticas podem favorecer o raciocínio crítico, a argumentação e a construção do conhecimento matemático. Acreditamos que o ensino da matemática pode ser aprimorado por meio de metodologias que estimulam o raciocínio crítico e a argumentação, oferecendo oportunidades para que os estudantes desenvolvam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

Neste capítulo, apresentamos a atividade “Dobradura de Papel”, utilizada como a primeira intervenção na turma. Essa atividade foi desenvolvida para fomentar a comunicação matemática e o pensamento conceitual dos alunos. Explorando a argumentação e a visualização geométrica, ela possibilita uma aprendizagem mais significativa. Além disso, analisamos seu impacto e possíveis ajustes para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática, seja na educação básica ou na educação superior.

DISCUSSÃO

Muitas das concepções negativas sobre a matemática são construídas culturalmente, perpetuando a ideia equivocada de que apenas algumas pessoas possuem talento inato para a disciplina. Um exemplo comum é a crença de que a rapidez em cálculos é um indicador de inteligência matemática. Boaler [1] argumenta que essas crenças precisam ser desconstruídas e que a matemática deve ser ensinada de forma a estimular a criatividade, a investigação e a intuição. Para Boaler [1], as práticas de ensino devem promover o desenvolvimento de uma mentalidade matemática, isto é, de uma capacidade de pensar e manipular os conceitos matemáticos de

maneira versátil e criativa, estabelecendo relações e identificando padrões.

Estudos indicam que alunos que aprendem por meio de estratégias conceituais apresentam um desempenho superior e maior capacidade de transferência de conhecimento para novos problemas em comparação àqueles que se limitam à memorização. Um recurso essencial para esse desenvolvimento é a visualização dos problemas matemáticos. Boaler [1] combate a ideia de que o pensamento conceitual e a memorização são excludentes, destacando que a sedimentação do conhecimento pode ser alcançada pelo engajamento conceitual ativo com a matemática. O senso numérico, por exemplo, exige uma compreensão profunda de matemática. No entanto, requer para seu pleno desenvolvimento uma mentalidade matemática preocupada em dar sentido a números e quantidades e não somente a memorização mecânica de algoritmos. Ter uma mentalidade matemática implica em se relacionar ativamente com conhecimento matemático. Seu desenvolvimento requer aproximar o entendimento e percepção da matemática dos de um matemático profissional. É preciso que os alunos percebam a matemática como um conjunto de ideias e relações e entendam que podem pensar sobre as ideias e dar um sentido a elas. Essa percepção só pode ser desenvolvida em ambientes desafiadores e sofisticados que abram espaço para investigação, criatividade e intuição. É preciso resgatar na escola o entendimento de que a matemática é um domínio conceitual. Ela não se resume a uma lista de fatos ou métodos que devem ser memorizados.

A simplificação excessiva em livros didáticos tem efeitos devastadores. Alunos apresentados sistematicamente à versão mais simples de uma ideia, revelam-se incapazes de reconhecer conceitos importantes em diferentes contextos. O aprendizado conceitual requer a exposição a múltiplos exemplos e contraexemplos, permitindo que desenvolvam flexibilidade cognitiva e autonomia na resolução de problemas. Boaler [1] ressalta que, ao focar exclusivamente no ensino de métodos formais sem promover a

investigação e a exploração, os alunos acabam desenvolvendo mentalidades procedimentais fixas, limitando sua capacidade de compreender e aplicar a matemática em situações diversas.

Para combater esse problema, Boaler [1] propõe um ensino criativo e investigativo, com atividades que atendam a diferentes níveis de habilidade. Tarefas de “piso baixo e teto alto” são um exemplo dessa abordagem, pois oferecem desafios acessíveis a todos os alunos, ao mesmo tempo em que permitem discussões mais sofisticadas. A matemática de alto nível deve ser apresentada em um ambiente que encare o erro como parte do processo de aprendizagem, incentivando os estudantes a questionarem estratégias e padrões utilizados. A atividade “Dobradura de Papel” exemplifica essa abordagem, incentivando os alunos a justificarem suas respostas e argumentarem sobre suas soluções matemáticas.

ATIVIDADE – DOBRADURA DE PAPEL

A atividade “Dobradura de Papel”, desenvolvida por Mark Driscoll, foi utilizada para estimular a argumentação matemática e a comunicação entre os alunos. A dinâmica envolveu a formação de duplas, em que os participantes alternavam entre os papéis de cético e convencedor. O convencedor deveria justificar suas soluções com clareza, enquanto o cético questionava e pedia explicações adicionais até estar plenamente convencido. Esse processo incentivou os alunos a estruturarem suas ideias de forma rigorosa e a desenvolverem um pensamento matemático mais flexível. Segue uma descrição detalhada da atividade:

Trabalhe com um colega. Revezem-se nos papéis de cético e convencedor. Quando você é o convencedor, sua tarefa é ser convincente! Justifique todas as suas afirmativas. Céticos devem ser céticos! Não se deixe convencer facilmente. Exija razões e justificativas que façam sentido para você. Para cada um dos problemas a seguir, uma pessoa deve gerar a figura pedida e justificar o procedimento de construção. Seu colega é o cético. Ao passar para a questão seguinte, invertam os papéis. Inicie com um pedaço de papel quadrado e faça dobras para construir

uma nova forma. Depois, explique como você sabe que a forma que construiu tem a área especificada.

1. Construa um quadrado que tenha exatamente $\frac{1}{4}$ da área do quadrado original. Convença seu parceiro de que é um quadrado e que ele tem $\frac{1}{4}$ da área.
2. Construa um triângulo que tenha exatamente $\frac{1}{4}$ da área do quadrado original. Convença seu parceiro que ele é um triângulo e que ele tem $\frac{1}{4}$ da área.
3. Construa outro triângulo, também com $\frac{1}{4}$ da área, que não seja congruente com o primeiro que você construiu. Convença seu parceiro que ele é um triângulo e que ele tem $\frac{1}{4}$ da área.
4. Construa um quadrado que tenha exatamente $\frac{1}{2}$ da área do quadrado original. Convença seu parceiro de que é um quadrado e que ele tem $\frac{1}{2}$ da área.
5. Construa outro quadrado, também com $\frac{1}{2}$ da área, com orientação diferente daquela que você construiu na Questão 4. Convença seu parceiro que ele tem $\frac{1}{2}$ da área.

(Boaler [1], p. 201).

Nosso intuito ao utilizar essa atividade foi desafiar os alunos a saírem do comodismo de uma introdução à matemática simplificada e repetitiva. Como já discutido, o desenvolvimento de um pensamento matemático avançado exige que os estudantes alinhem sua compreensão e visão da matemática à de um especialista na área. Isto é, é necessário que os alunos percebam a matemática como um conjunto de ideias e relações, e entendam que podem dar sentido a essas ideias. Essa percepção não será desenvolvida em ambientes que não desafiem os alunos, pois é necessário que eles desenvolvam estratégias ao resolverem problemas. Se os estudantes não forem desafiados a buscar soluções próprias e a justificar suas respostas, eles permanecerão dependentes de abordagens mecânicas. Ambientes que favorecem a investigação, a criatividade e a intuição são essenciais para a construção de um conhecimento matemático significativo.

Procuramos resgatar no ensino o entendimento de que a matemática é um domínio conceitual e não se resume a uma lista de fatos ou métodos a serem memorizados.

Buscando reforçar essa perspectiva, adotamos na turma o livro “Cálculo Infinitesimal” de Michael Spivak [3], que oferece uma abordagem formal e rigorosa da matemática, permitindo que os estudantes tivessem, ao longo do curso, um primeiro contato com demonstrações matemáticas. Essa escolha está alinhada às ideias de Boaler [1], que defende que todos os alunos são capazes de compreender e explorar conceitos matemáticos profundos quando inseridos em um ambiente de aprendizagem desafiador e estruturado.

CONCLUSÃO

Ao final do primeiro semestre de 2024, realizamos uma análise qualitativa sobre as ações implementadas na turma de Cálculo I, visando o desenvolvimento de mentalidades matemáticas. Essa análise teve como foco principal o feedback dos alunos sobre a atividade prática "Dobradura de Papel" e a utilização do livro didático de Michael Spivak, buscando identificar padrões e nuances no engajamento e na percepção dos estudantes em relação a essas abordagens. Identificamos diferentes perfis entre os 30 alunos que permaneceram na turma. A atividade e o livro foram avaliados positivamente pela maioria, mas também evidenciaram que nem todos se sentem confortáveis com métodos menos tradicionais. A análise dos resultados indicou a importância de equilibrar atividades desafiadoras e acessíveis para manter o engajamento de todos os alunos, em consonância com o conceito de “piso baixo e teto alto” de Jo Boaler, que busca criar tarefas que permitam a entrada de todos os alunos, independentemente de seu nível de conhecimento prévio, ao mesmo tempo em que oferece desafios suficientes para aqueles que buscam ir além.

Devemos lembrar que a matemática é uma disciplina que deve destacar constantemente a profundidade do pensamento e

das relações. Portanto, percebemos que a análise e estudo dos mecanismos de desenvolvimento das mentalidades matemáticas é importante e requer que a seleção e adaptação de atividades para os alunos leve sempre em conta as seis questões norteadoras indicadas por Boaler: a tarefa permite a exploração de vários métodos, rotas e representações? É possível transformá-la em uma tarefa de investigação? É possível propor o problema antes de ensinar o método? É possível acrescentar um componente visual? É possível torná-la de “piso baixo e teto alto”? É possível exercitar a tarefa de convencimento? A si mesmo, a um amigo e a um cético?

A estratégia de separar os alunos em grupos com papéis de céticos e convencedores demonstrou ser particularmente eficaz. Ao atuarem como convencedores, os alunos aprimoram suas habilidades de argumentação e justificação, aprendendo a comunicar suas ideias de forma clara e persuasiva. Por outro lado, ao assumirem o papel de céticos, os alunos são desafiados a questionar, levantar dúvidas e analisar criticamente as soluções propostas. Essa inversão de papéis promove um ambiente de discussão e colaboração, onde os alunos se sentem encorajados a compartilhar suas ideias e a aprender uns com os outros. A comunicação matemática, incluindo a habilidade de explicar raciocínios e ouvir as ideias dos outros, é vital para o desenvolvimento de uma mentalidade matemática. É primordial que o professor sempre exija dos alunos explicações convincentes para cada passo dado e cada estratégia utilizada. Além disso, deve incentivar os alunos a questionarem, levantarem dúvidas e serem céticos sobre o que estão fazendo e aonde querem chegar.

Outro aspecto relevante da atividade é a organização dos alunos em duplas. Essa estratégia não apenas incentiva a discussão sobre a tarefa e o aprendizado, mas também promove a troca de informações e conhecimentos entre os alunos. Cada estudante possui um nível de conhecimento diferente e uma bagagem única no que se refere à matemática. Essa interação possibilita uma troca de saberes em que ambos podem se beneficiar. Ao explicar um conceito, o aluno é desafiado a estruturar sua explicação de forma

clara e coerente, o que está diretamente relacionado à habilidade de persuadir com eficiência.

Em suma, as intervenções realizadas destacaram a importância de criar um ambiente de aprendizado desafiador, onde os erros são vistos como oportunidades de crescimento e aprendizado. Através dessas atividades, os alunos puderam vivenciar aspectos importantes do pensamento matemático profissional, aprimorando suas habilidades de raciocínio, argumentação e comunicação em matemática. Ao adotar uma abordagem centrada no aluno e focada no desenvolvimento de mentalidades matemáticas, podemos capacitar os alunos a se tornarem aprendizes autônomos e confiantes, capazes de enfrentar desafios complexos e de aplicar o conhecimento matemático em diversas áreas de suas vidas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da FAPERJ, Processos SEI-260003/015892/2021 e SEI-260003/000107/2023.

REFERÊNCIAS

- [1] BOALER, J. **Mentalidades Matemáticas**: Estimulando o Potencial dos Estudantes por Meio da Matemática Criativa, das Mensagens Inspiradoras e do Ensino Inovador. Desafios da Educação. Porto Alegre: Penso Editora, 2017.
- [2] DWECK, C. S. **Mindset**: A nova psicologia do sucesso. São Paulo: Objetiva, 2017.
- [3] SPIVAK, M. **Cálculo Infinitesimal**. Madrid: Reverté, 1988.

A ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM ATIVA: RELATO DE UMA OFICINA REALIZADA NA XVII SEMANA DO IME

**Thiago Corrêa Almeida^{a,1}, Manoela Lopes Carvalho^b,
Thiago Daboit Roberto^a**

^a*Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil*

^b*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFRJ), Rio de Janeiro, Brasil*

Resumo: Este trabalho relata uma experiência de aprendizagem ativa por meio de uma oficina de robótica educacional com Arduino, realizada durante a XVII Semana do IME. A oficina teve como objetivo principal introduzir estudantes ao universo da robótica, ensinando conceitos básicos de programação e eletrônica, culminando na construção de um protótipo de semáforo. Por meio de uma abordagem “mãos na massa”, baseada na ABProj, os participantes desenvolveram habilidades em resolução de problemas.

Palavras-chave: Robótica; TICs; Aprendizagem Ativa; Arduino.

INTRODUÇÃO

A inserção de tecnologias no ambiente educacional tem se mostrado essencial para atender às demandas do século XXI, marcado pela digitalização e pela crescente dependência de soluções tecnológicas. A robótica educacional (RE) emerge como uma abordagem interdisciplinar capaz de conectar conhecimentos de ciências exatas, biológicas e humanas em atividades lúdicas e criativas. Conforme destacado por Alves e Sampaio (2014), a RE promove o aprendizado significativo e o desenvolvimento de

¹ thiago.correa.almeida@uerj.br

competências essenciais para o mercado de trabalho, como o raciocínio lógico, a criatividade e a solução de problemas.

Diante disso, metodologias ativas, como a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABProj), têm se consolidado como alternativas pedagógicas relevantes. Essas abordagens colocam o aluno no centro do processo de ensino-aprendizagem, transformando-o em agente do próprio aprendizado (Barbosa e Moura, 2013). A fim de aplicar uma proposta de metodologia ativa com foco na robótica, é necessário um dispositivo de baixo custo e que seja acessível ao grande público, tanto na aquisição, quanto na curva de aprendizado. Estes requisitos são perfeitamente preenchidos pelo microcontrolador Arduino (Banzi, 2009), criado na Itália em 2005 justamente para fins educacionais e alicerçado na proposta de baixo custo e difusão, sendo um *open hardware*. Seu uso para fins educacionais é amplamente documentado (Cavalcante *et al.*, 2011; Cordova e Tort, 2016; Souza, 2011).

Conforme aponta Almeida e Carvalho (2024), as revistas científicas, nos últimos anos, tem apresentado um baixo número de trabalhos no que tange a robótica educacional. A revisão bibliográfica feita pelos autores em quatro revistas qualis A, mapeou apenas onze artigos de um total de 823 analisados, o que nos mostra a importância de cada vez mais propormos trabalhos nesta temática e relatar atividades exitosas realizadas.

Este trabalho apresenta a experiência de uma oficina realizada na Semana do IME, cujo foco foi o ensino de fundamentos de robótica e programação com Arduino, enfatizando a construção de um semáforo como aplicação prática.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A robótica educacional é reconhecida como uma ferramenta poderosa para engajar estudantes no aprendizado de disciplinas STEAM (Ciência, Tecnologia, Engenharia, Artes e Matemática). Segundo Pereira, Araújo e Bittencourt (2019), atividades

envolvendo robótica estimulam competências chamadas de *soft skills*, sendo algumas delas:

- Raciocínio lógico;
- Organização mental;
- Habilidades de redação;
- Maior desempenho pessoal e profissional;
- Criatividade;
- Perspicácia.

Além disso, o uso de tecnologias, como a plataforma Arduino, permite a aplicação direta de conceitos teóricos em situações reais, tornando o aprendizado mais significativo e memorável (Silva *et al.*, 2021).

Metodologias ativas, como a ABProj, potencializam esses benefícios ao incentivar os estudantes a “aprender fazendo”. Essa abordagem, descrita por Bonwell e Eison (1991), envolve ação e reflexão, promovendo maior retenção de conhecimento. No contexto da robótica, atividades práticas como a construção de protótipos proporcionam uma experiência imersiva que alia teoria à prática, como observado nos projetos descritos por Almeida *et al.* (2024).

A OFICINA DE ROBÓTICA NA SEMANA DO IME

A oficina foi projetada para introduzir estudantes ao universo do microcontrolador Arduino, utilizando atividades lúdicas e desafiadoras que promovessem o engajamento e o aprendizado ativo. A dinâmica completa segue as etapas de momentos, criada pelos autores, a partir da metodologia da ABProj:

1. **Motivação:** Os estudantes assistiram a uma apresentação sobre as aplicações da robótica na indústria e no cotidiano, seguida de uma demonstração prática de projetos com Arduino. Essa introdução visou despertar curiosidade e interesse pelo tema.
2. **Preparação:** Os participantes receberam uma breve introdução teórica sobre eletrônica básica e programação

em Arduino. Foram apresentados aos componentes utilizados, como LEDs, resistores e cabos de conexão, além de instruções para uso do software Arduino IDE.

3. **Exploração:** Divididos em grupos, os estudantes exploraram os materiais e discutiram soluções para a tarefa proposta: montar um semáforo funcional.
4. **Desenvolvimento:** Os grupos iniciaram a construção dos protótipos, programando os LEDs para simular o funcionamento de um semáforo. Durante essa etapa, enfrentaram desafios como erros de programação e conexões incorretas, que foram resolvidos com a mediação dos facilitadores.
5. **Apresentação:** Ao final, os participantes apresentaram seus projetos, explicando o funcionamento e os desafios superados. Essa etapa promoveu a troca de conhecimentos e a valorização do trabalho em equipe.
6. **Reflexão:** Em um momento de encerramento, os estudantes compartilharam suas experiências, destacando o aprendizado adquirido e sugerindo aplicações futuras para os conhecimentos obtidos.

Para a oficina ofertada na XVII Semana do IME, sendo uma atividade realizada em um único dia, com duração máxima de duas horas, a proposta foi adaptada e sintetizada, englobando os momentos de 1 a 4. O espaço da oficina foi uma sala de informática, com diversos computadores com sistema operacional Linux Mint, e um Datashow para apresentação. A oficina alcançou o número máximo de vagas ofertadas (vinte), e consistiu em um público prioritário composto por estudantes da graduação, dos primeiros períodos de cursos diversos de exatas e engenharias. No entanto, é importante ressaltar, que a dinâmica da oficina já foi também realizada no CAP-Uerj, para público do Ensino Fundamental II, com bastante sucesso. O que nos mostra que atividades utilizando a robótica podem abranger uma gama bem diversa de público. Na Figura 1 apresentamos a arte de divulgação da oficina no Instagram do projeto ROBOCAP (@robocap_uerj).

Figura 1. Imagem de divulgação da oficina realizada no instagram do projeto.



Fonte: Autores, 2025.

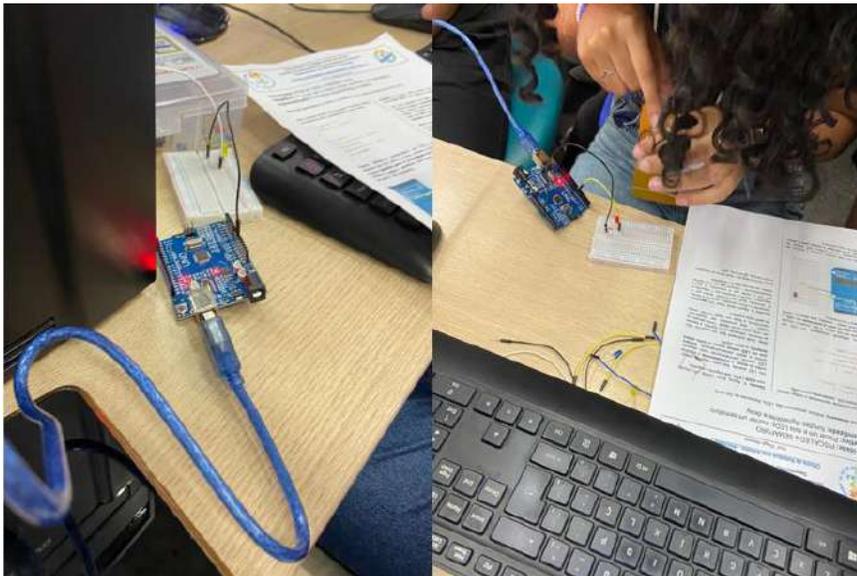
Na Figura 2 pode-se ver, à esquerda, um dosicineiros realizando atividade de programação no computador, e com o kit cedido, assim como o material didático impresso. À direita, vemos de maneira ampliada o kit arduino, adquirido na empresa “Curto Circuito”, com a placa arduino, protoboard, fios e outros sensores e atuadores. Na Figura 3 é possível ver uma oficineira manipulando o material, montando o circuito do semáforo.

Figura 2. Oficineiro e kit arduino.



Fonte: Autores, 2025.

Figura 3. Oficineira manipulando material para montagem do circuito.



Fonte: Autores, 2025.

RESULTADOS E IMPACTOS

A oficina alcançou resultados positivos, tanto no aspecto pedagógico quanto no engajamento dos participantes. A dinâmica “mãos na massa” permitiu que os estudantes consolidassem conceitos abstratos por meio da prática. Como observado em outros estudos (Almeida *et al.*, 2024), a abordagem prática promove maior retenção do conhecimento e desenvolvimento de habilidades transversais, como trabalho em equipe e pensamento crítico.

Além disso, a construção do semáforo funcional demonstrou o potencial da robótica educacional para solucionar problemas reais, estimulando a criatividade e o raciocínio lógico. Muitos participantes relataram interesse em aprofundar os conhecimentos adquiridos, manifestando intenção de explorar outros projetos com Arduino.

CONCLUSÃO

A experiência da oficina de robótica com Arduino durante a XVII Semana do IME reforça a relevância das metodologias ativas no ensino contemporâneo. Ao proporcionar um ambiente de aprendizado prático e colaborativo, atividades como essa contribuem para a formação de estudantes mais preparados para os desafios de uma sociedade tecnologicamente avançada.

Futuras edições da oficina poderiam incluir desafios mais complexos e a integração de sensores para explorar aplicações em Internet das Coisas (IoT). Assim, seria possível ampliar ainda mais o impacto pedagógico da robótica educacional, fortalecendo seu papel como catalisador da inovação no ensino.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o projeto de extensão a Uerj “Feiras Científicas para a Educação Básica”, coordenado pela professora Elizandra Martins, por auxiliar na aquisição dos equipamentos, e

também à FAPERJ, pelo auxílio através do Edital FAPERJ N 06/2024 - Programa de Apoio a Equipes Discentes em Projetos de Base Tecnológica para Competições de Caráter Educacional - 2024, Processo SEI-260003/003981/2024.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, T. C.; CARVALHO, M. L.; ROBERTO, T. D. **Aprendizagem ativa utilizando Arduino: relatos de projetos discentes**. Ciência e Tecnologia: catalisadores da inovação, Vol. 3. Ponta Grossa: Editora Atena, p. 66-74, 2024.

ALMEIDA, T. C.; CARVALHO. **A robótica como elemento motivador no ensino de física e biologia na educação básica via aprendizagem ativa: uma revisão da literatura**. Anais do X Congresso Nacional de Educação. Campina Grande: Editora Realize. 2024.

ALVES, R. M.; SAMPAIO, F. F. **DuinoBlocks: desenho e implementação de um ambiente de programação visual para robótica educacional**. Revista Brasileira de Informática na Educação, 22(3), p. 216-240, 2014.

BANZI, M. **Getting Started with Arduino**. Sebastopol: OREILLY&ASSOC. 2009.

BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. **Metodologias ativas de aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica**. Boletim Técnico do Senac, 39(2), p. 48-67, 2013.

BONWELL, C. C.; EISON, J. A. **Active learning: creating excitement in the classroom**. Eric Digests. 1991.

CAVALCANTE, M. A.; TAVOLARO, C. R. C.; MOLISANI, E. **Física com arduino para iniciantes**. Revista Brasileira de Ensino de Física, 33(4), p. 4503, 2011.

CORDOVA, H.; TORT, A.C. **Medida de g com a placa arduino em um experimento simples de queda livre**. Revista Brasileira de Ensino de Física, 38(2), p. 2308, 2016.

PEREIRA, F. T. S.; ARAUJO, L. G.; BITTENCOURT, R. **Intervenções de pensamento computacional na educação básica através de computação desplugada.** Workshop de Informática na Escola, 25, p. 315-324, 2019.

SILVA, O. H. M.; SCHMIDT, L. F.; LABURÚ, C. E. Proposta de atividade experimental para estudos de frequências de um marcador de tempo usando Arduino. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, 38(1), p. 446-458, 2021.

SOUZA, A. R.; PAIXÃO, A. C.; UZÊDA, D. D.; DIAS, M. A.; DUARTE, S.; AMORIM, H. S. A placa Arduino: uma opção de baixo custo para experiências de física assistidas pelo PC. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 33(1), p. 1702, 2011.

AR SANDBOX – UMA FERRAMENTA NA CONSCIENTIZAÇÃO PARA REDUÇÃO DE RISCO DE DESASTRES (RRD)

**Marcella Ximenes^{a,1}, Carolina Bastos^a, Francisco
Dourado^a**

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Os desafios enfrentados por parte da população do Rio de Janeiro, onde a ocorrência de chuvas intensas frequentemente gera preocupação com inundações e deslizamentos, motivaram o desenvolvimento de um projeto de conscientização que combina realidade aumentada e interatividade. Usando a tecnologia de detecção do Kinect, um projetor e uma caixa de areia, é possível a visualização em tempo real de informações topográficas, além da simulação de chuvas e sua interação com o relevo. A abordagem torna o aprendizado mais dinâmico e acessível para pessoas de diferentes idades e classes sociais, trazendo uma nova perspectiva ao estudo geomorfológico. Com o software criado pela Universidade da Califórnia, Davis, é possível mapear a superfície da areia, projetar curvas de nível e simular precipitações. Além de contar com o uso da tecnologia e apresentação em sala, foram introduzidos materiais físicos, como casas, prédios e pontes, feitos sob medida usando uma impressora 3D, para que a imersão e interação seja ainda maior.

Palavras-chave: Realidade aumentada; conscientização; simulação; topografia; caixa de areia.

¹ marcellaximenes7@gmail.com.

INTRODUÇÃO

O Estado do Rio de Janeiro apresenta uma grande diversidade de relevos e uma elevada concentração populacional, fatores que influenciam diretamente as alterações no terreno. O asfaltamento e a modificação dos cursos d'água naturais contribuem para a intensificação dos impactos das chuvas, transformando-as em verdadeiros desastres, com ruas alagadas e frequentes deslizamentos devido ao solo encharcado.

Diante desse cenário, foi desenvolvido o projeto de extensão “Com Ciência” – Realidade Aumentada aplicada à educação para Redução de Risco de Desastres, que combina tecnologia e aprendizado interativo. A iniciativa apresenta conceitos fundamentais sobre o tema e, em seguida, utiliza uma caixa de areia equipada com realidade aumentada para simular o impacto das chuvas no relevo. Além disso, peças impressas em 3D, representando casas, prédios e pontes, são disponibilizadas para que os participantes as posicionem no terreno modelado. Dessa forma, é possível visualizar, de maneira prática e dinâmica, como diferentes intensidades de chuva afetam as construções e o escoamento da água em encostas íngremes e planícies.

MATERIAIS E MÉTODOS

Com base no projeto desenvolvido pela Universidade da Califórnia, Davis, que criou o *software* e *hardware* para a caixa de areia de realidade aumentada, reproduzimos essa tecnologia no Centro de Pesquisas e Estudos sobre Desastres (CEPEDES) na UERJ. O objetivo é levar a caixa para diferentes instituições, proporcionando uma experiência interativa e inovadora sobre a interação do solo com a chuva.

O *hardware* da AR Sandbox é composto por um sensor Kinect, desenvolvido pela Microsoft, e um projetor montado sobre uma haste posicionada acima da caixa de areia (Figura 1). O Kinect utiliza tecnologia de percepção de movimento, combinando uma

câmera convencional, uma câmera de infravermelho e um projetor infravermelho. Quando ativado, ele projeta centenas de pontos em infravermelho na superfície da areia, e a câmera captura as distorções desses pontos para mapear o relevo.

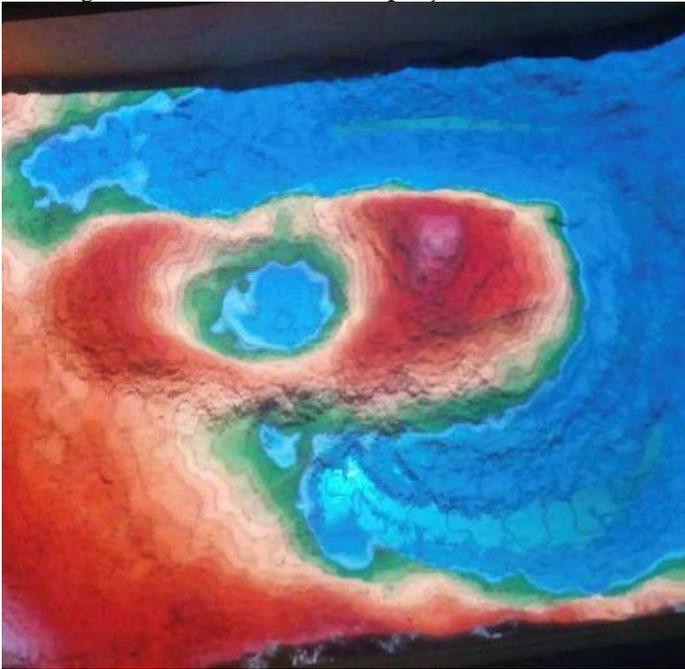
Após essa detecção, o Kinect envia as informações para o software, que interpreta a posição da areia e projeta o resultado na forma de curvas de nível (Figura 2). Qualquer alteração na disposição da areia é rapidamente refletida na projeção, ajustando automaticamente as curvas. Além disso, para simular precipitações, basta posicionar a mão aberta sobre a área desejada, ativando o efeito de chuva na projeção (Figura 3).

Figura 1. AR Sandbox.



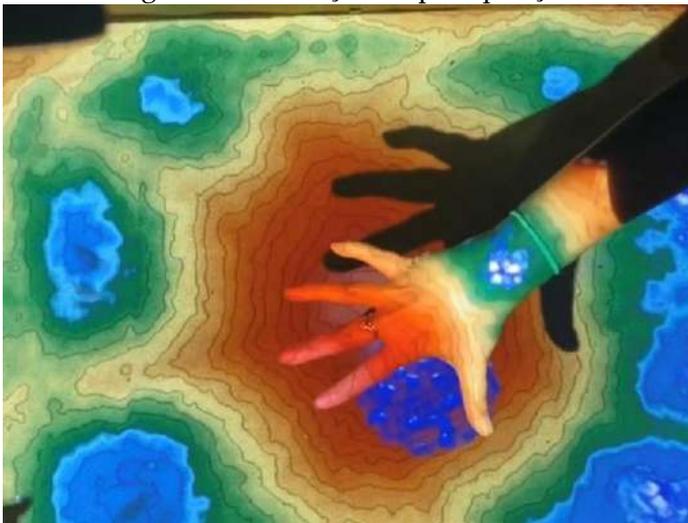
Fonte: CEPEDES/UERJ.

Figura 2. Curvas de nível projetadas na areia.



Fonte: CEPEDES/UERJ.

Figura 3. Simulação de precipitação.



Fonte: CEPEDES/UERJ.

RESULTADOS

Na realização da oficina, trabalhamos com turmas do Ensino Médio, adaptando a apresentação para torná-la mais acessível e envolvente. Inicialmente, perguntamos aos alunos sobre a localização de suas escolas para discutir os desafios ambientais específicos da região, tornando a atividade mais próxima da realidade deles e aumentando a interação.

Em seguida, apresentamos a caixa de areia, explicando seu funcionamento. Sempre que possível, tentamos reproduzir na caixa a topografia da área mencionada pelos alunos, utilizando uma abordagem lúdica. Após essa introdução, organizamos os participantes em pequenos grupos para que todos pudessem interagir diretamente com o equipamento. Cada grupo teve a oportunidade de posicionar peças e modelar a areia, modificando o terreno conforme suas próprias escolhas (Figura 4).

Na sequência, demonstramos a funcionalidade da simulação de chuva, onde os alunos podiam criar uma nuvem simplesmente abrindo a mão sobre a área desejada. Durante esse processo, destacamos a influência da topografia no escoamento da água e comentamos sobre estratégias mais eficazes para minimizar impactos ambientais (Figura 5). Muitas vezes, os próprios alunos iniciavam discussões entre si sobre os resultados observados.

Por fim, abrimos a caixa para experimentação livre, permitindo que os participantes manipulassem a ferramenta de chuva e explorassem as interações do relevo com a precipitação. Essa abordagem não apenas reforçou o aprendizado, mas também tornou a experiência mais divertida para os alunos.

Figura 4. Colocação das peças na areia.



Fonte: George Magaraia.

Figura 5. Discussão sobre o posicionamento das peças.



Fonte: CEPEDES/UERJ.

CONCLUSÃO

O projeto de extensão “Com Ciência” demonstrou como a tecnologia pode ser uma aliada poderosa no ensino e na

conscientização sobre desastres naturais. A combinação de realidade aumentada com interação prática permitiu que os participantes compreendessem, de maneira intuitiva e envolvente, a relação entre o relevo e o escoamento da água.

Ao integrar conceitos geomorfológicos com uma abordagem experimental, o projeto não apenas ampliou o interesse dos alunos pelo tema, mas também incentivou a reflexão sobre os impactos das ocupações urbanas e as estratégias para mitigar riscos em áreas vulneráveis. O uso de peças impressas em 3D e a possibilidade de simular diferentes cenários climáticos tornaram a experiência ainda mais imersiva, promovendo um aprendizado significativo.

REFERÊNCIAS

KREYLOS, Oliver. **Oliver Kreylos' Research and Development Homepage - Augmented Reality Sandbox**. Computer Science. Disponível em: <https://web.cs.ucdavis.edu/~okreylos/ResDev/SARndbox/>. Acesso em: 9 mar. 2025.

MICROSOFT PRESS STORE. **An introduction to the Kinect Sensor**. Microsoft Press Store: Books, eBooks, online resources. Disponível em: <https://www.microsoftpressstore.com/articles/article.aspx?p=2201646>. Acesso em: 9 mar. 2025.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. **UERJ realiza ação educativa com 250 alunos de escolas públicas; evento busca despertar o interesse pela ciência**. UERJ, 2025. Disponível em: <https://www.uerj.br/noticia/uerj-realiza-acao-educativa-com-250-alunos-de-escolas-publicas-evento-busca-despertar-o-interesse-pela-ciencia/>. Acesso em: 9 mar.

CONSEQUÊNCIAS DA CONTAMINAÇÃO POR PETRÓLEO E SEUS SUBPRODUTOS NO AMBIENTE MARINHO

**Douglas Eloy dos Santos^{a,1}, Sérgio Cardoso Nogueira
Filho^a, Elisabete dos Santos Vieira^a, Graziela dos
Santos Ferreira^a, Jariane Maria Santos Souza^a,
Alessandra Santos Braga^a, Pedro Nasor Felisberto dos
Santos^a, Patrícia dos Santos Matta^a**

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Com vestígios históricos remotos aos tempos antigos da humanidade, o petróleo e seus derivados tornaram-se parte destaque no cenário atual. Sua presença é notória em diversos aspectos sociais e econômicos, seja na produção de combustíveis, fabricação de lubrificantes ou presente na casa popular em formato de plástico. No entanto, é perceptível uma constante problemática da poluição por estes elementos no âmbito marítimo e os impactos causados à fauna e à flora marinha. Este estudo demonstra a comparação da presença do petróleo e seus subprodutos na indústria naval e seus impactos aos ambientes marinhos e seres vivos, assim como uma análise de possíveis soluções que possam progredir o enfrentamento da introdução e propagação desses compostos provenientes da indústria petrolífera no mar. Tal aspecto que diretamente e indiretamente dificulta o objetivo atual desta indústria, que é o processo de transição energética conforme o projeto de descarbonização da Organização Marítima Internacional (IMO).

Palavras-chave: Petróleo, Indústria Naval, Meio Ambiente, Poluição, Hidrocarboneto.

¹ douglaseloycont@gmail.com.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o debate sobre o tema sustentabilidade tem ganhado destaque nas discussões globais, demonstrando uma crescente consideração sobre o impacto das atividades humanas no meio ambiente (UN, 2024). Nesse sentido, para a formulação de um plano de preservação do meio natural de êxito tornou-se impreterível ponderar sobre um agente crucial nessa discussão, o petróleo, matéria prima que atualmente movimentada a indústria mundial, sua existência data registros remotos da antiguidade humana (Freret; Chaves; Jones, 2019, p.2).

Após a ascensão e uso constante do petróleo na idade contemporânea, notou-se uma contínua dependência mundial desta determinada matéria-prima movimentadora da economia global em inúmeros âmbitos. Especificamente observando a indústria naval, é porventura óbvia a discussão sobre a atuação e importância do petróleo nesse setor, seja agindo como área de produção e exploração, ou, como “motor” das operações desempenhadas pelas embarcações, na sua utilização para obtenção de combustíveis fósseis e outros materiais necessários para a área (Foretich *et al.*, 2021). Todavia o setor e produtos obtidos pelo popularmente conhecido “ouro negro” não apenas contribuíram para a evolução tecnológica da humanidade, mas conjuntamente protagonizaram diversos eventos históricos notáveis, exemplificativamente, temos ocorridos como o conflito Síria - Iraque (2011 - Presente) no qual o óleo cru e sua venda são as principais peças fomentadoras do atrito, o embargo econômico aos apoiadores do Estado de Israel após a guerra do Yom Kippur (1973), e principalmente o proeminente derramamento de petróleo da plataforma Deepwater Horizon em 2010 evento considerado como o maior derramamento de petróleo da história (Pallardy, 2024).

Com operação e posse responsável da empresa Transocean, no entanto, utilizado pela empresa de óleo British Petroleum (BP), a plataforma Deepwater Horizon foi palco de um acidente histórico na indústria naval que impactou drasticamente o mundo e sua

visão sobre os efeitos da poluição ao meio ambiente. Foram estimados cerca de 4,900,000 barris de petróleo despejados no Golfo do México, local do ocorrido e que após o acidente observou-se sua fauna extremamente afetada pelos vazamentos. Constataram-se milhares de espécimes originárias do ecossistema local cobertos de óleo, exemplificadamente estudos do ano de 2014 estimam que cerca de um milhão de aves morreram como consequência deste evento (Harbison, 2014).

Segundo a Lei Federal N° 6938, a poluição se categoriza como — “A degradação da qualidade ambiental resultante de atividades que direta ou indiretamente; prejudiquem a saúde, a segurança e o bem-estar da população; criem condições adversas às atividades sociais e econômicas; afetem desfavoravelmente a biota; afetem as condições estéticas ou sanitárias do meio ambiente; lancem matérias ou energia em desacordo com os padrões ambientais estabelecidos.”, este conceito popularmente conhecido como a inserção de algum elemento ou substância chamado de “poluente” a um determinado ecossistema tornou-se um tópico altamente discutido conforme a atenção voltada às causas ambientais e sustentabilidade se tornaram uma crescente hodiernamente. No setor naval, segundo a Plataforma Intergovernamental sobre Biodiversidade e Serviços Ecosistêmicos (IPBES), cerca de sessenta e seis por cento de área oceânica se encontra impactado pela ação humana no ambiente marinho, constando participação ativa dessa porcentagem o petróleo e os seus subprodutos (IPBES, 2019).

Ao considerar as informações supracitadas, nota-se necessário a análise e exposição dos impactos desempenhados pela indústria do petróleo atualmente, para assim estimular uma maior adesão às práticas voltadas à descarbonização do polo naval para cumprimento dos projetos estipulados pela Organização Marítima Internacional (IMO) e, quiçá, influenciar outros âmbitos econômicos diversos objetivamente visando uma maior atenção aos projetos de sustentabilidade e controle de danos ao meio ambiente (IMO, 2023).

A metodologia utilizada neste estudo baseou-se na revisão bibliográfica de artigos científicos, relatórios técnicos, publicações de órgãos ambientais e reportagens. As fontes de informação incluem bancos de dados acadêmicos como Scopus e Google Scholar, assim como relatórios de organizações renomadas como a Organização Marítima Internacional (IMO) e o Programa das Nações Unidas para o Meio Ambiente (UNEP). A análise foi estruturada em quatro seções: **Petróleo e seus subprodutos no ambiente marinho, Impactos ao ambiente e aos seres vivos, Possíveis soluções e Considerações finais.**

Depois estudou-se o que a dispersão desses resíduos no ambiente marinho resultava, desde a ocupação de espaço físico até a absorção corporal por meio da ingestão e/ou respiração, e os efeitos causados nos organismos vivos. Após analisar o impacto que esses materiais desempenham no meio ambiente e nos seres vivos, analisamos possíveis soluções que possam progredir o enfrentamento da introdução e propagação desses compostos provenientes da indústria petrolífera no mar, assim reduzindo os danos que esses elementos causam na natureza e simultaneamente contribuir para o processo de descarbonização da indústria.

PETRÓLEO E SEUS SUBPRODUTOS NO AMBIENTE MARINHO

Inicialmente para uma melhor compreensão da temática, torna-se necessário a definição principal do agente causador, os hidrocarbonetos. Hidrocarboneto se define como o termo genérico para categorizar qualquer forma de petróleo, seja ele em formato bruto, seus derivados pesados, ou, produtos refinados, porém ao atômicamente examinar, se apresentam como os elementos constituídos por átomos de carbono e hidrogênio e que são separados em determinados grupos, estando entre eles as parafinas, os naftalenos, os aromáticos e compostos de enxofre, resinas e asfaltenos (Espírito Santo, 2000).

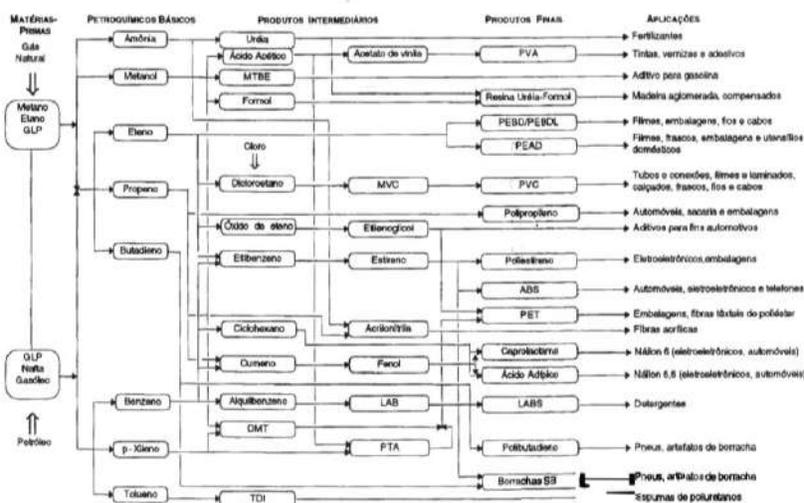
No entanto, embora amplo uso em diversas atuações e múltiplas áreas, observa-se o grande potencial de risco desempenhado pelos hidrocarbonetos, direcionados não apenas ao meio ambiente, todavia simultaneamente para a saúde dos trabalhadores responsáveis por sua fabricação, extração e manuseio, ou qualquer indivíduo ou ser que tenha contato irregular com a composição. A participação dos hidrocarbonetos na sociedade, embora pouco discutida, também se torna viável analisar ao considerarmos o transporte indevido desses materiais provenientes do continente e que ocasionalmente são levados às costas e depositados no mar, tendo em vista que há estimativa de que 80% do lixo marinho sejam de origem continental (Marinha Do Brasil, 2019).

Atualmente alguns determinados produtos provenientes dos hidrocarbonetos desempenham um inconveniente fenômeno, a movimentação de materiais como o plástico do espaço continental até o oceano, ocorrência que preocupa pesquisadores e ambientalistas, por se tratar de materiais de uso crescente e constantemente associados ao descarte inadequado. Versatilidade, baixo custo e ampla aplicabilidade são algumas características favoráveis para o aumento gradativo da produção mundial de plástico e outros subprodutos, conjuntamente a essas características a alta durabilidade dos materiais apresentaram um fator que acentua uma grande problemática ambiental, a difícil degradação desse material no ambiente.

A diversidade e a importância desses subprodutos fazem do petróleo uma matéria-prima crucial para a sociedade moderna por desempenharem um papel essencial na economia global, gerando novas tendências de consumo e servindo como base para uma ampla gama de produtos utilizados em diferentes setores. São destaques alguns compostos oriundos do refino dos hidrocarbonetos, e que ainda são amplamente utilizados como fonte energética na indústria naval, são exemplos materiais como gás liquefeito de petróleo (GLP), Gasolina, Querosene, Diesel, entre outros.

No entanto, a indústria do petróleo e dos hidrocarbonetos não se limita apenas à constituição de combustíveis fósseis, muito pelo contrário, são amplamente utilizados em polos como a indústria alimentícia, produção de produtos de limpeza e principalmente a indústria petroquímica. A indústria petroquímica se concentra como principal núcleo para fabricação de produtos conhecidos e utilizados popularmente, como por exemplo o plástico, a borracha sintética, entre outros apontados na Figura 1.

Figura 1. Produtos provenientes da indústria petroquímica
Cadeia de Transformação dos Principais Produtos Petroquímicos



Fonte: A indústria petroquímica, BNDES, 2025.

Proveniente dos processos desempenhados pelas petroquímicas, o plástico é um dos produtos que protagonizam a poluição no ambiente marinho por ser o principal detrito presente abundantemente no meio, sua presença em grande escala em colaboração com as correntes marítimas provocam o surgimento de ilhas gigantescas similares a aterros flutuantes compostas por esse material em diversos pontos do oceano, tais formações atribuem negativamente ao ambiente por se tornar meios diretos de pressões simultâneas à fauna e flora desses determinados locais. As

exorbitantes quantidades desse material nos mares ocasionam o evento conhecido como as ilhas de plástico, essas formações semelhantes a manchas são a junção de resíduos como plástico, microplásticos, redes de pesca entre outros e que afetam diretamente as espécies que podem acidentalmente realizar a ingestão de algum desses poluentes.

As ilhas de plástico são um exemplo físico da presença desses polímeros sintéticos desenvolvidos, diretamente e indiretamente, pela indústria do petróleo, claro, não de mesma origem, porém diversas vezes direcionadas ao mesmo destino, as águas oceânicas. Áreas contribuintes para a poluição por esses recursos são perceptíveis ao análise, de acordo com Zanella (2013), as fontes de lixo plástico residual no oceano podem ser categorizadas em 4 principais procedências, sendo elas; o turismo, o processo de deságue dos esgotos, o métodos de exploração e as embarcações.

O turismo desempenha um grande núcleo econômico em cidades costeiras, atribuindo assim grande investimento e lucro governamental pelos altos níveis de atividade populacional e comercial desempenhadas em locais como as praias por exemplo, no entanto os crescentes índices de atividade humana nesses lugares apresenta simultaneamente uma notória crescente degradação desempenhada pelos resíduos resultantes das visitas. Embora o rendimento desta prática permaneça positiva, diversos estudos e reportagens apontam sobre as consequências causadas pelo turismo, caso que não apenas despertam interesses nos campos de estudo acadêmico, porém, também desempenham uma função de envolvimento comunitário pela população dos determinados locais contribuindo para a conscientização popular sobre o tema.

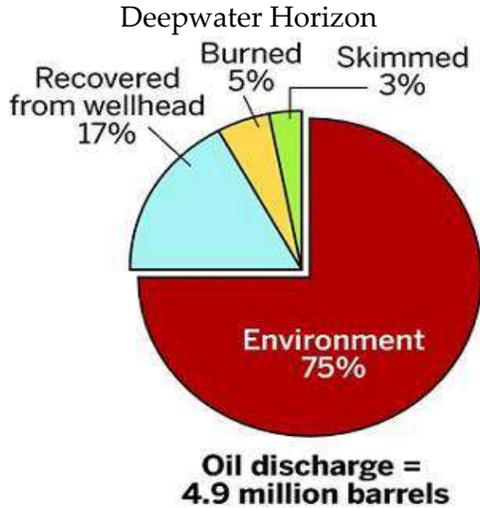
Conjuntamente com o turismo, um grande destaque na contaminação das águas pelos materiais de origem do petróleo é o deságue de esgoto no mar, não apenas levando resíduos como os microplásticos, todavia podendo ocasionar desequilíbrios nos ecossistemas por falta de tratamento assim desencadeando

consequências como a morte ou contaminação de espécimes e influenciar atividades costeiras dependentes do mar, como por exemplo a pesca. A atividade pesqueira por sua vez também tem a capacidade de agir sobre os ecossistemas com a introdução dos materiais plásticos, visto que em sua prática é comum a utilização de materiais como redes e boias que ocasionalmente correm o risco de serem perdidos, e logo levados pela água em sentido ao oceano e também a lixo produzido por outras embarcações que vem a ser despejado pela tripulação.

Novamente com o petróleo em evidência, embora as embarcações também possam transportar e dispersar outros produtos em suas funções e trajetórias, o despejo de petróleo é considerado catastrófico em perspectiva ambiental, por ser simultaneamente portador de altas capacidades de destruição de ecossistemas e por seu longo e específico processo de limpeza e contenção. Embora menor ocorrência de vazamentos e derramamentos de médio e grande porte atualmente, provenientes da imposição de regulamentação mais rigorosa, fiscalização mais presente e punições severas, são identificáveis episódios pontuais que acarretaram em volumosos escapes de material petrolífero na natureza.

A anteriormente citada catástrofe ocorrida na plataforma Deepwater Horizon, evidencia a necessidade de desenvolvimento de métodos de prevenção e contenção a fim de impedir os hidrocarbonetos de serem introduzidos às biogeocenoses. Ao contemplar as informações abaixo trazidas pelo gráfico apresentado na Figura 2, é observável a análise de destinos dos vazamentos após sua dispersão, ainda que após protocolos de controle e contenção, a descarga de óleo tende a afetar e permanecer principalmente em cerca de 75% no meio ambiente, enquanto 17% é recuperado com a utilização dos maquinários boca de poço, 5% são queimados e 3% são retirados da superfície líquida.

Figura 2. Gráfica “pizza” da rota do óleo disperso no evento



Fonte: After The Deepwater Horizon Disaster. C & EM, 2012.

Embora a percepção da penetração do petróleo se torne mais evidente em acidentes de grande porte e impacto, é imprescindível a citação de outras fontes, que embora em menor proporção, ainda acarretam o óleo a adentrar nas formações naturais. Estruturas como os campos de perfuração e exploração na localização marinha, vazamentos provenientes de problemas em equipamentos, lavagem de navios e viagens em lastro são potenciais introdutórios e dispersores dos hidrocarbonetos no oceano.

Estes fatores que embora sejam menos evidentes também demonstram a capacidade que o petróleo e os seus derivados têm de afetar os organismos vivos, ainda que em menor concentração e volume sua presença no meio ambiente representa uma ameaça ao alterar a estrutura e funções das comunidades biológicas marinhas.

Esta breve identificação do petróleo, seus subprodutos e sua introdução no mar apresentam principalmente a problemática deste material no meio ambiente, e evidencia a necessidade de exposição de conhecimento acerca de sua dispersão em âmbito marinho, com finalidade de analisar sobretudo os impactos que são

causados aos ecossistemas e seres vivos desempenhados pela exposição ao petróleo e suas consequências em diversos aspectos, sustentáveis, econômicos e sociais.

IMPACTOS AO AMBIENTE E AOS SERES VIVOS

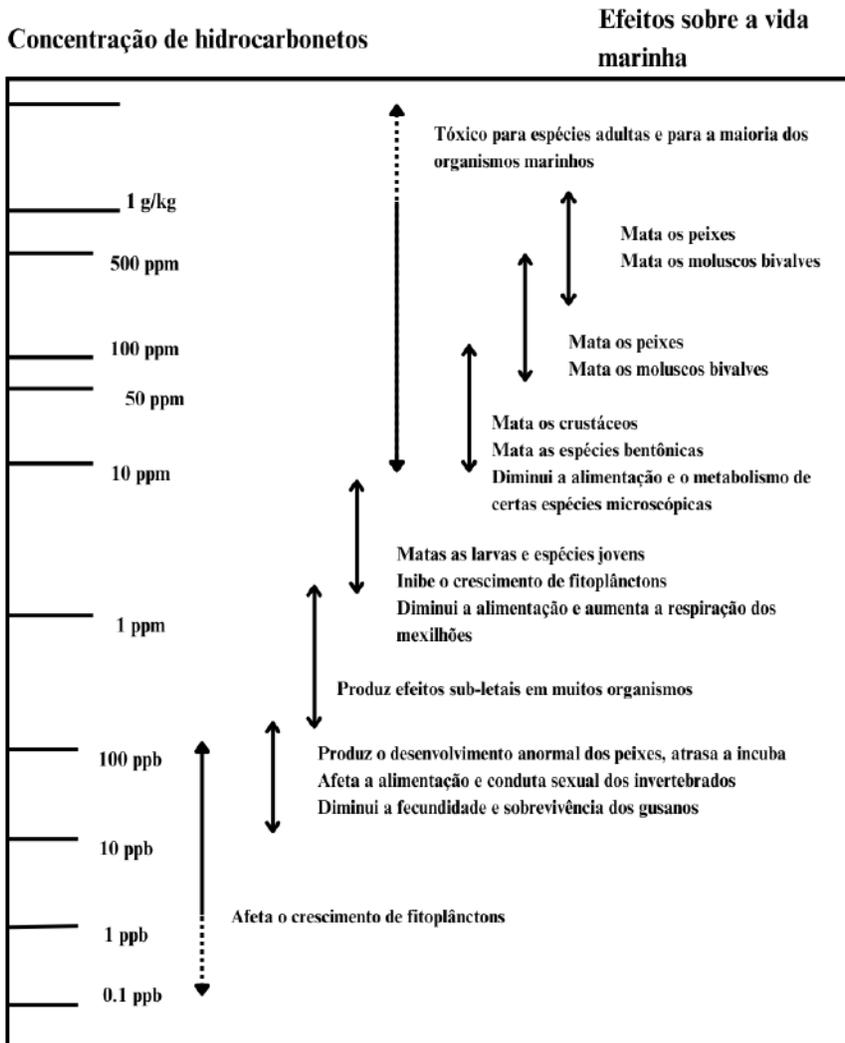
“O lixo marinho pode impactar as espécies da fauna de diversas formas, seja pela ingestão, enroscamento ou enredamento, causando lesões físicas e morte. Diversas espécies têm sido observadas com ferimentos graves ou são encontradas mortas com todo o tipo de material sintético enroscado ao corpo” (Barreto *et al.*, 2010; Simmonds, 2012; Baulch, Perry, 2014).

O petróleo e seus derivados interferem no *status quo* da fauna e flora de maneira objetiva e não objetiva, com seus efeitos se somando devido a interdependência entre eles, retrabalhando toda a lógica de funcionamento do ecossistema e da sociedade. Sendo importante ressaltar que parte considerável da biota marinha depende de água para respirar, a presença de material anômalo no meio como microplásticos, um fragmento com menos de 5mm de plástico, e como outros hidrocarbonetos que se alojam nos corpos dos peixes e na superfície dos recifes, e também podem chegar a cobrir parte da lâmina d'água (OceanCare, 2022). Estes eventos, auxiliam o transporte e disseminação de patógenos, químicos nocivos e desenvolvimento de doenças em humanos e animais. Para todos os efeitos, tornando o consumo desses animais e sua comercialização imprópria e indesejada.

Os organismos marinhos podem ser expostos aos hidrocarbonetos através de contato direto com a água contaminada, inalação de vapores, ingestão de partículas oleosas e absorção pelas brânquias ou pela pele. Essa exposição pode ocorrer tanto em áreas costeiras, onde há uma maior concentração de vida marinha, quanto em águas abertas. O consumo dos hidrocarbonetos por animais marinhos pode causar algumas alterações comportamentais, assim como danos em órgãos,

prejudicar o sistema imunológico e até causar distúrbios reprodutivos.

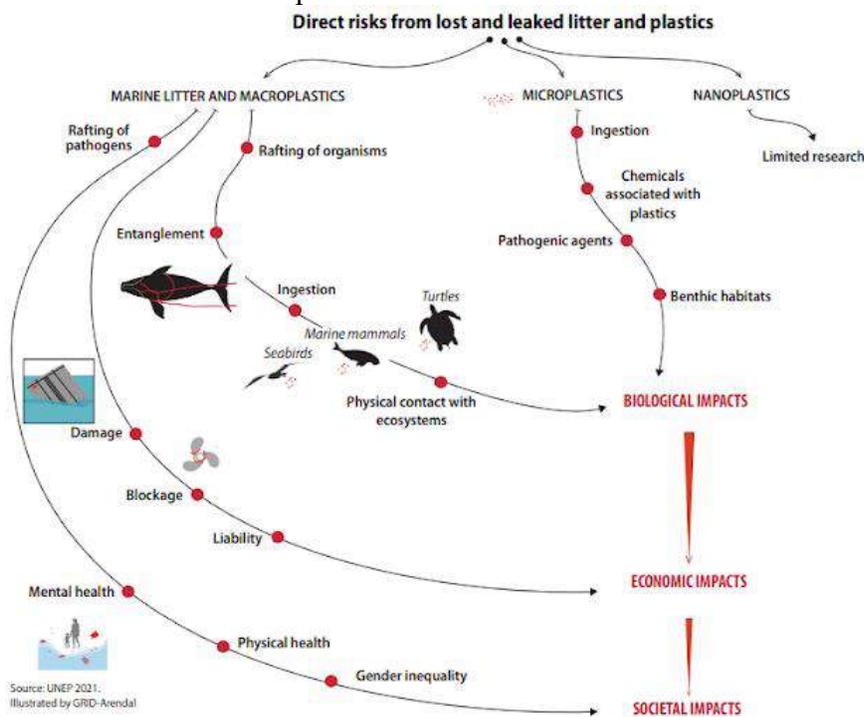
Figura 3. Efeitos dos hidrocarbonetos sobre a vida marinha em ppb (parte por bilhão) e ppm (parte por milhão) até 1 grama por quilograma.



Fonte: Proteção das Zonas Costeiras Contra a Poluição por Hidrocarbonetos, 2000.

Conforme Espírito Santo (2000), os efeitos aos seres vivos variam conforme as espécies e a concentração dos hidrocarbonetos dispersos, são apresentados sintomas como obstrução de órgãos essenciais para a sobrevivência, integração dos hidrocarbonetos no tecidos dos animais assim impactando a cadeia alimentar por alteração de gosto, proliferação desenfreada de organismos e em casos de derramamentos pesados o revestimento de vários animais, inclusive podendo afetar animais terrestres como aves por exemplo, e morte de fauna e flora, como mostra a Figura 3.

Figura 4. Mapa dos danos diretos causados pelo lixo e plásticos perdidos e vazados.



Fonte: United Nations Environment Programme, 2021.

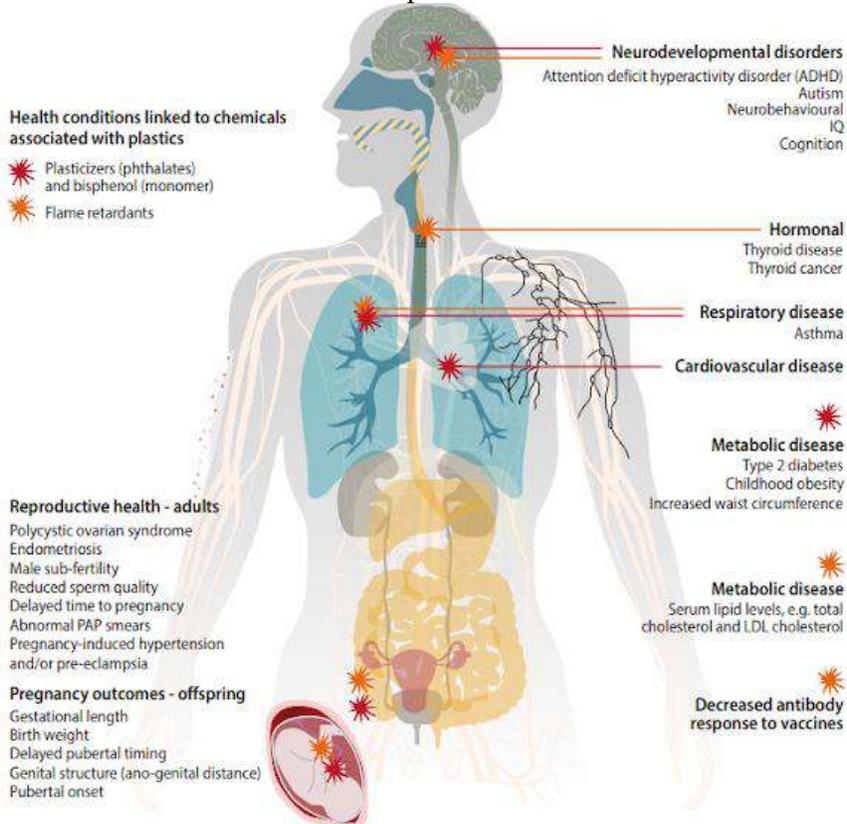
Ao observar a Figura 4 nota-se um mapa gráfico sobre as vertentes na pesquisa das consequências da presença do plástico

nos ambientes marinhos, suas etapas, e o que essa presença acarreta na sociedade. Observa-se que os riscos diretos da existência dos subprodutos do petróleo podem ser divididos em 3 seções que se influenciam: Impactos biológicos, impactos econômicos e impactos sociais.

- Impactos Biológicos: São caracterizados como os efeitos causados às formas de vida, são principalmente protagonizados pelos macroplásticos, lixo marinho e os microplásticos. Estes materiais são capazes de carregar poluentes, organismos, toxinas e também patógenos em áreas costeiras, tal movimentação gera a possibilidade de formas físicas de impactos diretos aos ecossistemas marinhos, sendo elas casos de emaranhamento de redes em espécies, ingestão por animais como as tartarugas e depósito nos biosistemas.
- Impactos Econômicos: Este aspecto é determinado como danos sobre as estruturas responsáveis pelo movimento da economia, sejam elas empresas, órgãos governamentais, ou até mesmo pescadores. A frequência do petróleo e seus subprodutos no mar afeta diretamente o comprometimento de rendimento de equipamentos e inflição de prejuízo aos responsáveis pelas embarcações, exemplificadamente podem ser citadas a maior necessidade de intervenção em aspectos como reparo de dispositivos e acessórios, pelo aumento de incrustações ou até mesmo, obstrução de hélices. Tal aspecto também afeta áreas como a atividade pesqueira e adição de custos extra de limpeza de equipamentos e locações onde esses materiais encontram-se presentes.
- Impactos Sociais: Identificáveis como problemas que afetam diretamente a comunidade humana e a sociedade como um todo, são destrinchados principalmente na capacidade de transporte de patógenos que possibilitam a infecção de seres humanos e as suas consequências à saúde. Vale citar também aspectos como subsistência de

população dependente de atividades costeiras, qualidade de produtos provenientes do mar e também diminuição de fatores como turismo, lazer, recreação e qualidade de vida nos locais onde esses impactos podem ser apontados.

Figura 5. Danos causados ao Homem por ingestão de microplásticos.



Fonte: United Nations Environment Programme, 2021.

No corpo humano, a exposição ao plástico e aos elementos químicos associados ao mesmo apresentam diversas complicações após a introdução desse material no organismo. De acordo com o relatório da (UNEP) exibido na Figura 5, nota-se que são apontados os diversos danos que o contato com os materiais provenientes da

indústria do petróleo pode acarretar na saúde do homem. Com a possibilidade de consequências como alterações no sistema hormonal, distúrbios metabólicos, doenças respiratórias, câncer na tireoide, desencadeamento de problemas no sistema reprodutivo humano, efeitos na gravidez e distúrbios de neurodesenvolvimento. Alguns outros sintomas ocasionados pela inalação ou ingestão dos hidrocarbonetos podem ser: Irritação nos pulmões, asfixia, tosse, falta de ar, náusea, vômitos, ardor no estômago, sonolência, estupor, convulsões, pneumonite química podendo evoluir para uma pneumonia grave, frequência cardíaca irregular podendo ocasionar em parada cardíaca.

Ao considerar esta gama de sequelas que o consumo acidental dos componentes provenientes da indústria petrolífera, é de suma importância o alerta da indústria como um todo a fim de diminuir exponencialmente a introdução desses materiais nos meios naturais, seja como resíduo líquido, sólido ou gasoso e a conscientização populacional acerca dos males que podem ser causados pelos hidrocarbonetos ao corpo humano e ecossistemas, assim possibilitando um conhecimento da sociedade na determinada área e principalmente auxiliar na área da saúde no caso ocorrência de alguma contaminação.

POSSÍVEIS SOLUÇÕES

As maneiras pelas quais os problemas gerados pela indústria naval poderiam ser mitigados, sem a intenção de inviabilizar atividade do setor, e de certa forma, ajudar o setor a ser mais atrativo economicamente no longo prazo não apenas no aspecto ambiental como também econômico.

- Economia circular: A gestão dos recursos usados para que seu valor seja recuperado após o uso, prezando pela redução do uso de mais matéria prima e conseqüentemente produção de mais lixo, reciclagem.
- Combustíveis Verdes: Biocombustíveis (biometano, biodiesel e etanol), metanol, amônia, hidrogênio.

- Gás natural: Uso de GNL (gás natural liquefeito). Devido à emissão menor de resíduos na queima que o diesel e o carvão.
- Navios totalmente elétricos: Abandonando completamente o uso de combustíveis para obter uma embarcação movida totalmente a eletricidade. Com emissão operacional zero para sistemas de propulsão e auxiliares.
- Tanques de combustível, águas de lastro e esgoto: Por vezes o porto não tem um local adequado para o descarte de rejeito vindo da limpeza de tanques ou não é vantajoso para a operação armazenar resíduos indesejados, levando ao descarte na natureza de solventes e outros materiais nocivos ao meio ambiente, como solução propõe-se o investimento nesses portos para abarcar tais capacidades e punições legais para o descarte inadequado.
- Remoção física de plásticos: Se entende que a formação de microplásticos se dá em grande parte através da decomposição de plásticos maiores, fazendo a remoção dessas partes maiores necessárias para evitar o aumento progressivo dos microplásticos nos mares.
- Fiscalização assertiva: Não apenas checkups mais recorrentes como também padrões operacionais mais rigorosos com a relação ao operacional, além de punições mais severas com descumprimento de normas.
- Metas e restrições: O estabelecimento de metas pela Organização Marítima Internacional (IMO) bem como a criação de novas leis que restringem a operação de embarcações que não cumprem os requisitos mínimos para operacionalidade são úteis à medida que incentivam que mercado se esforce na direção desejada. Dessa forma, promovendo a modernização da frota, como motores e sistemas de última geração, que por sua vez, são mais eficientes e emitem menos Gases do Efeito Estufa (GEE), e também são econômicos em suas atividades, podendo os armadores serem ajudados por seus próprios governos, no

objetivo de manter a competitividade da própria indústria com a de outros países.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Deseja-se que através da pesquisa realizada, esta questão apresentada seja discutida com extrema importância e urgência. A poluição por hidrocarbonetos não deve ser combatida por mero senso estético ou benevolência para com a vida marinha, mas também como um assunto que impacta diretamente o contingente humano que habita o planeta, com seus males já observados e denunciados. Espera-se ainda, uma conscientização popular acerca do tema, que embora bastante estudado, ainda se nota a falta da difusão das informações no conhecimento comum em nossa sociedade atualmente, em projetos como por exemplo planos de reciclagem, palestras em escolas sobre os males que a presença dos hidrocarbonetos causa tanto na natureza, quanto na vida dos seres humanos e animais, entre outros.

Assim, espera-se uma mobilização global para a resolução do problema apresentado e a mais rigorosa implementação de projetos sustentáveis com a finalidade de paralelamente diminuir a contaminação pelos materiais de origem do petróleo, como também a redução de qualquer tipo de poluição, buscando sempre a converter-se em uma indústria mais sustentável.

Compreende-se que, a dispersão de material anômalo no ecossistema deve ser tratado no mais alto grau de importância, ocupando uma questão da área ambiental que diretamente impacta o social. Contando com efeitos deletérios cumulativos, que com o passar dos anos tendem a crescer de maneira vertiginosa devido à própria característica do problema, colocando em causa a saúde e bem-estar dos membros da sociedade e do meio ambiente. Também se percebe que, devido aos avanços feitos, atingir as metas desejadas se torna cada vez mais possível e em menor tempo. A possibilidade de mudança em relação aos impactos ambientais traz otimismo para a indústria como um todo, e a busca por um planeta

sustentável motiva pesquisas que possam contribuir sobre a temática ao redor do mundo, assim visando um futuro mais ecológico e sustentável para a humanidade.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) pela concessão da bolsa de Prodocência e Extensão, à Prof^a. Dra. Patrícia dos Santos Matta, coordenadora do projeto, pelo apoio e orientação, e ao LABNAVs pelo suporte técnico e científico durante o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- AAKKO-SAKSA, P. T.; LEHTORANTA, K.; KUITTINEN, N.; JÄRVINEN, A.; JALKANEN, J. P.; JOHNSON, K. C.; JUNG, H.; NTZIACHRISTOS, L.; GAGNÉ, S.; TAKAHASHI, C.; KARJALAINEN, P.; RÖNKKÖ, T.; TIMONEN, H. **Reduction in greenhouse gas and other emissions from ship engines: Current trends and future options**. 2022. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360128522000624>. Acesso em: 10 out. 2024.
- ANDRADE, J. E. P. D.; PAN, S. S. K.; ZAPORSKI, J.; MELO, K. C. D. A. 1995. **A indústria Petroquímica**. BNDES. Disponível em: https://web.bndes.gov.br/bib/jspui/bitstream/1408/3667/2/BS%2002%20A%20indústria%20petroquímica_P.pdf. Acesso em: 7 abr. 2024.
- BAULCH, S.; PERRY, C. **Evaluating the impacts of marine debris on cetaceans**. 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2013.12.050>. Acesso em: 10 out. 2024.
- BBC. **Os conflitos alimentados pela disputa por petróleo no mundo**. 2015. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/12/151203_conflitos_mundiais_petroleo_lgb_gch. Acesso em: 17 mar. 2024.
- BRASIL. **Lei N° 6938**, de 31 de agosto de 1981, 1981.

ESPÍRITO SANTO, C. M. D. **Proteção das zonas costeiras contra a poluição por hidrocarbonetos**. FEUP, 2000.

FERNANDES, V. D. F; GIANNINI, M. C. M; COPPEDÈ, I. R; GOULART, E. W; PONTES, J. A. L. 2023. **Estudo técnico para a ampliação da área de proteção ambiental da paisagem e do areal da praia do Pontal e criação do monumento natural no bairro do Recreio dos Bandeirantes, Rio de Janeiro**. Prefeitura do Rio. 2023.

FORETICH, A.; ZAIMES, G. G.; HAWKINS, T. R.; NEWES, E. **Challenges and opportunities for alternative fuels in the maritime sector**. 2021.

FRETET, V. A. C; CHAVES, H. A. F.; JONES, C. M. **Análise cronológica da indústria petrolífera**. Terræ Didactica, 15, 25-32, e019004, 2019.

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS, AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO, GÁS NATURAL E BIOCOMBUSTÍVEIS. **Transição energética no mar: desafios e oportunidades para o Brasil**. 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/anp/pt-br/centrais-de-conteu-do/apresentacoes-palestras/2024/arquivos/2024-04-29-dg-bndes-comb-marit.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2024.

GOVERNO BRASILEIRO. Economia circular. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/fazenda/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/transformacao-ecologica/economia-circular>. Acesso em: 10 set. 2024.

HARBISON, M. **More than one million birds died during Deepwater Horizon Disaster**. 2014. Disponível em: <https://www.audubon.org/news/more-one-million-birds-died-during-deepwater-horizon-disaster>. Acesso em: 20 mar. 2024.

IMO. **2023 IMO Strategy on reduction of GHG emissions from ships**. ONU. 2023.

IPBES. **Summary for policymakers of the global assessment report on biodiversity and ecosystem services**. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.3553458>. Acesso em: 10 out. 2024.

MARINHA DO BRASIL. **Combate ao lixo no mar**. Disponível em: <https://www.marinha.mil.br/combate-ao-lixo-no->

CONSTRUINDO VISUALIZAÇÕES EM 3D DE DEFORMAÇÃO DE CORPOS EM VELOCIDADES RELATIVÍSTICAS

Miguel L. A. de Carvalho^{a,1}, Rogério T. Cavalcanti^{a,2}

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Um dos efeitos intrigantes da relatividade restrita e a deformação de objetos em referenciais relativísticos, isto e, próximos à velocidade da luz. Este trabalho visa criar visualizações tridimensionais de tais deformações. Para isso foram utilizadas as transformações de Lorentz, da relatividade restrita, alguns fundamentos de computação gráfica, a linguagem de programação Python e o software de computação algébrica SageMath.

Palavras-chave: Relatividade restrita; transformações de Lorentz; Python; SageMath.

INTRODUÇÃO

A abstração matemática e os fenômenos não intuitivos da física moderna são barreiras a serem enfrentadas por estudantes que se deparam com essas disciplinas em algum momento de sua vida acadêmica. Tais dificuldades são atenuadas quando há ferramentas de visualização disponíveis, que ilustram os conceitos destas disciplinas. Nesse contexto, **visualizações tridimensionais interativas** surgem como uma ferramenta didática poderosa, permitindo que estudantes explorem dinamicamente os efeitos contraintuitivos e desenvolvam uma compreensão mais profunda desses fenômenos. Com a popularização de pacotes

¹ alvescarvalho.miguel403@gmail.com.

² rogerio.cavalcanti@ime.uerj.br.

computacionais de código aberto, a construção de tais visualizações passou a ser acessível mesmo para estudantes de graduação. Este é um dos propósitos do presente trabalho: construir representações visuais em **3D da deformação de corpos em referenciais relativísticos**, utilizando transformações de Lorentz e técnicas de computação gráfica. Para isso, foi empregada a linguagem de programação Python e o software de computação algébrica SageMath, permitindo a implementação de simulações manipuláveis que ilustram efeitos relativísticos. De forma mais específica, foram construídas visualizações e animações em 3D, cujos links são encontrados no texto, da **contração espacial** prevista pela Teoria da Relatividade Restrita (TRR).

A TRR, formulada por Albert Einstein e que completa 120 anos, revolucionou a física ao redefinir a nossa compreensão sobre as relações entre espaço e tempo. Um dos efeitos mais marcantes dessa teoria é a já mencionada contração espacial, segundo a qual objetos em movimento relativístico sofrem um encurtamento em sua dimensão ao longo da direção do movimento. Embora esse fenômeno seja bem estabelecido teoricamente e confirmado experimentalmente, sua visualização não é acessível em experimentos, já que os efeitos relativísticos só se tornam perceptíveis apenas em velocidades próximas à da luz.

Nas seções a seguir, apresentamos uma introdução conceitual à TRR, descrevemos as bases para a construção das visualizações e discutimos a implementação computacional das simulações. Por fim, apresentamos os resultados obtidos e apontamos perspectivas futuras.

A TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

A Teoria da Relatividade Restrita (TRR), também chamada de teoria da relatividade especial, é, em conjunto com a mecânica quântica, uma das teorias físicas que fundamentam o que hoje chamamos de física moderna. Ela descreve as relações entre espaço e tempo, sem considerar a presença de interação gravitacional, e é

a teoria que descreve o movimento em altas velocidades. Por altas velocidades, entendam-se aquelas próximas à velocidade da luz, as chamadas velocidades relativísticas. Como era de se esperar em uma boa teoria física, em velocidades suficientemente menores que a da luz, as previsões da TRR se reduzem às da mecânica clássica de Newton e Galileu [6].

Na mecânica clássica, os conceitos de tempo e espaço são absolutos, ou seja, são imutáveis e independem de quaisquer eventos ou observadores [11]. Porém, na segunda metade do século XIX, os resultados da eletrodinâmica e os então recentes experimentos sugerindo que a velocidade da luz é constante, independentemente do observador, levaram a inconsistências na teoria de Newton. A fim de resolver tais inconsistências, Albert Einstein formulou a TRR em 1905. A nova teoria é construída a partir de dois postulados bastante simples e baseados em resultados experimentais. São os chamados princípios da relatividade restrita:

1. **Princípio da relatividade (Galileu):** Nenhum experimento pode medir a velocidade absoluta de um observador; os resultados de qualquer experimento realizado por um observador não dependem de sua velocidade relativa a outro observador não envolvido no experimento.
2. **Universidade da velocidade da luz (Einstein):** A velocidade da luz relativa a qualquer observador não acelerado é constante (3×10^8 m/s), independentemente do movimento relativo entre a fonte de luz e o observador.

Dessa forma, Einstein conserva o princípio da relatividade, criado por Galileu Galilei, e rompe com o conceito de espaço e tempo absolutos de Isaac Newton para acomodar o fato experimental de que a velocidade da luz é constante para qualquer observador [5]. As duas consequências básicas dessa nova formulação, com abundante suporte experimental, são os efeitos de contração espacial e dilatação temporal. Isto é, observadores em referenciais inerciais (não acelerados) e relativísticos distintos, ao analisarem um dado fenômeno, discordam sobre medidas de

tempo e espaço. Sendo essa diferença uma função da velocidade relativa entre os observadores, como veremos adiante.

As transformações que conectam medidas de diferentes referenciais na TRR, compatíveis com Princípio da Relatividade e herdadas da eletrodinâmica, são as chamadas transformações de Lorentz. Faremos aqui uma breve exposição sobre as transformações de Lorentz, as quais serão extensivamente utilizadas ao longo do trabalho. O leitor interessado em como obtê-las ou em uma introdução mais abrangente à TRR pode consultar as referências [3, 4, 7, 11]. Dois referenciais inerciais distintos, que, seguindo a notação e nomenclatura usual, designaremos como 'linha' e 'sem linha', têm suas medidas de tempo e distância conectados pelo fator de Lorentz γ , que é uma função da velocidade relativa v e é dado por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

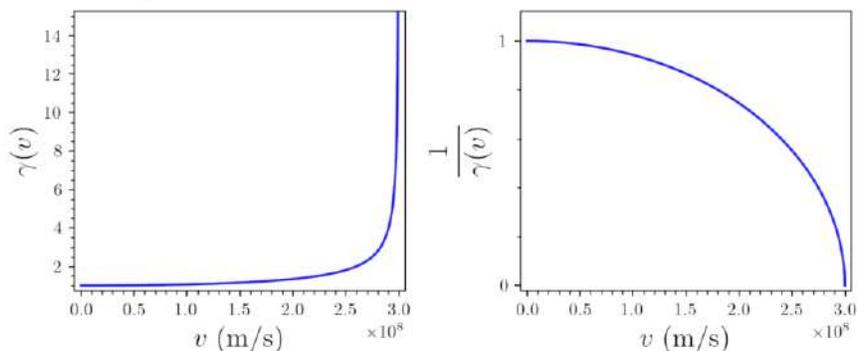
Dilatação temporal

Indicaremos o tempo decorrido em cada referencial como t e t' . Utilizando o fator de Lorentz γ , as duas coordenadas temporais são relacionadas por

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (2)$$

Onde c é a velocidade da luz no vácuo. Analisando a expressão acima, percebemos que à medida que v se aproxima de c , o referencial 'linha' passa a ter a sua medida temporal dilatada. Note que $\gamma \geq 1$.

Figura 1. Gráfico³ do fator Lorentz \times velocidade.



Fonte: Imagem produzida usando o software SageMath.

Contração espacial

Nesta transformação, indicaremos o comprimento de um corpo em cada referencial por ΔL e $\Delta L'$. O fator de Lorentz γ é o mesmo utilizado anteriormente.

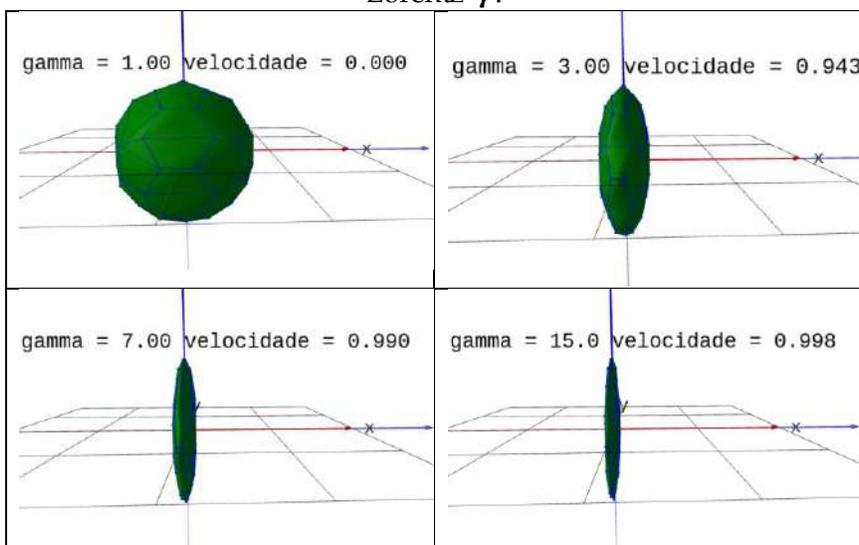
$$\Delta L' = \frac{\Delta L}{\gamma} \quad (3)$$

Neste caso, analisando a transformação ocorrida na mudança de referencial, percebemos que o referencial 'linha' teria sua medida de comprimento contraída na direção do movimento. Esta última transformação é a base deste trabalho, a partir dela serão calculadas as deformações de corpos em referenciais distintos. Além disso, observando o fator podemos entender o porquê de fenômenos relativísticos não serem facilmente observáveis em velocidades muito menores que à velocidade da luz, pois o termo $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ é insignificante, levando o fator de Lorentz tender a 1. Os fenômenos relativísticos não se manifestam apenas

³ No primeiro gráfico, observamos o comportamento do fator em função da velocidade, ilustrando o efeito da dilatação temporal. Já no segundo gráfico temos o inverso do fator, ilustrando a contração espacial. Note que no gráfico as velocidades exibidas estão multiplicadas por um fator de 108, de modo que só começa a se tornar significativo a altíssimas velocidades. Isso explica os resultados da mecânica clássica.

em velocidades relativísticas, mas a qualquer velocidade. Entretanto, em baixas velocidades o fator de Lorentz se aproxima muito a 1. Por isso o que observamos no cotidiano é efetivamente o espaço e tempo absolutos da mecânica clássica.

Figura 2. Ilustração⁴ da contração relativística do comprimento de um objeto em movimento para diferentes valores do fator de Lorentz γ .



Fonte: Imagem produzida usando o software SageMath.

Na imagem da Figura 2 vemos um objeto em repouso, a medida que o objeto aumenta sua velocidade medimos seu comprimento contrair na direção do movimento representado pelo vetor vermelho. Uma animação da contração espacial representada na Figura 2 pode ser vista no link: <https://miguelcarvalho403.github.io/DeformaRelEbook/animation1.html>. Um detalhe importante de se ressaltar é que a contração espacial representada acima não é exatamente o que veríamos com

⁴ À medida que a velocidade do objeto se aproxima da velocidade da luz, sua extensão na direção do movimento diminui, conforme previsto pela teoria da relatividade restrita de Einstein.

nossos olhos ou captaríamos a partir de algum equipamento fotográfico, mas o que mediríamos [12]. Caso houvesse um objeto grande o bastante se movendo a velocidade relativística e um equipamento fotográfico rápido o suficiente para capturá-lo, observaríamos distorções ópticas como o efeito de Terrel-Penrose e aberrações cromáticas. Entretanto, esses efeitos serão estudados apenas nas próximas do presente projeto de iniciação científica.

REPRESENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE OBJETOS EM 3D

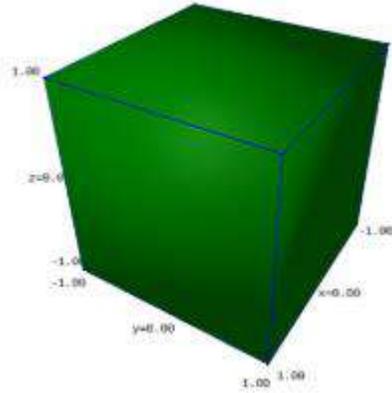
A fim de modelar graficamente os fenômenos da TRR descritos na seção anterior, precisa-se especificar uma estrutura para criar objetos e manipulá-los graficamente de forma precisa, quantitativa e matematicamente consistente. Para isso, por simplicidade, utilizaremos poliedros. Poliedros são sólidos em 3D com faces poligonais planas, bordas retas (arestas) e vértices bem definidos. As posições dos vértices podem ser especificadas a partir de um sistema de coordenadas. Se também forem especificados quais vértices são conectados por arestas, o poliedro fica inteiramente definido. Esta é uma técnica usual para modelar objetos tridimensionais em computação gráfica, denominada malha poligonal. A modelagem do objeto, satisfazendo as nossas necessidades, é feita utilizando matrizes que contenham as coordenadas dos vértices do objeto a ser representado [8].

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{pmatrix}_{n \times 3} \quad (4)$$

Cada linha da matriz acima é um ponto que representa um vértice do objeto e cada coluna representa uma coordenada espacial X, Y ou Z, respectivamente. Abaixo vemos um exemplo de uma matriz de vértices de um cubo e sua representação gráfica.

Figura 3. Matriz objeto⁵ e cubo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Fonte: Os Autores, 2025.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{pmatrix}_{n \times 3} \quad (9)$$

As matrizes⁶ (4), (5) e (6) são matrizes de rotação, ou seja, rotacionam objetos em função de um ângulo, a matriz (4) rotaciona ao redor do eixo x , matriz (5) rotaciona ao redor do eixo y e a matriz (6) rotaciona ao redor do eixo z . A matriz (7) permite a contração de um objeto somente na direção x . A matriz (8) permite a translação de objetos no espaço deslocando a origem do sistema

⁵ A matriz nos mostra como os objetos são construídos de forma algébrica, permitindo manipular objetos a partir de transformações lineares.

⁶ (5) Rotação em torno do eixo x ; (6) Rotação em torno do eixo y ; (7) Rotação em torno do eixo z ; (8) Contração na direção x ; (9) Translação no espaço.

de coordenadas. Isso é feito somando-a a matriz que descreve o objeto [8].

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

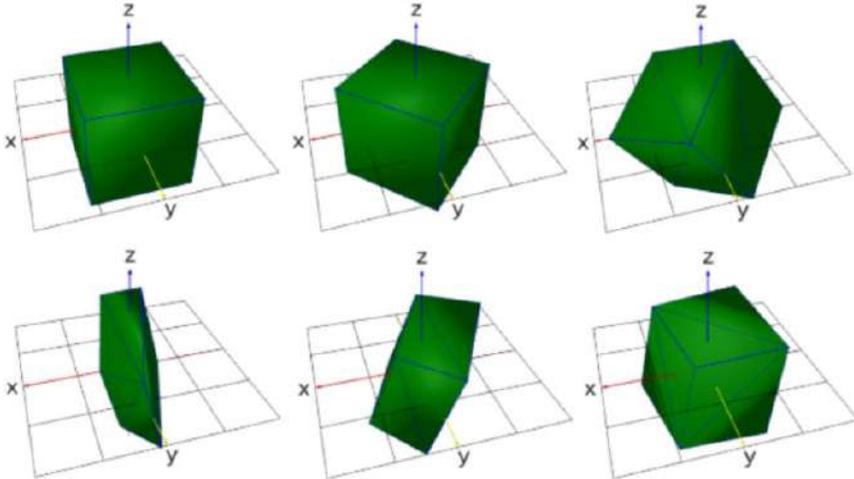
Nosso objetivo agora é implementar computacionalmente o que foi discutido nas sessões anteriores. Especificamente, a modelagem em 3D utilizando malha poligonal e a contração espacial de tais objetos segundo os resultados da TRR. Encontrar uma linguagem que possibilite implementar a base teórica da relatividade restrita e a estrutura da computação gráfica. Neste trabalho utilizamos o software de computação algébrica de propósito geral SageMath [1, 9, 10]. SageMath é um software livre desenvolvido principalmente em Python [2] e em C, é bem documentado e utiliza a linguagem Python como base para a implementação de algoritmos utilizando as funções já implementadas ou implementarmos novas. Toda a modelagem e implementação desse trabalho foi realizada utilizando esse software.

Como previsto pela teoria, o corpo deve se contrair na direção do movimento conforme o fator γ . Entretanto, a matriz (7) contrai apenas na direção X. Podemos obter uma matriz que contrai o objeto em uma direção arbitrária utiliza-se uma mudança de coordenadas, a fim de que a direção do movimento coincida com a nova direção X. A partir dessas matrizes podemos construir uma contração de Lorentz em uma direção arbitrária utilizando a seguinte sequência de transformações:

1. **Rotação em torno do eixo Z (sentido horário)**
2. **Rotação em torno do eixo Y (sentido anti-horário)**
3. **Contração na direção X**
4. **Rotação em torno do eixo Y (sentido horário)**
5. **Rotação em torno do eixo Z (sentido anti-horário)**

Abaixo temos uma representação visual da mudança de coordenadas descrita pela sequência acima. Nele, o cubo está se movendo no sentido (1,1,1).

Figura 4. Representação⁷ da mudança de base.



Fonte: Imagem produzida usando o software SageMath.

Animação:

Vetor:

<https://miguelcarvalho403.github.io/DeformaRelEbook/vetor>.

Cubo:

https://miguelcarvalho403.github.io/DeformaRelEbook/obj_alg.html.

SIMULAÇÕES

Especificadas a linguagem computacional, a técnica de modelagem 3D e o conjunto de ferramentas matemáticas utilizadas para a implementação dos resultados do projeto, o próximo passo foi construir animações em 3D dos efeitos de contração espacial da TRR. A seguir apresentamos algumas simulações desses efeitos

⁷ Deseja-se contrair o objeto na direção $(1,1,1)$, entretanto a matriz (7) só contrai na direção x , $(1,0,0)$, então mudaremos a base do objeto para que o sentido x e o sentido contração seja o mesmo na nova, utilizara o passo a passo descrito no algoritmo acima, os angulo de rotação são calculados a partir dos ângulos entre o eixo x e a projeção da direção do movimento nos planos XY e XZ.

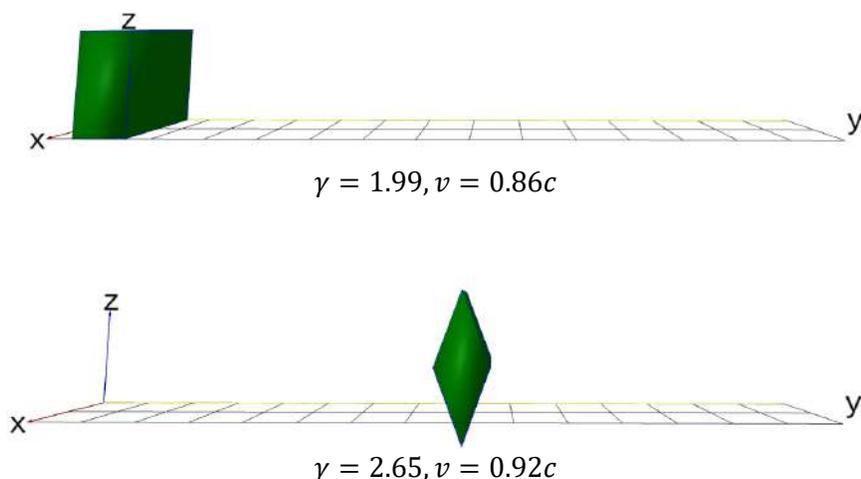
realizadas utilizando diferentes objetos e diferentes configurações. Em todos os casos, as animações e o código para produzi-las pode ser encontrado no GitHub de um dos autores https://miguelcarvalho403.github.io/DeformaRelEbook/EBook_Deformacao_corpos_velocidades_relativistica.html. O endereço de cada uma é dado com a discussão sobre cada simulação.

A primeira animação foi feita utilizando um cubo se deslocando de forma acelerada ao longo da direção y enquanto rotaciona.

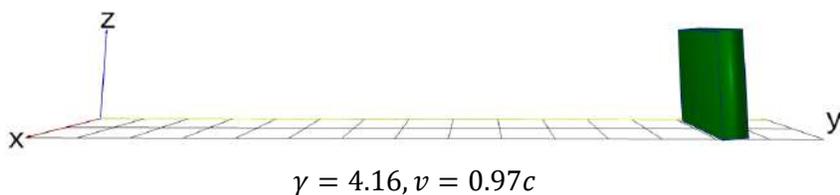
Animação:

<https://miguelcarvalho403.github.io/DeformaRelEbook/cmuar.html>.

Figura 5. Cubo⁸ em rotação.



⁸ Cubo em movimento uniformemente acelerado com rotação, à medida que o objeto ganha velocidade o observamos perder dimensão ao longo da direção y . Note que isso ocorre ao passo que o fator γ aumenta.

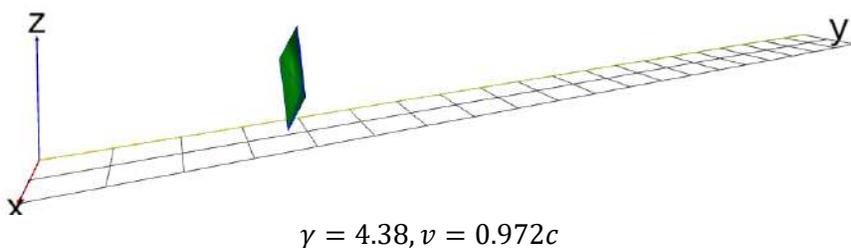
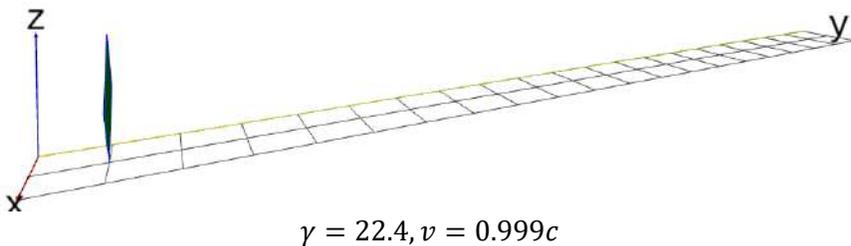


Fonte: Imagem produzida usando o software SageMath.

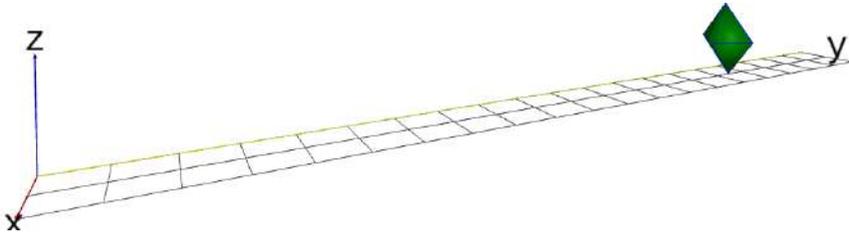
Animação:

<https://miguelcarvalho403.github.io/DeformaRelEbook/omurr.html>.

Figura 6. Octaedro em movimento uniformemente retardado com rotação⁹.



⁹ À medida que o objeto perde velocidade o observamos ganhar dimensão ao longo da direção y . Note que isso ocorre ao passo que o fator γ diminui.



$$\gamma = 1.87, v = 0.844c$$

Fonte: Imagem produzida usando o software SageMath.

Outras animações:

- Cubo em movimento uniformemente acelerado sem rotação:
<https://miguelcarvalho403.github.io/DeformaRelEbook/cm uasr.html>.
- Octaedro em movimento uniformemente retardado sem rotação:
<https://miguelcarvalho403.github.io/DeformaRelEbook/om uasr>.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho criamos representações visuais em 3D da contração espacial conforme previsto pela TRR. O resultado foi bastante satisfatório e pode ser útil para estudantes que estão lidando com estes conceitos e gostariam de não só visualizar, mas também de manipular tais transformações e verificar os seus efeitos. Como ressaltado no texto, este trabalho tem resultados parciais e ignora outros efeitos ópticos provenientes da TRR. A inclusão de tais efeitos será implementada nos próximos meses, em continuação do presente projeto, além de outras implementações de efeitos relativísticos.

AGRADECIMENTOS

Miguel L. A. de Carvalho dedica esse trabalho aos seus pais, que o iniciaram e sempre o incentivaram ao estudo das ciências.

REFERÊNCIAS

- [1] CAVALCANTI, R. T. **Sagemath para físicos**. Disponível em: <https://rogeriotc.github.io/sagemath/>. Acesso em: 28 jan. 2025.
- [2] COURSERA. **Introdução à ciência da computação com Python - parte 1**. Disponível em: <https://www.coursera.org/learn/ciencia-computacao-python-conceitos>. Acesso em: 28 jan. 2025.
- [3] EINSTEIN, A. **A teoria da relatividade especial e geral**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009.
- [4] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física: óptica e física moderna**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [5] ICTP-SAIFR. **Introdução à física do espaço-tempo: relatividade geral e especial**. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=1WqM2BUvrM8&list=P Lg0_ydgtbHGHInf_uUk6QNnaIVmHNA3Lp. Acesso em: 28 jan. 2025.
- [6] LEITE, V. B.; ANDRADE-NETO, A. V. **Conceitos de espaço, tempo e movimento na mecânica clássica e na teoria da relatividade**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 45, 2023.
- [7] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: óptica, relatividade, física quântica**. v. 4. São Paulo: Editora Blücher, 2014.
- [8] RORRES, C.; ANTON, H. **Álgebra linear com aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [9] SAGEMATH. Disponível em: <https://doc.sagemath.org/html/pt/tutorial/index.html>. Acesso em: 28 jan. 2025.

- [10] SAGEMATH. **Documentação oficial do Sagemath.** Disponível em: <https://doc.sagemath.org/html/en/reference/plot3d/index.html>. Acesso em: 28 jan. 2025.
- [11] SEIXAS, W. **O princípio da relatividade - de Galileu a Einstein.** Revista Brasileira de História da Matemática, v. 5, n. 10, p. 43-56, 2005.
- [12] TERREL, J. **Invisibility of Lorentz contraction.** Physical Review, v. 116, n. 4, p. 1041-1045, 1959.

DESENVOLVENDO O PENSAMENTO COMPUTACIONAL EM ESCOLAS PÚBLICAS DO RIO DE JANEIRO

**Luciana Victoria Velasco Pereira^{a,1}, Beatriz de Oliveira
Silva Moraes^{a,2}, Vitor de Sá Pimentel^{a,3}, Bianca Dantas
Durães^{a,4}, Pedro Henrique da Silva Souza^{a,5}, Priscilla
Fonseca de Abreu Braz^{a,6}**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: A Computação é uma área presente nos diversos contextos da sociedade. Em 2022 uma norma foi definida regulamentando o ensino de Computação na Educação Básica, tendo como um dos fundamentos básicos o Pensamento Computacional. Nesse contexto, um projeto de extensão foi proposto visando promover o desenvolvimento de habilidades essenciais para o futuro por meio do Pensamento Computacional. Este trabalho visa apresentar as ações desse projeto, bem como os primeiros resultados dessas ações envolvendo estudantes de Ciência da Computação na condução de atividades nas escolas públicas com estudantes de Ensino Médio.

Palavras-chave: Pensamento computacional; educação; oficinas; escolas públicas; computação.

¹ lucianavictoria296@gmail.com.

² bosmoraes@gmail.com.

³ vitordesa77@gmail.com.

⁴ biancadantasduraes@gmail.com.

⁵ souza.pedro_15@graduacao.uerj.br.

⁶ priscilla.abreu@ime.uerj.br.

INTRODUÇÃO

O avanço acelerado da Computação tornou fundamental a inserção do uso da tecnologia na educação, visando permitir que as escolas proporcionem aos alunos o desenvolvimento de habilidades essenciais para a sociedade contemporânea (França; Tedesco, 2015).

Em 2022, o Ministério da Educação (MEC) homologou um parecer estabelecendo diretrizes para o ensino de Computação na educação básica, o que reforçou a relevância de incluir essas habilidades nesse nível de ensino. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi complementada para abranger as normas referentes à área da Computação (BNCC, 2022; MEC, 2022).

De acordo com o complemento da BNCC com relação à Computação (BNCC, 2022), os conhecimentos da área voltados para a Educação Básica podem ser estruturados em três eixos principais: Mundo Digital, Cultura Digital e Pensamento Computacional (PC).

O conceito de Pensamento Computacional foi amplamente explorado por Wing (Wing, 2006) e, ao contrário do que muitos acreditam, não se limita ao uso de programação. PC é uma abordagem voltada à resolução de problemas, envolvendo conceitos fundamentais da Computação, como decomposição de problemas, controle de erros, abstração, pensamento recursivo, entre outros.

Além do Pensamento Computacional ser cada vez mais relevante em um mundo onde a tecnologia desempenha um papel central na vida cotidiana, o desenvolvimento dessa competência permite que estudantes enfrentem problemas complexos, dividindo-os em partes menores e aplicando técnicas lógicas para encontrar soluções eficazes (Shute et al., 2017). Nesse sentido, contribuir para o desenvolvimento dessas habilidades é crucial para melhorar a qualidade do ensino na Educação Básica, especialmente no contexto das escolas públicas.

Em paralelo, o curso de Ciência da Computação geralmente apresenta uma formação mais técnico-científica, sem envolver diretamente uma integração com escolas e outros níveis de ensino, já que não é um curso de licenciatura. No entanto, iniciativas de integração escola-universidade têm demonstrado vantagens para ambos os lados dessa integração (Holanda et al., 2016; Avila et al., 2016).

Nesse contexto, o projeto “Desenvolvimento do Pensamento Computacional em Escolas Públicas do Estado do Rio de Janeiro” surgiu como uma iniciativa de extensão na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), buscando integrar estudantes do curso de Ciência da Computação com estudantes de Ensino Médio buscando desenvolver essas habilidades no contexto das escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro, tendo como uma de suas principais ações o oferecimento de oficinas relacionadas ao PC.

Por meio de oficinas que combinam atividades plugadas e desplugadas, o projeto pretende criar um ambiente de aprendizagem dinâmico, contribuindo para a formação de estudantes mais criativos e preparados para os desafios do futuro. Este trabalho relata os resultados iniciais desse projeto nas escolas do Estado do Rio de Janeiro.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em sua obra clássica “Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas”, Papert destaca a visão inicial dos computadores na sociedade como algo caro e até mesmo exótico, que rapidamente se integrou ao cotidiano. Desde então, o autor explorou como os computadores poderiam influenciar a forma como as pessoas pensam e aprendem (Papert, 1980). Papert também discute a diferença entre o que os computadores podem fazer e o que a sociedade decidirá fazer com eles, considerando que a sociedade tem formas variadas de resistir às mudanças “ameaçadoras”. Isso reforça a importância de cada vez mais

aprofundarmos as pesquisas e discussões relacionadas à inserção da Computação na Educação Básica, principalmente quando analisamos o contexto das escolas públicas (Papert 1980).

Já Mitchel Resnick (Resnick, 2020) propõe o desenvolvimento e aplicação de tecnologias e atividades para envolver crianças em experiências de aprendizagem criativa, argumentando que uma das maiores invenções dos últimos mil anos foi o jardim de infância, onde as crianças podem interagir com brinquedos, manipular materiais e explorar diversos objetos. O autor também traz à discussão a integração das tecnologias na vida das crianças e jovens, em que enfatiza que notebooks, smartphones e suas variações não são apenas ferramentas tecnológicas, mas instrumentos que fazem parte do cotidiano, como lápis de cor e outros materiais.

Considerando a importância da presença da tecnologia na educação, em 2022, o Ministério da Educação aprovou um parecer estabelecendo diretrizes para o ensino de Computação na Educação Básica, destacando a importância de desenvolver habilidades nessa área desde os primeiros anos escolares. Tais normas foram publicadas como complemento à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a inclusão da Computação no currículo (BNCC, 2022). Os conhecimentos da Computação na Educação Básica estão estruturados em três eixos principais: Mundo Digital, Cultura Digital e Pensamento Computacional.

Em 2006, Wing (2006) trouxe notoriedade ao conceito de Pensamento Computacional, com seus estudos, ao descrevê-lo como um processo de resolução de problemas de maneira clara e estruturada, envolvendo a identificação de padrões e a aplicação de princípios da Ciência da Computação para compreender o comportamento humano.

Outros avanços na área também foram impulsionados pelos estudos de Brackmann (2017), mais especificamente na criação de materiais e atividades desplugadas para introduzir conceitos de PC e programação contribuindo especialmente em contextos com infraestrutura limitada.

Apesar da existência de definições variadas para o PC, quatro pilares fundamentais foram definidos (BBC, 2022):

- Decomposição – processo de dividir um problema complexo em partes menores para facilitar sua resolução;
- Reconhecimento de Padrões – após a decomposição, permite identificar semelhanças entre os subproblemas ou elementos compartilháveis, otimizando a solução;
- Abstração – consiste em eliminar detalhes irrelevantes e focar nos aspectos essenciais do problema, reduzindo sua complexidade; e
- Algoritmos – refere-se à definição de uma sequência estruturada de passos para solucionar um problema ou executar uma tarefa.

Com base nesses pilares do Pensamento Computacional, as oficinas do projeto aqui apresentado foram planejadas e organizadas.

O PROJETO “PENSAMENTO COMPUTACIONAL NAS ESCOLAS”

O projeto de extensão aqui apresentado surgiu como uma iniciativa de levar o Pensamento Computacional para as escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro, buscando disseminar sua importância para toda a comunidade escolar. Este projeto tem como principal objetivo desenvolver oficinas nestas escolas para o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao Pensamento Computacional e à área de Programação, relacionando com as outras áreas de conhecimento presentes na Educação Básica.

As principais etapas da primeira fase deste projeto podem ser visualizadas na Figura 1 e descritas a seguir.

Inicialmente, seis estudantes do curso de Ciência da Computação participaram como voluntários, promovendo maior integração entre universidade e escola, além da possibilidade de obter experiência na condução das oficinas. Como primeira etapa

do projeto foi realizado um levantamento de iniciativas relacionadas ao desenvolvimento do PC na Educação Básica.

Em seguida, uma parceria com a Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro foi estabelecida para que as oficinas pudessem ser realizadas em escolas da rede, em que esta secretaria indicou duas escolas para implementar as atividades previstas pelo projeto de extensão. A partir disso, algumas reuniões foram realizadas pela coordenação do projeto com as escolas e com os respectivos estudantes voluntários, visando organizar as atividades das oficinas. O projeto foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa, por meio da Plataforma Brasil, base nacional que registra todas as pesquisas que envolvem seres humanos, com o processo CAAE: 71363623.0.0000.5260. Um total de 21 estudantes participaram das oficinas.

Figura 1. Etapas da 1ª fase do Projeto de Extensão.



Fonte: Os Autores, 2025.

As oficinas de PC foram planejadas de modo a promover uma aprendizagem prática e envolvente, com um total de 10 encontros com duração de três horas cada. Um conjunto de atividades desplugadas e plugadas foram organizadas visando atingir o objetivo de desenvolver as habilidades relacionadas ao PC. Atividades desplugadas, que não requerem o uso de computadores, tiveram como objetivo estimular o raciocínio lógico e a resolução de

problemas de forma colaborativa e divertida. Jogos, quebra-cabeças e dinâmicas em grupo foram utilizados para ensinar conceitos como decomposição e reconhecimento de padrões. Um exemplo de recurso utilizado foi o *AlgoCards*, um material elaborado por Brackmann ⁷ (2017). Exemplos dessas atividades podem ser visualizados na Figura 2 e na Figura 3 (a) e (b).

Figura 2. Atividade desplugada utilizando o *AlgoCards*.



Fonte: Os Autores, 2025.

⁷ <https://www.computacional.com.br/algocards>.

Figura 3. (a) Exemplo de atividade desplugada. (b) Alunos realizando a atividade.



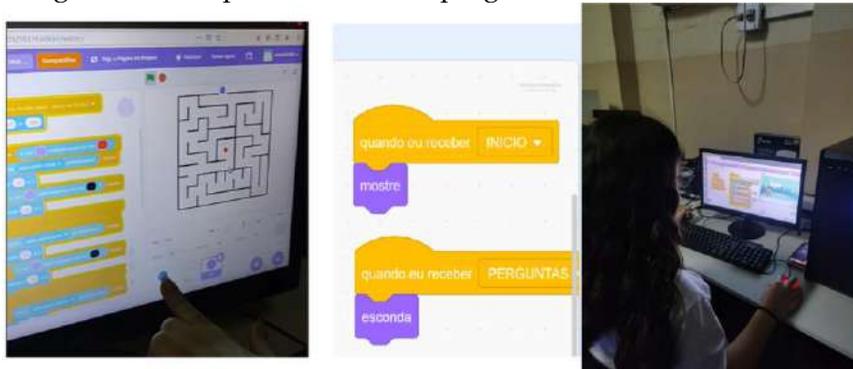
Fonte: Os Autores, 2025.

Além disso, atividades plugadas, utilizando recursos computacionais, foram realizadas nas escolas, complementando esse processo e permitindo que os estudantes aplicassem o que aprenderam em situações reais de programação. As atividades plugadas foram iniciadas com o uso de ferramentas com tarefas pré-definidas como Blockly Games⁸ e o LightBot⁹. Em seguida, a plataforma Scratch (Scratch, 2024) foi utilizada com um conjunto de atividades planejadas para desenvolver habilidades de algoritmos e programação (Figura 4). Mais detalhes sobre o planejamento das oficinas e de cada encontro podem ser visualizados em (Braz e Barcellos, 2024).

⁸ <https://blockly.games/>

⁹ <https://www.gameflare.com/online-game/light-bot/>

Figura 4. Exemplo de atividade plugada com o uso do Scratch.



Fonte: Os Autores, 2025.

No decorrer da realização das oficinas, os estudantes demonstraram interesse e envolvimento com as atividades conduzidas. Alguns desafios foram identificados no decorrer das atividades, tais como a dificuldade com conceitos básicos de matemática, à infraestrutura das escolas relacionada aos computadores, o fato das oficinas serem realizadas no contraturno das atividades escolares dos estudantes e, em uma das escolas, ao acesso à internet. O fato de que as oficinas deveriam ser realizadas no contraturno dos estudantes foi um fator bastante desafiador para eles, que precisavam ficar mais um turno na escola nos dias das oficinas. Por meio de conversas com eles e o próprio envolvimento deles com as oficinas, isso foi sendo administrado, mas não deixou de ser um desafio.

Ao final das oficinas, os estudantes das escolas tiveram a oportunidade de visitar a universidade, onde foi realizada a cerimônia de conclusão das oficinas. Eles participaram de uma atividade envolvendo a resolução de problemas e criatividade com a facilitação de uma especialista certificada na Metodologia LEGO SERIOUS PLAY (LSP) (LEGO, 2024), além de ter sido desenvolvida uma atividade relacionada à orientação de carreira, em que eles puderam compartilhar a experiência deles com as oficinas além de refletiram sobre seus sonhos e objetivos profissionais (Figura 5).

Após essa atividade, os estudantes também puderam compartilhar as atividades realizadas por eles no decorrer das oficinas, conhecer um pouco sobre o curso de Ciência da Computação da UERJ em uma conversa com a coordenadora do Curso e receber seus certificados (Figura 6).

Figura 5. Atividade baseada na metodologia LEGO SERIOUS PLAY (LSP).



Fonte: Os Autores, 2025.

Figura 6. Atividade de encerramento.



Fonte: Os Autores, 2025.

Por meio de observações e da coleta de dados com a aplicação de um questionário de feedback, em formato digital, foi possível identificar que o impacto desta primeira etapa do projeto nas escolas foi positivo, promovendo o interesse pela área da tecnologia entre os estudantes e incentivando o desenvolvimento de competências que vão além da sala de aula. O uso de atividades desplugadas, em particular, destacou-se pela capacidade de tornar acessível o PC a todos, independentemente do acesso à tecnologia, democratizando assim o aprendizado.

Alguns comentários dos estudantes sobre as oficinas reforçam o impacto positivo dessas atividades, como pode ser percebido em: “Nesses 2 meses gostei de trabalhar em equipe com o pessoal, os professores me ajudaram muito nas coisas que eu estava tendo dificuldade”, “Eu gostei do curso, amei muito esse curso, e eu quero que esse curso continue sempre nas escolas” e “Cara por mim poderia ter uma parte 2 desta oficina. Algo mais difícil, mais avançado”.

A partir das observações e dados coletados nesta última etapa, melhorias para as próximas oficinas já vêm sendo aplicadas, tais como a condução das oficinas em mais de 1 dia na semana, adaptações e atualização das atividades, além do planejamento de novas oficinas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Pensamento Computacional é uma competência fundamental para o século XXI, pois desenvolve habilidades como a resolução de problemas, o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de lidar com desafios complexos. Em um mundo cada vez mais tecnológico, compreender e aplicar princípios do PC auxilia na preparação dos indivíduos para a era digital, independentemente da área de atuação. Na educação, sua incorporação fortalece não apenas o aprendizado de disciplinas básicas, mas também estimula o pensamento crítico e a autonomia na busca por soluções, tornando os estudantes mais preparados para enfrentar os desafios da sociedade contemporânea.

O Projeto “Desenvolvimento do Pensamento Computacional em Escolas Públicas do Estado do Rio de Janeiro” é uma iniciativa para contribuir com a formação de estudantes mais preparados para os desafios do futuro. As oficinas realizadas têm demonstrado resultados positivos no engajamento dos alunos e no aprendizado de conceitos computacionais de maneira acessível e divertida. Alguns desafios foram levantados na primeira etapa de condução dessas oficinas, como dificuldades com a matemática básica, limitações de infraestrutura das escolas, realização das atividades no contraturno da escola, entre outros.

Nesse contexto, como trabalhos futuros, o projeto continuará levando oficinas para as escolas, aperfeiçoando a proposta e materiais das oficinas, além de buscar maior aproximação com professores, para que eles possam também aplicar o PC em sala de aula e promover melhorias no processo de ensino e aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

A equipe do Projeto Pensamento Computacional nas Escolas agradece o apoio da Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro, pela parceria e disponibilidade de colaboradores acompanhando o projeto e auxiliando no decorrer das atividades e às escolas parceiras por aceitarem esse desafio.

REFERÊNCIAS

- AVILA, L.; BERNARDINI, F. C.; MORATORI, P. **O uso de Robótica para aprendizado de Programação integrando alunos de Educação Básica e Ensino Superior**. Anais do Workshop sobre Educação em Computação (WEI), p. 2275-2283, 2016.
- BBC Learning. **What is computational thinking?** Disponível em: <https://www.bbc.com/bitesize/topics/z7tp34j>. Acesso em: 5 dez. 2022.
- BNCC – Complemento à Base Nacional Curricular Comum. **Computação na Educação Básica**. Disponível em: <https://portal.mec.gov.br/docman/fevereiro-2022-pdf/236791-anexo-ao-parecer-cn-ecceb-n-2-2022-bncc-computacao/file>. Acesso em: 5 dez. 2022.
- BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do Pensamento Computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica**. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017).
- BRAZ, P. F. A.; BARCELLOS, R. S. **Desenvolvimento do Pensamento Computacional em Escolas Públicas do Ensino Médio: Um Relato de Experiência**. Anais do XXX WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE), p. 449-460, 2024.
- FRANÇA, R. S.; TEDESCO, P. C. A. R. **Desafios e oportunidades ao ensino do Pensamento Computacional na Educação Básica no Brasil**. Anais do Workshop de Ensino em Pensamento Computacional, Algoritmos e Programação, p. 1464–1473, 2015.

HOLANDA, M.; DE ARAÚJO, A. P. F.; WALTER, M. E. T.; DE OLIVEIRA, C. A. de J. **Meninas.comp**: Um Relato da Experiência de Integração entre o Ensino Médio e a Universidade de Brasília. Anais do WOMEN IN INFORMATION TECHNOLOGY (WIT), p. 78-82, 2016.

LEGO. **Legó Serious Play™**. Disponível em:

<https://www.seriousplay.community/brazil/>. Acesso em: 10 jun. 2024.

MEC - Ministério da Educação. Disponível em: <https://www.gov.br/pt-br/noticias/educacao-e-pesquisa/2022/10/aprovado-parecer-que-define-normas-sobre-o-ensino-de-computacaona-educacao-basica>. Acesso em: 5 dez. 2022.

PAPERT, S. **Mindstorms**: children, computers, and powerful ideas. New York: Basic Books, 1980.

RESNICK, M. **Jardim de infância para a vida toda**: Por uma Aprendizagem Criativa, mão na massa e relevante para todos. Rio Grande do Sul: Penso, 2020.

SCRATCH. Disponível em: <https://scratch.mit.edu/>. Acesso em: 15 jul. 2024.

SHUTE, V. J.; SUN, C.; ASBELL-CLARKE, J. **Demystifying computational thinking**. Educational Research Review, 22, p. 142-158, 2017.

WING, J. M. **Computational Thinking**. Communications of the ACM, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

DESENVOLVIMENTO ÁGIL DE SOFTWARE: UMA VISÃO DE SUA UTILIZAÇÃO NA PRÁTICA

Agnes Almeida Preuss^{a,1}, Vera Maria Benjamim Werneck^a

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: A década de 90 foi marcada por transformações significativas na área de desenvolvimento de software, destacando a ascensão da internet e a prevalência da orientação a objetos, que resultaram no surgimento de sistemas complexos e globalmente acessíveis. Contudo, tornou-se evidente que não há uma solução única para os desafios complexos associados à produção desses sistemas. A partir do final daquela década, a adoção de metodologias ágeis em empresas começou a crescer oferecendo uma alternativa aos métodos anteriormente usados, pois conferiam vantagens em desempenho e qualidade, especialmente na interação com os clientes. Estas metodologias visavam desburocratizar o desenvolvimento, priorizando equipes pequenas capazes de criarem sistemas sem depender de extensas listas de procedimentos. Este trabalho tem como propósito identificar os métodos, técnicas e ferramentas atualmente utilizadas em empresas, em projetos acadêmicos e nas indústrias por meio de um *survey* criado a partir de uma fundamentação teórica e dos resultados dos trabalhos correlatos. As respostas foram analisadas sendo verificado que as informações obtidas são compatíveis com outras pesquisas realizadas no mundo em geral.

Palavras-chave: Metodologias ágeis; métodos ágeis; survey.

¹ agnes.preuss95@gmail.com.

INTRODUÇÃO

Por muitas décadas, a pesquisa em engenharia de software buscou encontrar uma solução para a crise do software. Diversas abordagens, como ferramentas CASE (*Computer Aided Software Engineering*), especificações formais e processos, foram consideradas como boas soluções. No entanto, com a evolução dos produtos de softwares, ficou claro que não existe uma única solução para os complexos problemas associados à produção deles (Wazlawick, 2019).

A década de 90 trouxe mudanças significativas, como a ascensão da internet e a predominância da orientação a objetos na produção de software. Essas mudanças alteraram fundamentalmente a forma como o software era desenvolvido, levando ao surgimento de sistemas complexos e acessíveis globalmente. Isto também trouxe desafios adicionais, como preocupações com a segurança de dados e o aumento de ameaças como vírus e spam, que se tornaram prioridades para os desenvolvedores de software (Wazlawick, 2019).

A partir do final dos anos 90 os métodos ágeis começaram a ser adotados pelas empresas devido as diversas vantagens em relação aos métodos tradicionais como: melhor desempenho e qualidade por meio de várias interações com o cliente, sendo estes, mais fáceis de serem acompanhados pelos próprios clientes (Talwani; Chug, 2016). Wazlawick (2019) traz uma definição complementar dos métodos ágeis “Assim surgiram os métodos ágeis, que procuram desburocratizar o processo de desenvolvimento e deixá-lo mais adequado a equipes pequenas, mas competentes, capazes de desenvolver sistemas sem a necessidade de extensas listas de procedimentos ou de “receitas de bolo””.

O uso de métodos ágeis reduz o prazo de desenvolvimento entre a geração de uma ideia e a sua implementação, reduzindo o risco de mal-entendidos, sendo atualmente uma prática bastante utilizada em empresas (Duka, 2012) (Talwani; Chug, 2016).

Sendo assim, o presente trabalho tem como objetivo identificar quais práticas ágeis estão sendo utilizadas na indústria e na área acadêmica por meio de um questionário a ser enviado a profissionais brasileiros que moram ou que moraram no Brasil, vindo a contribuir com novas perspectivas aos profissionais que atuam na área de desenvolvimento de software.

Para alcançar tal propósito foi realizada uma pesquisa por trabalhos correlatos, a elaboração de um *survey* e uma análise dos resultados obtidos no intuito de verificar se os achados são compatíveis com os resultados encontrados nos trabalhos correlatos.

TRABALHOS CORRELATOS

A pesquisa por trabalhos correlatos tem como objetivo fornecer contexto e orientação para o presente artigo. Através da análise de artigos existentes sobre técnicas, práticas e metodologias ágeis em uso em empresas, buscou-se realizar uma comparação, e assim, complementar as informações obtidas por meio do *survey*.

Na pesquisa, foram analisados trabalhos publicados no período de janeiro de 2013 a setembro de 2023. Durante a busca inicial, encontrou-se um total de 23.752 publicações. Após uma triagem detalhada e uma revisão criteriosa, optou-se por incluir cinco artigos nesta pesquisa devido às suas abordagens abrangentes dos aspectos fundamentais relacionados aos métodos, técnicas e ferramentas ágeis, tornando-os os mais pertinentes a este estudo.

Com base em sua revisão, observou-se a dificuldade em localizar trabalhos que abordassem, concomitantemente, as técnicas, as práticas e as metodologias ágeis utilizadas por empresas no Brasil. Além disso, muitos dos artigos identificados concentraram-se apenas nas regiões geográficas dos autores, com ênfase na região Sul do país.

Outro ponto que se destaca é o reconhecimento, por parte dos respondentes, dos benefícios da adoção de metodologias ágeis, tendo como a mais utilizada o Scrum. No entanto, também foi

relatado que as empresas ainda enfrentam alguns obstáculos na implementação desses métodos, como por exemplo, a resistência cultural à mudança.

Um adendo aos resultados é que em alguns desses estudos o Kanban é considerado como uma metodologia ágil, frequentemente com uma grande adesão. No entanto, é importante esclarecer que o Kanban, na verdade, é uma técnica japonesa, que no contexto do desenvolvimento de software, é usada para controlar o trabalho em andamento (Anderson, 2011).

DESCRIÇÃO DA PESQUISA

Neste trabalho foi realizada uma pesquisa que foi submetida e aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa (COEP) no parecer nº 6.409.575 em 30 de outubro de 2023 e foi aprovado com o número de Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) 74351923.6.0000.5260, com o objetivo de identificar os métodos, as técnicas e as ferramentas utilizados atualmente em empresas, nos projetos da área acadêmica e da indústria. Em seguida, foi realizada uma análise dos dados no intuito de verificar se os achados são compatíveis com os trabalhos correlatos.

Para atingir o objetivo proposto foi realizado um survey com 14 perguntas que apresenta as seguintes partes: termo de consentimento livre e esclarecido; identificação do perfil do respondente abordando demografia, educação, tipo de contratação e características do trabalho atual; perguntas específicas sobre o conhecimento, prática e experiência com a metodologia ágil e as suas ferramentas.

Visando uma maior aderência nas respostas ao questionário, optou-se por realizá-lo de forma online e auto administrável através do *Google Forms*. Já para efetuar a seleção dos participantes utilizou-se o método “Bola de Neve” (Vinuto, 2014), onde durante o período de 20/11/2023 até 20/12/2023 enviou-se mensagens eletrônicas a alguns profissionais da área, que fazem

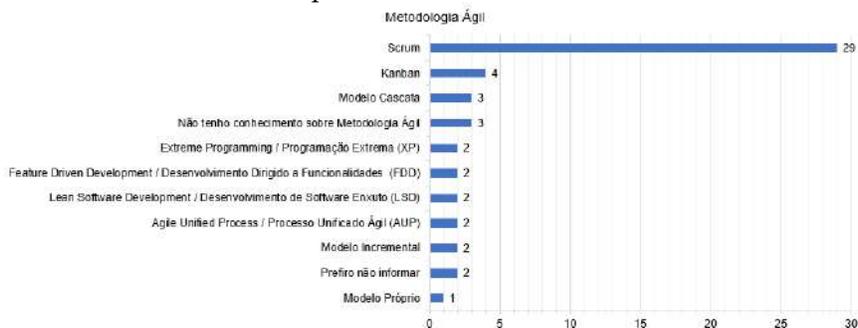
parte da rede de conhecimentos dos pesquisadores e cada profissional recomendou de 2 a 4 indivíduos.

Foram obtidas 45 respostas válidas, fornecidas pelos profissionais da área e não foram descartadas respostas, pois todos os participantes concordaram com o termo de consentimento.

RESULTADOS

A análise dos resultados da pesquisa deixou clara a preferência dos entrevistados e dos projetos em que trabalhavam pela metodologia Scrum (Figura 1), resultando em 29 (em torno de 64%) de adeptos da metodologia, alinhando-se com a tendência observada nos trabalhos correlatos. No entanto, ao analisar as práticas ágeis (Figura 2), notou-se que a metade dos respondentes não seguiam todas as práticas do Scrum, como por exemplo, os eventos de retrospectiva, planejamento e revisão não eram usados.

Figura 1. Gráfico da divisão de metodologias ágeis com que os respondentes trabalham.



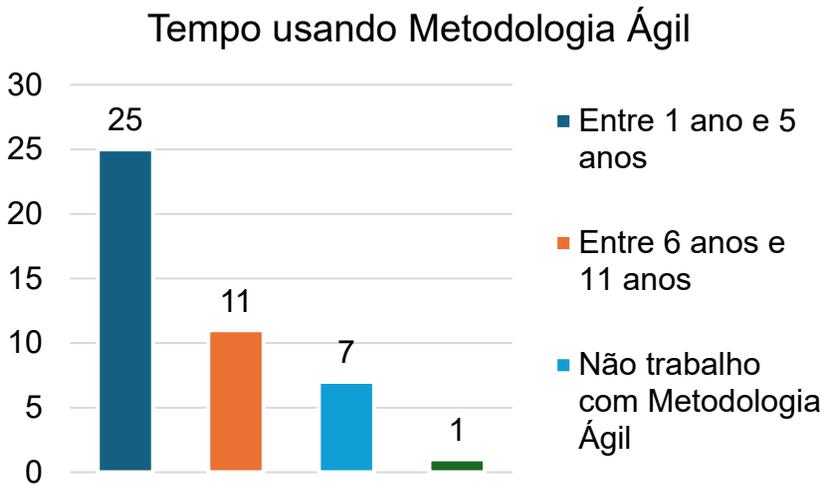
Fonte Autoria própria, 2023.

Figura 2. Gráfico da divisão de práticas ágeis usadas pelos respondentes.



Fonte Autoria própria, 2023.

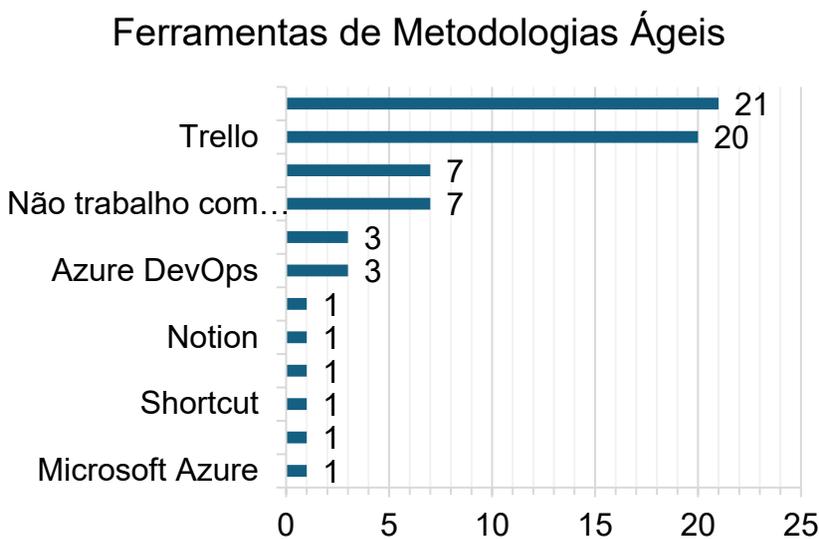
Figura 3. Gráfico da experiência dos respondentes, em anos, trabalhando com metodologia ágeis.



Fonte Autoria própria, 2023.

Outro ponto em comum foram as ferramentas ágeis Trello e Jira que eram as mais utilizadas (Figura 4), e na adesão ao Kanban como metodologia ágil, inclusive por parte dos entrevistados com experiência de 6 a 11 anos em metodologias ágeis (Figura 3).

Figura 4. Gráfico da divisão das ferramentas de metodologias ágeis usadas pelos respondentes.



Fonte Autoria própria, 2023.

Outra questão observada foi que 4 respondentes (9%) utilizavam mais de uma metodologia ágil, sendo que um deles utiliza o Scrum e um modelo prescritivo (Modelo Incremental) gerando assim alguns questionamentos como:

- A elaboração da pergunta ficou ambígua de forma que entenderam que era para marcar todas as metodologias que utilizavam durante sua carreira;
- A diversidade de opções sugeria um elevado grau de conhecimento das metodologias ágeis por parte dos participantes ou do projeto em que trabalhava de forma que ficava factível ter uma metodologia para cada projeto, o que implicava na existência de um participante (gerente de projeto) gerenciando quatro projetos ao mesmo tempo;
- Nenhuma metodologia atendia integralmente a demanda do projeto;

- Faltava conhecimento sobre as metodologias, sendo assim, em vez de escolher a que melhor se aplicava ao projeto, optava-se por mesclar um pouco de cada uma.

Verificou-se que ainda utilizavam modelos prescritivos em projetos, inclusive por parte de um participante que trabalhou com metodologias ágeis pelo período de 1 a 5 anos, indicando assim que as abordagens tradicionais ainda têm espaço em determinados contextos. Entretanto, a maioria aplicava práticas ágeis em seu trabalho, como pequenas entregas, priorização de tarefas, feedback com o time, e três empregavam ferramentas normalmente utilizadas por equipes ágeis. Além disso, entre todos os respondentes que não utilizavam as metodologias ágeis, quatro respondentes conseguiram apontar benefícios de utilizá-las.

Ademais, houve três participantes (7%) que desconheciam as metodologias ágeis. No entanto, nesse mesmo cenário, um participante (2%) marcou as práticas ágeis que utilizava (equipe autogerenciável e times pequenos: 4 – 9 pessoas).

Um aspecto peculiar foi a menção de um entrevistado sobre a implementação de um modelo próprio ágil, onde era utilizado várias práticas ágeis, muitas inclusive derivadas do Scrum, porém não estava tão satisfeito com a metodologia em si.

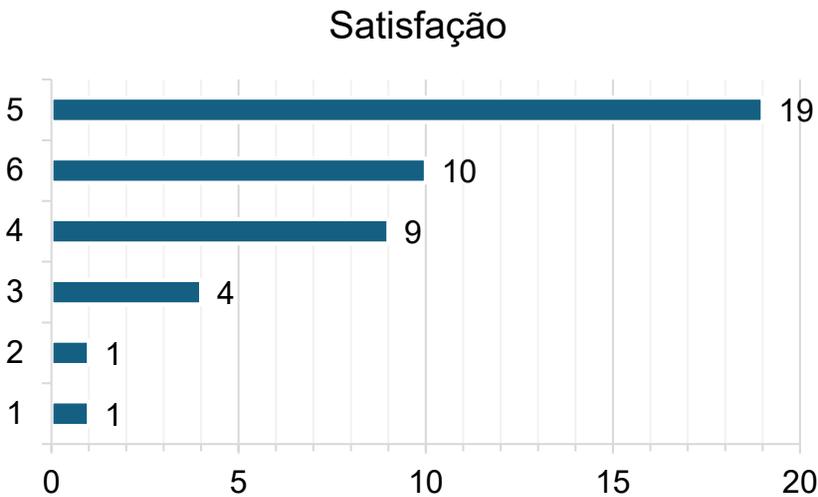
Por fim, na Figura 6, 38 participantes (84%) indicaram estar satisfeitos com o uso de metodologias ágeis. Incluindo respondentes que a utilizam por exigência do projeto (Figura 5), onde dos 15 respondentes, 14 estão no espectro de satisfeito. A nota 1 obtida veio de um respondente (2%) que não utilizava nenhuma metodologia ágil e as notas 2 e 3 vieram de pessoas que utilizavam as metodologias de 1 a 5 anos ou que usavam modelos prescritivos ou que não utilizavam nenhuma metodologia. O que leva à reflexão de que esta insatisfação deve ser oriunda da falta de conhecimento prático ou teórico ou até mesmo da ausência de uma estratégia de utilização como um método a ser seguido.

Figura 5. Gráfico da divisão dos motivos para os respondentes usarem metodologias ágeis.



Fonte Autoria própria, 2023.

Figura 6. Gráfico da divisão de satisfação dos respondentes com as metodologias ágeis.



Fonte Autoria própria, 2023.

CONCLUSÃO

A partir do desenvolvimento deste trabalho obteve-se como resultado respostas similares as apresentadas na pesquisa de

trabalhos correlatos, onde a maioria dos entrevistados utilizava o Scrum como metodologia ágil e também citava o Kanban como metodologia ágil. Além disso, houve respondentes que não utilizam metodologia ágil e/ou não conhecem elas.

Ademais, os respondentes estavam satisfeitos com as metodologias ágeis que empregavam. A maioria apresentava um alto grau de satisfação com as metodologias que utilizava, mesmo os 14 respondentes que a aplicavam também por exigência do projeto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as divindades que têm me acompanhado, assim como à minha amada família, amigos e colegas que contribuíram de maneira inestimável na minha jornada.

À minha mãe, Regina Célia da Fonseca Almeida, por seu apoio inabalável em todas as escolhas que fiz, por ser um exemplo notável de pessoa e por permanecer ao meu lado, proporcionando-me o suporte necessário para que alcançasse meus objetivos.

Ao meu pai, Hilton Preuss, pelos valiosos conselhos, ensinamentos, incentivo e encorajamento ao longo dos desafios que enfrentei.

À Professora Vera Werneck, que aceitou a responsabilidade de me orientar nesse tema tão importante para mim, pelo aprendizado, apoio e paciência incansável.

Ao amigo Thalles Fontainha, meu eterno agradecimento pela amizade sincera, pelo suporte constante durante o curso e pela paciência diante as minhas inúmeras dúvidas.

A todas as pessoas que dedicaram seu tempo a responder ao survey, meu muito obrigado. Cada contribuição foi valiosa.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, David J. **Mudança Evolucionária de Sucesso para Seu Negócio de Tecnologia**: Sequim, Washington, 2011.
- DUKA, Denis. **Agile experiences in software development**. In: IEEE. 2012 Proceedings of the 35th International Convention MIPRO. [S.l.], 2012. p. 692–697.
- TARWANI, Sandhya; CHUG, Anuradha. **Agile methodologies in software maintenance**: A systematic review. *Informatica*, v. 40, n. 4, 2016.
- VINUTO, J. **A amostragem em bola de neve na pesquisa qualitativa: um debate em aberto**. *Temáticas*, Campinas, v. 22, n. 44, p. 203-220, 2014.
- WAZLAWICK, Raul. **Engenharia de software**: conceitos e práticas. [S.I.]: Elsevier Editora Ltda., 2019.

JOGO DOS ODS - UMA MANEIRA LÚDICA DE INTRODUÇÃO DOS OBJETIVOS DO DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL PARA CRIANÇAS E JOVENS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Luana Pinho^{a,1}, Alex da Silva Cardoso^a, Isabela de Assunção Pinto^a, Mariana Rangel Conti Rolim^a

^a Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: O projeto Oceano & Sociedade busca sensibilizar estudantes sobre a cultura oceânica e sustentabilidade. Através de atividades lúdicas, promove discussões sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da ONU, como no "Jogo das ODS", que utiliza um tabuleiro para ensinar sobre os 17 ODS de forma interativa e dinâmica. O jogo foi aplicado na XVII Semana do IME de 2024, promovendo aprendizado e reflexão sobre biomas, sustentabilidade e ações individuais para um futuro mais justo.

Palavras-chave: Agenda 2030; sustentabilidade; biomas e ensino.

INTRODUÇÃO

O Oceano & Sociedade é um projeto de Extensão da Faculdade de Oceanografia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Vinculado ao Laboratório de Oceanografia Química (LABOQUI), o projeto teve seu início em 2019 e desde então tem como seu principal objetivo apresentar a crianças e jovens estudantes do ensino fundamental e médio do Estado do Rio de Janeiro os conceitos de cultura oceânica, serviços ecossistêmicos e sustentabilidade. Para isso, o projeto promove diversas atividades lúdicas e/ou interativas, abordando temas que relacionam a

¹ luanaqp@gmail.com.

sociedade e suas diferentes demandas em relação ao bioma oceânico e também discussões que englobam de forma multidisciplinar os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável (ODS).

Os ODS foram desenvolvidos pela Assembleia Geral das Nações Unidas em setembro de 2015, como parte de uma iniciativa global para erradicar a pobreza, proteger o meio ambiente e promover a prosperidade para todos até 2030 (United Nations, 2015). Totalizando 17 objetivos e 169 metas específicas, além de diferentes indicadores para medir os progressos obtidos, os ODS abrangem uma ampla gama de questões que perpassam áreas relacionadas a biosfera, sociedade e economia, como apresentado no modelo de bolo de noiva desenvolvido por Johan Rockström e Pavan Sukhdev (Stockholm Resilience Center, 2016). Os 17 ODS e seus objetivos principais estão listados a seguir:

1. *Erradicação da pobreza: Visa eliminar a pobreza extrema e a pobreza geral, com foco na aplicação de políticas que promovam uma distribuição mais equitativa da riqueza e a melhoria das condições de vida das populações mais vulneráveis.*
2. *Fome zero e agricultura sustentável: Busca garantir que todas as pessoas tenham acesso a uma alimentação nutritiva, além de promover práticas agrícolas sustentáveis que não prejudiquem o meio ambiente e que sejam resistentes às mudanças climáticas.*
3. *Saúde e bem-estar: Foca em melhorar os sistemas de saúde, garantir o acesso a serviços médicos de qualidade e aderir a políticas que promovam o bem-estar físico e mental de todas as pessoas.*
4. *Educação de qualidade: Propõe ampliar o acesso à educação em todos os níveis e em todas as idades, com ênfase na educação de qualidade, reduzindo desigualdades e promovendo a inclusão.*
5. *Igualdade de gênero: Busca eliminar a discriminação de gênero e a violência contra as mulheres e meninas,*

promovendo sua participação plena e igualitária na sociedade e na economia.

6. *Água potável: Oportuniza o acesso universal à água potável e a sistemas de saneamento adequados, além de promover o uso sustentável dos recursos hídricos.*
7. *Energia acessível e limpa: Proporciona a expansão do acesso à energia elétrica e à energia renovável, de forma a reduzir a dependência de fontes poluentes e não renováveis.*
8. *Trabalho decente e crescimento econômico: Fomenta o crescimento econômico que seja inclusivo, criando empregos e oportunidades para todos, com ênfase no trabalho digno e nas condições de trabalho justas.*
9. *Indústria, inovação e infraestrutura: Evidencia a criação de infraestruturas que sejam firmes a desastres e mudanças climáticas, além de apoiar a industrialização sustentável e incentivar a inovação tecnológica.*
10. *Redução das desigualdades: Procura combater as desigualdades econômicas, sociais e políticas, promovendo a inclusão e o acesso igualitário a oportunidades e recursos.*
11. *Cidades e comunidades sustentáveis: Viabiliza melhorias nas condições urbanas, com foco na criação de cidades sustentáveis que garantam acesso à habitação, transporte e infraestrutura adequados, além de serem resilientes a desastres.*
12. *Consumo e produção responsáveis: Promove padrões de consumo e produção responsáveis, incentivando a redução do desperdício, a utilização eficiente dos recursos e a gestão adequada dos resíduos.*
13. *Ação contra a mudança global do clima: Ressalta o enfrentamento da crise climática, por meio de ações globais para reduzir as emissões de gases de efeito estufa e mitigar os efeitos da mudança climática.*
14. *Vida na água: Destaca a importância de proteger e restaurar os ecossistemas marinhos, prevenindo a poluição dos oceanos e promovendo o uso sustentável de seus recursos.*

15. *Vida Terrestre: Frisa a preservação dos ecossistemas terrestres e florestais, combatendo a degradação ambiental e promovendo a recuperação da biodiversidade.*
16. *Paz, justiça e instituições eficazes: Favorece a promoção da paz, segurança e justiça, com ênfase na construção de instituições transparentes, responsáveis e inclusivas.*
17. *Parcerias e meios de implementação: Possibilita parcerias globais, envolvendo governos, setor privado e sociedade civil, para alcançar os ODS, além de promover o financiamento adequado para as iniciativas.*

Apesar de haver um ODS específico para tratar das questões voltadas a vida na água (ODS14), acreditamos na importância da abordagem multidisciplinar. Essa perspectiva permite abordar a temática com uma visão mais rica e interligada com diferentes temáticas que perpassam o cotidiano da sociedade. Desta forma, a equipe do Oceano & Sociedade elaborou uma ferramenta de aprendizagem baseada na ludicidade e que integrasse questões, problemáticas e curiosidades ligadas aos oceanos, a vida na água ou ao consumo de água com os 17 ODS elencados pela ONU através da Agenda 2030, nascendo assim o “Jogo das ODS”. A atividade proposta pelo jogo é uma forma de apresentar a Agenda 2030 é o seu compromisso global em busca um futuro mais justo, próspero e equilibrado para as gerações atuais e futuras através de uma metodologia ativa. Este tipo de metodologia é definido como uma espécie de conjunto de procedimentos e técnicas trabalhadas de forma participativa e colaborativa, centrando a atividade no aluno (Krohl, et. Al. 2021).

FUNCIONAMENTO DO JOGO

O jogo foi totalmente criado e executado pela equipe do Projeto Oceano e Sociedade. Ele é composto por um tapete onde estão dispostos os 17 ODS em ordem crescente em discos concêntricos dispostos em 4 etapas, com quatro ODS por sessão e

um ODS centralizado (o ODS17). Há também um painel com 17 cartões (uma para cada ODS) onde existem diversas perguntas sobre cada um dos temas e estas organizadas com quatro opções de respostas. E por último, foram confeccionadas 16 prendas referentes aos 16 ODS (com exceção do ODS 17).

Figura 1. Elementos do Jogo dos ODS onde aparecem o tapete, as perguntas e as prendas utilizadas para a realização do jogo.



Fonte: Arquivo pessoal, 2025.

O objetivo do jogo é apresentar os 17 ODS de forma lúdica e dinâmica para os alunos participantes. O jogo deve ser jogado no mínimo por quatro participantes ou por quatro equipas, sendo que cada uma deve conter no máximo até quatro jogadores. A dinâmica do Jogo se dá com as equipas posicionadas no círculo mais externo do tapete. Nele os participantes agirão como os peões no tabuleiro.

Figura 2. Alunos das escolas participantes distribuídos como os peões sobre o tapete.



Fonte: Arquivo pessoal, 2025.

Na primeira rodada os participantes estão localizados nos ODS 1, 2, 3 e 4. A partida inicia-se com perguntas retiradas das fichas, direcionadas a cada participante conforme o ODS em que ele estiver localizado. Caso acerte a resposta, a equipe avança uma casa, movendo-se para o próximo círculo do tapete. No caso do participante errar a resposta, ele deve deslocar-se lateralmente no sentido horário, permanecendo no mesmo círculo que estava anteriormente e recebendo como “castigo” uma prenda correspondente àquele ODS em que ele errou a pergunta.

Prendas referentes a cada ODS:

ODS 1 – Prato de comida

ODS 2 – Capacete do agrotóxico

ODS 3 – Bolsa de soro

ODS 4 – Chapéu de formatura

ODS 5 – Balança de gênero

ODS 6 – Galão de substância tóxica

ODS 7 – Arco de cabelo com hélices de energia eólica

ODS 8 – Tripé econômico

ODS 9 – EPI (capacete, óculos de proteção e protetor auricular)

ODS 10 – Martelo da justiça

ODS 11 – Painel solar

ODS 12 – Triângulo da sustentabilidade

ODS 13 – Termômetro do aquecimento global

ODS 14 – Guarda chuva de água viva

ODS 15 – Árvore

ODS 16 – Bandeira da ONU

Figura 3. Alunos das escolas participantes com as prendas referentes aos ODS 2 e 14.



Fonte: Arquivo pessoal, 2025.

Regras:

1. As prendas devem ser carregadas pelos participantes ao longo de toda a partida. Ou até algum outro participante errar uma pergunta do mesmo ODS referente a prenda carregada;
2. Quem acumular erros em diferentes ODS precisará carregar todas as prendas recebidas até o final do jogo;

As perguntas do jogo foram elaboradas com três níveis de dificuldades, o que permite que o jogo seja compatível com diferentes idades, uma vez que podemos escolher perguntas mais simples para alunos do fundamental até mesmo perguntas mais complexas para alunos de ensino médio.

APLICAÇÃO DO JOGO NA SEMANA DO IME

O projeto Oceano e Sociedade vem trabalhando com a equipe responsável pela Semana do IME já há alguns anos. A Semana do IME é sempre uma ótima oportunidade de interação e troca entre alunos de diferentes projetos e laboratórios. Esta troca de experiências entre os graduandos e as vivências com os alunos de escolas do Estado do Rio de Janeiro são um momento riquíssimo de aprendizagem e troca para todos que participam desta iniciativa.

No ano de 2024, a atividade do Jogo dos ODS compôs o quadro de oficinas da XVII Semana do IME, que foi realizada no dia 25 de outubro de 2024. Idealizada para o público jovem e infantil, a atividade proporcionou efeitos educativos e também de diversão para os alunos das escolas, da graduação, monitores e professores que participaram ao longo da tarde. Lozza e Rinaldi (2017) destacam em seu trabalho que as instituições educacionais que realmente apostem na educação com projetos pedagógicos atualizados, com metodologias atraentes e professores inspiradores, além de materiais interessantes, complexos e desafiadores apresentarão resultados mais satisfatórios. Baseado nesse princípio, o jogo traz de forma alegre a discussão de diferentes temas dos ODS, levando a reflexão e conseqüentemente ao aprendizado que problemáticas, curiosidades e problemas que enfrentamos em nosso dia a dia mas que por muitas vezes não damos a devida atenção.

Durante a atividade tivemos o contato com diversos jovens estudantes da rede pública do Rio de Janeiro que demonstraram profundo interesse e curiosidade pela atividade e aqueles que

participaram expressaram satisfação ao participar do jogo. Também tivemos o prazer de trocar experiências com alunos e professores universitários que transitavam pelo corredor e se sentiram instigados a saber mais sobre os temas trabalhados. A partir disso, os alunos de graduação do projeto conseguiram trocar experiências com profissionais de diversas áreas, incluindo os monitores e professores da rede pública, permitindo o surgimento de ideias para aprimoramento da prática. Vale destacar que as perguntas estão sempre sendo atualizadas, o que dá ao jogo um caráter dinâmico e contemporâneo.

Figura 5. Equipe do Projeto Oceano e Sociedade que participou da XVII Semana do IME.



Fonte: Arquivo pessoal, 2025.

O JOGO E OS BIOMAS

O tema da Semana do IME de 2024 foi “Biomias do Brasil: diversidade, saberes e tecnologias sociais”. Os biomias representam

ecossistemas essenciais para a manutenção da biodiversidade e da vida no planeta. Como citado inicialmente, uma das classificações que os ODS podem ser agrupados é exatamente sobre a Biodiversidade (Stockholm Resilience Center, 2016). Além disso, os diferentes saberes também são discutidos na classificação social, enquanto que as tecnologias também são abordadas em diversos outros ODS também ligados a parte social e também na econômica. Desta forma, a atividade realizada esteve diretamente conectada com o tema abordado neste ano, permitindo refletir de maneira integrada e interdisciplinar o tema proposto.

OS JOGOS E OS OBJETIVOS DO DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Os jogos não só tornam o aprendizado sobre os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável mais dinâmico e interativo, como também reforça a importância da Agenda 2030 e seus principais objetivos. Borges e Neves (2023) analisaram nove trabalhos que se utilizavam de jogos educacionais como uma alternativa atrativa e eficaz para sensibilizar e educar pessoas de diferentes faixas etárias sobre os desafios e as soluções relacionados à sustentabilidade e notaram que mesmo tendo apresentado diferentes modelos e públicos, todos foram considerados com resultados positivos.

Ao avançar pelos desafios e refletir sobre os temas abordados e perguntas feitas, os participantes compreendem, de forma prática, como suas ações individuais estão interligadas com metas globais voltadas para o desenvolvimento sustentável e como suas ações, escolhas e iniciativas podem contribuir para um mundo mais justo e resiliente para as futuras gerações. Plass et. al. (2015), dizem em seu artigo que trabalhar os pontos de vistas integrados das perspectivas cognitiva, motivacional, afetiva e sociocultural são necessários tanto para o design dos jogos quanto para a pesquisa de jogos, dando poder aprimorado para o potencial dos jogos na educação.

Tilbury (2011) diz que o ensino superior é fundamental para o fortalecimento da educação para o desenvolvimento sustentável. Ao aliarmos o potencial das Universidades em criar materiais atraentes e de qualidade as possibilidades de aprendizagem alternativa como as desenvolvidas pelas atividades extensionistas, como a Semana do IME, estaremos dando aos nossos estudantes do ensino básico oportunidades para se eles possam ser agentes de transformação nas futuras gerações.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer ao IME pelo convite para a participação na XVII Semana do IME, à PR3 pelas bolsas dos alunos do projeto de extensão Oceano e Sociedade e aos antigos alunos do projeto (bolsistas e voluntários) que contribuíram para a criação do jogo e atualização das perguntas.

REFERÊNCIAS

- BORGES, R. K.; NEVES, C. A. A. **Explorando jogos educativos para o ensino dos objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS): Uma revisão sistemática.** Revista Gestão e Sustentabilidade Ambiental. v. 12, 1-22, 2023.
- KROHL, Diego Ricardo, *et al.* **Aprendizagem baseada em jogos: reflexões sobre o uso de jogos de tabuleiro durante período de isolamento social na educação matemática.** Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica, v. 11, p. 155-180, 2021.
- LOZZA, R.; RINALDI, G. P. **O uso dos jogos para a aprendizagem no ensino superior.** Caderno PAIC v. 18, p. 575-592, 2017.
- PLASS, J. L.; HOMER, B. D.; KINZER, C. K. **Foundations of Game-Based Learning.** Educational Psychologist, v. 50, n. 4, p. 258-283, 2015.
- TILBURY, D. **Education for sustainable development: an expert review of processes and learning.** Paris: Unesco. Available in Spanish, French and English. E-2010/ws/46.

STOCKHOLM RESILIENCE CENTRE, Stockholm University CC BY-ND 3.0. Disponível em: <https://www.stockholmresilience.org/publications.html?keyword=rockstom&year=>. Acessado em: 10 de mar. 2025

UNITED NATIONS, General Assembly. **Transforming our world:** the 2030 Agenda for Sustainable Development. A/ RES/70/1. 21 Oct. 2015. Disponível em: <https://sustainabledevelopment.un.org/post2015/transformingourworld>. Acessado em: 10 de mar. 2025.

LABORATÓRIO ITINERANTE DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA LÚDICA

**Gabriela Félix Brião^{a,1}, Giovanna Varandas da
Gama^{a,2}, Letícia Emerique da Silva Martins^{a,3}, Alan
Oliveira dos Santos^{a,4}, Melissa Ladeira do
Nascimento^{a,5}**

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: O Laboratório Itinerante de Educação Financeira Lúdica é um projeto Prodocência, cujo objetivo é levar a Matemática e a educação financeira de maneira lúdica e prática para o ambiente escolar. Durante o desenvolvimento das atividades laboratoriais pôde-se perceber a criação de espaços de reflexão sobre educação financeira, conscientizando os estudantes para que suas futuras decisões financeiras sejam mais seguras, informadas e voltadas para a concretização de seus objetivos pessoais e coletivos.

Palavras-chave: Educação financeira; ludicidade; Laboratório Itinerante; ensino; matemática.

INTRODUÇÃO

Quando falamos de Educação Financeira, um dos pontos centrais é compreender o papel da Matemática Financeira nesse contexto. Ela envolve o cálculo de juros simples, compostos, descontos, capitalização, amortização e empréstimos. Embora essas técnicas sejam fundamentais, sua aplicação depende de uma

¹ gabriela.felix@gmail.com.

² giovannagama2001@gmail.com.

³ leticiaemerique19@gmail.com.

⁴ alanoliveiracsjr22@gmail.com.

⁵ melissaladeiraa@gmail.com.

interpretação da realidade. Não basta saber fazer os cálculos; é necessário entender quando e como utilizá-los. A Educação Financeira atua nessa ampliação de visão, de maneira multidisciplinar.

De acordo com Silva e Minello (2009), a Matemática Financeira é o estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. Para isso, utiliza diversas ferramentas, como álgebra, métodos específicos, planilhas eletrônicas e calculadoras financeiras. Esse estudo é essencial no contexto atual, em que as decisões financeiras fazem parte da vida cotidiana.

Já a Educação Financeira tem como objetivo principal proporcionar às pessoas o que chamamos de literacia financeira, ou seja, educá-las para que possam lidar melhor com suas finanças. Segundo a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), a Educação Financeira visa garantir que as pessoas compreendam os conceitos e produtos financeiros, fazendo escolhas mais conscientes e analisando os riscos envolvidos. Isso promove um bem-estar financeiro pessoal e coletivo.

A Educação Financeira, portanto, se preocupa com o comportamento das pessoas diante de suas decisões financeiras, fornecendo o conhecimento necessário para que façam escolhas mais informadas. Como observa Martins (2004), muitas pessoas desenvolvem uma aversão aos termos financeiros, devido à falta de instrução sobre o tema nas escolas. Isso faz com que, na vida adulta, elas evitem lidar com questões financeiras por se sentirem inseguras. Assim, a Educação Financeira busca apresentar o mundo das finanças de maneira acessível, para que as pessoas possam fazer escolhas que melhorem sua qualidade de vida e de sua comunidade (Brasil, 2018).

O Laboratório Itinerante de Educação Financeira Lúdica tem como propósito criar ambientes de aprendizado, onde, por meio de atividades lúdicas, os participantes possam explorar e investigar temas financeiros. Esses ambientes, embora novos e desafiadores, são também fascinantes e cheios de descobertas. Como defende o professor Ilydio Sá (2012), é fundamental usar as

situações de aprendizagem para incentivar a reflexão dos alunos sobre suas experiências e os conhecimentos adquiridos.

No Laboratório Itinerante, optamos por abordar a Educação Financeira de forma lúdica, pois acreditamos que o brincar é uma ferramenta poderosa de aprendizado. Através do lúdico, desafiamos nossa percepção do mundo e buscamos tornar o aprendizado financeiro algo envolvente e transformador.

Cada atividade do laboratório possui três fases: o convite ao jogo, o jogo em si e os roteiros de ação. Cada etapa é fundamental para a experiência laboratorial. A saber, o convite à ludicidade deve ser feito ao levar ao olhar do participante uma atividade atraente em seu desenho e bem elaborada em suas ações. É nesta etapa que se explicam as regras da atividade escolhida. O que é lúdico para uns não necessariamente o é para outros. Por isso esta etapa é tão importante. Para a segunda etapa, é necessário um ambiente harmonioso, de concentração. Há jogos mais agitados, mas no geral, quando pensamos em Educação Financeira, há uma necessidade de reflexão sobre as ações propostas no jogo, afinal, ali podemos simular situações importante na vida de qualquer cidadão. Finalmente, temos a etapa de finalização, voltada exclusivamente para a sala de aula. É o momento de revisitar o jogo e seguir uma sequência didática que aprofunda os conteúdos escolares presentes no jogo.

Neste capítulo, faremos uma breve apresentação de cada jogo no tópico “discussão”, traremos o depoimento de um dos bolsistas envolvidos, visto que é um projeto voltado para a docência. Em seguida, considerações finais são apresentadas, para finalmente trazermos alguns agradecimentos

DISCUSSÃO

Nas escolas, de modo geral, durante nossas visitas, observamos uma lacuna na preparação dos alunos para a vida financeira adulta. O ensino de Matemática Financeira costuma se limitar a temas como “Juros Simples” e “Juros Compostos”, o que

é insuficiente para lidar com as complexidades do cotidiano financeiro. Nosso laboratório, por outro lado, leva para as salas de aula jogos que simulam situações reais que os estudantes enfrentarão quando adultos, utilizando a ludicidade como ferramenta de aprendizado. Com esses jogos, buscamos formar alunos capazes de pensar de maneira estratégica sobre sua vida financeira. Sabemos que as decisões tomadas no início da vida adulta são cruciais, e escolhas mal pensadas podem ter impactos duradouros em sua estabilidade financeira. Portanto, ao estimular o raciocínio financeiro desde cedo, pretendemos capacitar os jovens a tomarem decisões mais inteligentes e conscientes, contribuindo para um futuro econômico mais equilibrado.

Desta forma, levamos a caixa que contém os jogos para as escolas parceiras, apresentando todas as atividades, jogando em estações junto com os estudantes e conversando com os professores sobre os roteiros de ação. A partir dessas visitas, temos ideias para novos jogos ou melhoramos os já existentes. Com a finalização do projeto em dezembro de 2024, que foi postergada para junho de 2025, desejamos construir parcerias com prefeituras para que o laboratório continue atuante.

Monografias de final de curso de graduação estão em elaboração e toda a atividade de catalogação, armazenamento e construção de novos jogos a partir de materiais de baixo custo continuam operantes. Esperamos a publicação de dois livros sobre os jogos para o primeiro semestre de 2025. Até o momento, são 11 jogos elaborados:

1. Pensando no Futuro – Jogo de tabuleiro sobre seguros, criado pelo Laboratório.
2. Jogo da Corrente Financeira – Jogo interativo, em que os participantes formam uma corrente conforme as cartas se conectam.
3. Piquenique – Versão de um jogo online adaptado, onde os jogadores tomam decisões financeiras para organizar um piquenique.

4. Jogo da Estrela Financeira – Jogo de montagem de estrelas com ideias financeiras interconectadas.
5. Dominó da Porcentagem – Versão do dominó com peças relacionadas à porcentagem.
6. Jogo da Mesada – Jogo de tabuleiro que ensina a lidar com dinheiro.
7. Quiz Financeiro – Jogo de perguntas e respostas sobre Educação Financeira.
8. Jogo da Correção Monetária – Jogo que desafia os participantes a calcular correções monetárias sem usar a tecla de porcentagem.
9. Papo Gasto – Roda de conversa sobre Educação Financeira.
10. Finanças & Ação – Jogo de mímica envolvendo termos matemáticos.
11. Twister Financeiro – Jogo que ensina porcentagem com tapete e roleta.

Nosso trabalho segue em evolução. Até o término do projeto, planejamos concluir um jogo inspirado em músicas, visando encerrar as atividades com excelência. Todo o acervo do projeto encontra-se atualmente no CAP-UERJ.

DEPOIMENTO

A participação de bolsistas de diferentes áreas do conhecimento, como a Educação Física, enriquece o projeto ao ampliar a interdisciplinaridade e promover novas perspectivas pedagógicas. A criação e aplicação dos jogos, como o Jogo da Corrente e o Finanças & Ação, não apenas estimulam o raciocínio lógico, mas também incentivam a movimentação corporal e a interação social, aspectos fundamentais na formação do educador físico, por exemplo, como é o caso de um dos bolsistas do projeto.

Essa integração entre a educação financeira e a prática lúdica proporciona aos futuros professores de Educação Física uma compreensão mais ampla sobre como os jogos podem ser utilizados

como ferramentas educativas. A experiência contribui para o desenvolvimento de habilidades como planejamento, comunicação e mediação, além de reforçar a importância da aprendizagem ativa e do trabalho em equipe.

Segue o depoimento do bolsista:

Ao participar do Laboratório Itinerante, eu, licenciando em Educação Física tive a oportunidade de aprimorar minhas práticas pedagógicas, aplicando conceitos de gamificação e metodologias ativas. Essa vivência fortalece a minha formação docente, me capacitando a criar ambientes de aprendizagem mais dinâmicos e inclusivos, tanto no ensino da Educação Física quanto em outras disciplinas. O projeto não apenas facilita o aprendizado dos alunos sobre finanças, mas também prepara os futuros professores para atuarem como agentes transformadores na construção de uma cultura de educação financeira, beneficiando toda a comunidade escolar e contribuindo para a formação integral dos estudantes.

Ou seja, o projeto, além de conseguir atingir seus objetivos junto aos estudantes e professores das escolas públicas, também atinge um objetivo mais imediato, que é a formação inicial dos graduandos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperamos que a experiência proporcionada pelos jogos, que combina seriedade com um ambiente seguro, promova novas maneiras de pensar e gerenciar recursos financeiros entre os participantes. Nosso objetivo é, além disso, contribuir para a criação de uma cultura, em que a Educação Financeira vá além dos limites das escolas, expandindo a literacia financeira para toda a comunidade.

Desejamos que o tema da Educação Financeira se torne uma pauta constante nas aulas dos professores envolvidos, fortalecendo

o conhecimento e a consciência financeira entre os alunos e, por extensão, em suas famílias e círculos sociais.

AGRADECIMENTOS

Nós, alunos bolsistas e ex-bolsistas, agradecemos grandemente a nossa coordenadora Prof^a Dra. Gabriela Félix Brião por todos esses anos de aprendizado e orientação. Sem dúvidas, durante esses quase completos dois anos de projeto crescemos academicamente e grande parte aprendemos com a senhora. Nosso muito obrigado!

Agradecemos também ao Instituto de Matemática e Estatística da UERJ (IME-UERJ), por todas as oportunidades que o Instituto traz aos alunos. Além de conhecimento e ajuda. Muito obrigado!

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em:

<http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 10 de mar. 2025.

MARTINS, J. P. **Educação financeira ao alcance de todos: adquirindo conhecimentos financeiros em linguagem simples**. São Paulo: Editora Fundamento Educacional, 2004.

SÁ, I. P. **A educação matemática crítica e a matemática financeira na formação de professores**. 2012. 150 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo, 2012. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br//handle/123456789/3566>. Acesso em: 10 de mar. 2025.

SILVA, M. R.; MINELLO, R. D. **Matemática financeira e comercial**. Rio de Janeiro: Editora Ferreira, 2009.

LEITURA E ESCRITA DE EXPRESSÕES – MODELAGEM MATEMÁTICA

Tainnah Rabelo^{a,1}, Jaime Velasco^{b,2}, Sueli Cunha^{b,3}

^aSecretaria Municipal de Educação (SME), Rio de Janeiro, Brasil

^bUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: A escrita, em linguagem matemática, de uma situação-problema é de suma importância para se obter uma resolução adequada. Sendo assim, este texto relata os resultados de uma oficina, apresentada na XVII Semana do IME da UERJ, que visou analisar a forma com a qual os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio modelam uma situação-problema, identificando ainda possíveis inconsistências ao longo desse processo.

Palavras-chave: Linguagem matemática; modelagem matemática; pensamento algébrico; situações-problema

INTRODUÇÃO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um dos principais objetivos com relação à Matemática no Ensino Básico é que os alunos desenvolvam a capacidade de identificar como seus conceitos (e suas respectivas propriedades) podem ser utilizados para resolver problemas cotidianos. Por outro lado, para que isso ocorra de modo adequado e para que o pensamento matemático possa ser expresso de forma precisa por escrito, é importante compreender a linguagem matemática relacionada àquele conteúdo.

Um dos pontos de atenção é a dificuldade dos alunos em transcrever em linguagem matemática um problema enunciado em

¹ tainnah.mategramatica@ime.uerj.br

² jaimevelasco@ime.uerj.br

³ sueli.cunha@ime.uerj.br

língua portuguesa. Nesse caso, podem ocorrer duas situações distintas: ou o aluno resolve as operações sem escrever expressões matemáticas que modelam o problema proposto (pois ele compreendeu o problema o suficiente para identificar o que deve ser feito para obter sua solução), ou o aluno não resolve o problema (por não entender como escrevê-lo utilizando a linguagem matemática e, por consequência, não saber quais operações são necessárias).

O tópico de pensamento algébrico deve ser abordado desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (como previsto na BNCC), fase em que se devem desenvolver noções de regularidade e de generalização de padrões, por exemplo (Brasil, 2018, p. 272). No entanto, geralmente o foco nesse tema é dado quando as incógnitas e variáveis são apresentadas (usualmente no 7º Ano), o que muitas vezes causa confusões (visto que o assunto é abordado de forma abrupta, e não de forma crescente e progressiva ao longo dos anos anteriores). Além disso, um aluno acostumado a resolver problemas por meio de algoritmos, sem escrever a expressão aritmética que representa a situação descrita de forma completa, provavelmente terá dificuldades em escrever as expressões algébricas que modelem situações-problema onde o valor da incógnita não é obtido diretamente como uma sucessão de operações envolvendo os dados apresentados no enunciado.

Por exemplo, considere a seguinte situação-problema: “Em uma creche, cada criança recebe uma maçã após o almoço. Se a creche já possui 25 maçãs e foi ainda necessário comprar 17 maçãs para atender a todas as crianças, quantas crianças há na creche?” Nesse caso, objetivando escrever precisamente o que foi enunciado, a quantidade c de crianças presentes na creche resulta da adição do número de maçãs já existentes (a saber, 25) com o número de maçãs que precisaram ser compradas (isto é, 17). Em outros termos, uma expressão matemática que modela esse problema é: $c = 25 + 17$. Nota-se que, nesse caso, a incógnita c está expressa diretamente em termos das informações do problema.

Por outro lado, considere outra situação-problema: “Em uma creche, cada criança recebe uma maçã após o almoço. Se a creche já possui 25 maçãs, quantas maçãs precisam ser compradas, sabendo a creche possui 42 crianças?” Nesse caso, a quantidade m de maçãs que devem ser compradas é o valor que, ao ser adicionado à quantidade de maçãs que já existiam (a saber, 25), resulta na quantidade de crianças que há na creche (isto é, 42). Em outros termos, a incógnita m deve verificar a seguinte expressão: $25 + m = 42$. Nota-se que, nesse caso, a incógnita m não está expressa diretamente em termos das informações do problema, e seu valor pode não ser obtido de forma adequada por alunos que não possuem o pensamento algébrico bem estruturado.

Tendo em vista portanto a importância da escrita em linguagem matemática de um problema formulado em língua portuguesa, este texto se destina a relatar uma atividade prática em formato de oficina sobre esse tema, realizada na XVII Semana do IME/UERJ em outubro de 2024.

A OFICINA

A partir da experiência em sala de aula do primeiro autor deste texto, em turmas do ciclo básico, foram elaborados 10 exercícios⁴ que podem ser propostos para alunos a partir do 7º Ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de destacar a importância da escrita em linguagem matemática de uma situação-problema, a fim de resolvê-lo. A resolução das operações aritméticas e algébricas envolvidas não são o foco desta oficina, mas sim a maneira como os alunos representam os problemas. Desse modo, foram apresentados exercícios utilizando as operações básicas e as noções iniciais de expressões algébricas. O público-alvo dessa atividade eram alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, com o objetivo de mostrar a importância da

⁴ Os exercícios elaborados foram baseados em materiais didáticos de 6º e 7º Anos do Ensino Fundamental; por exemplo, Bianchini (2022) e Souza e Pataro (2015).

linguagem matemática e como ela permite uma melhor análise de um dado problema e de sua solução. Esperava-se que um aluno regular dessas etapas do Ensino Básico fosse capaz tanto de modelar quanto de resolver essas atividades.

Primeiro, os professores mediadores apresentaram dois problemas (um envolvendo a operação de adição e outro envolvendo a multiplicação), para verificar como os estudantes os modelariam *sem qualquer interferência dos mediadores*. Em outros termos, o objetivo, nesta primeira etapa, era verificar se os alunos utilizariam ou não as expressões em linguagem matemática antes de realizar os cálculos necessários à resolução. Foi então pedido aos alunos que escrevessem uma expressão matemática que representasse precisamente cada um dos problemas, sem que se preocupassem com a resolução. Os alunos tiveram 5 minutos para resolver os seguintes problemas escolhidos para esta primeira etapa:

- 1) Luiza comprou um apartamento financiado. Ela já pagou 103 parcelas, mas ainda resta pagar 257. Em quantas parcelas ela fez o financiamento?
- 2) No auditório de uma escola há 13 fileiras, cada uma com 25 cadeiras. Quantas cadeiras há nesse auditório?

Os mediadores então ouviram as respostas dos alunos para cada uma das duas questões apresentadas e fizeram as correções que julgaram necessárias, explicando então a proposta da oficina e sugerindo algumas possíveis respostas para esses problemas. A seguir, são apresentados exemplos de respostas para as questões.

- 1) $t = 103 + 257$, onde t indica o número total de parcelas em que Luiza fez o financiamento.
- 2) $a = 13 \times 25$, onde a indica o número de carteiras que há no auditório.

Em seguida, foram apresentados mais oito problemas (em ordem crescente de dificuldade), um por vez, solicitando novamente que os participantes escrevessem expressões matemáticas que os representassem de forma adequada, e que não

se preocupassem com a resolução. Foi dado o tempo de 3 minutos para a resolução de cada questão. Os problemas propostos para esta etapa foram:

- 3) O Maracanã tem capacidade para 78 838 espectadores. Para o jogo de Flamengo e Bahia pela Copa do Brasil deste ano, foram vendidos 60 839 ingressos. Quantos ingressos faltaram ser vendidos para completar a lotação do estádio?
- 4) Se Júlio tivesse mais R\$ 3,00 seria capaz de comprar um sanduíche por R\$ 9,00, um suco por R\$ 4,00 e um cookie por R\$ 2,00. Quantos reais Júlio tem?
- 5) Quantas embalagens de uma dúzia de ovos são necessárias para embalar 1 048 ovos?
- 6) Camila deseja comprar uma geladeira que custa, à vista, R\$ 4 999,00. No pagamento a prazo, o preço dela passa a ser de R\$ 5 300,00, sendo R\$ 500,00 de entrada e mais 12 prestações mensais iguais. Sabendo que Camila vai comprar a prazo, qual é o valor de cada prestação?
- 7) Carolina estava juntando dinheiro para comprar uma moto de R\$ 15 000,00. Ela recebeu de sua avó R\$ 2 000,00 e durante dois anos juntou R\$ 500,00 por mês. Quanto ela conseguiu juntar até agora?
- 8) Para um almoço em família, Felipe resolveu fazer um *brownie* de chocolate para sobremesa. A receita utiliza 6 colheres de sopa de farinha de trigo para 5 porções, mas Felipe precisa fazer 20 porções. Quantas colheres de sopa de farinha de trigo ele utilizará?
- 9) Quando Carolina nasceu, sua irmã tinha 5 anos. Sabendo que hoje a soma de suas idades é igual a 47, qual é a idade de Carolina hoje?
- 10) O piso salarial do professor é de R\$ 25,45 por hora aula em 2024. Carolina trabalha em duas escolas. Na primeira, ela trabalha 15 horas semanais e na segunda 20 horas semanais. Se ela recebe o piso nas duas escolas, quanto ela receberá por semana no total?

Após cada uma dessas questões, o grupo discutiu cada resposta, identificando o significado de cada resultado e as outras possíveis formas de representar aqueles mesmos problemas (por meio de equações equivalentes). A seguir, são listados exemplos de respostas para cada questão:

- 3) $78\ 838 = 60\ 839 + f$, onde f indica o número de ingressos que faltaram ser vendidos.
- 4) $j + 3,00 = 9,00 + 4,00 + 2,00$, onde j indica quantos reais Júlio tem.
- 5) $e = 1\ 048 \div 12$, onde e indica o número de embalagens de uma dúzia de ovos.
- 6) $5\ 300,00 = 500,00 + 12 \times v$, onde v indica o valor de cada prestação.
- 7) $j = 2000,00 + (12 \times 2) \times 500,00$, onde j indica o quanto Carolina conseguiu juntar em dois anos.
- 8) $\frac{6}{5} = \frac{f}{20}$, onde f indica o número colheres de sopa de farinha de trigo necessários para 20 porções.
- 9) $i = c + 5$, $c + i = 47$, onde c e i indicam as idades atuais de Carolina e de sua irmã, respectivamente.
- 10) $s = (15 \times 25,45) + (10 \times 25,45)$, onde s indica quanto Carolina recebe por semana.

É importante ressaltar que as respostas aqui apresentadas são apenas exemplos de resoluções para as questões, e que, em alguns casos, podem existir várias alternativas. Por exemplo, na Questão 3, pode-se calcular o número de ingressos que faltaram ser vendidos por meio da diferença entre a capacidade do estádio e a quantidade de ingressos vendidos; em outros termos: $i = 78\ 838 - 60\ 839$.

Outro ponto a ser destacado é que, em todas as respostas, foram utilizados nomes mnemônicos para as incógnitas cujos valores se desejam determinar, isto é, nomes que lembrem a que (ou a quem) a incógnita está relacionada. Por exemplo, nas

Questões 3 e 4, foram utilizados “*i*” para ingressos e “*j*” para Júlio, respectivamente.

Nas Questões 6 e 7 são apresentadas mais informações do que as necessárias para se resolver os problemas. Além de avaliar a atenção do aluno quanto à pergunta, essas informações têm o intuito de gerar outras discussões sobre o resultado, como, por exemplo, “Qual a diferença entre o preço a prazo e a vista” (na Questão 6) e “Quanto falta para Carolina conseguir o valor total da moto?” (na Questão 7).

A questão 9 é de importante discussão no quesito de modelagem. Questões desse tipo costumam ser propostas em materiais de 7º ano com o objetivo de escrever uma única equação de 1º grau que permite resolver o problema. No entanto, a modelagem que transmite aquilo que está descrito gera um sistema de equações de 1º grau, como visto no exemplo de resposta apresentado. Isso porque cada frase traz uma informação completa que é transcrita em linguagem matemática como uma equação. A frase “Quando Carolina nasceu, sua irmã tinha 5 anos” pode ser escrita como $i = c + 5$ (ou $c = i - 5$), indicando a relação entre as idades das duas irmãs, onde c e i representam as idades de Carolina e de sua irmã, respectivamente. Já a frase “Sabendo que hoje a soma de suas idades é igual a 47” pode ser representada pela expressão $c + i = 47$, como visto. Por sua vez, a equação $c + (c + 5) = 47$ é a primeira etapa do processo de resolução do problema, e não sua modelagem propriamente dita. No entanto, é esta a resposta que muitos livros indicam como a representação desse tipo de problema.

Por fim, após cada uma dessas questões, foi solicitado que os participantes as generalizassem, supondo que as constantes conhecidas (dadas nos enunciados) fossem substituídas por constantes desconhecidas. Por exemplo, na Questão 1, supondo que Luiza já quitou q parcelas e que ainda faltam quitar f parcelas, o mesmo problema pode ser descrito por: $t = q + f$. A seguir, são listados exemplos de generalizações para cada uma das 10 questões:

- 1) $t = q + f$, onde t , q e f indicam o número total de parcelas, o de parcelas quitadas e o de parcelas faltantes, respectivamente.
- 2) $a = f \times c$, onde a , f e c indicam o número de carteiras que há no auditório, o de fileiras e o de carteiras por fileira, respectivamente.
- 3) $c = v + f$, onde c , v e f indicam a capacidade do estádio, o número de ingressos vendidos e o dos que faltaram ser vendidos.
- 4) $j + m = a + u + c$, onde j , m , a , u e c indicam quantos reais Júlio tem, quanto ele teria a mais, e os valores do sanduíche, do suco e do *cookie*, respectivamente.
- 5) $e = o \div 12$, onde e e o indicam o número de embalagens de uma dúzia de ovos e o total de ovos, respectivamente.
- 6) $g = e + n \times v$, onde g , e , n e v indicam o valor a prazo da geladeira, a entrada, o número de prestações e o valor de cada prestação, respectivamente.
- 7) $j = r + (12 \times a) \times m$, onde j , r , a e m indicam o quanto Carolina conseguiu juntar, o quanto ela recebeu da avó, quantos anos ela passou juntando um valor mensal, e o quanto ela juntou por mês, respectivamente.
- 8) $\frac{c}{p} = \frac{f}{n}$, onde c indica o número de colheres de sopa de farinha de trigo necessários para p porções, e f indica o número colheres de sopa de farinha de trigo necessários para n porções.
- 9) $i = c + n$, $c + i = s$, onde c representa a idade de Carolina; i , a de sua irmã; n , a idade da irmã de Carolina quando ela nasceu; e s , a soma das idades atuais das duas irmãs.
- 10) $t = (p \times h) + (s \times h)$, onde t indica quanto Carolina recebe por semana no total; p e s representam a carga horária trabalhada por ela na primeira e na segunda escolas, respectivamente; e h , o valor da hora aula.

OS RESULTADOS

A oficina foi desenvolvida em dois momentos, com grupos diferentes, em um tempo total de aproximadamente 40 minutos com cada um deles. Embora essa atividade tenha sido estruturada para alunos do Ensino Fundamental (Anos Finais) e do Ensino Médio, apenas alunos desta última etapa do Ensino Básico participaram da dinâmica. Além disso, como essa oficina foi apresentada durante um evento aberto ao público (a XVII Semana do IME/UERJ, como dito anteriormente), ela contou ainda com a participação de licenciandos em Matemática e de um professor universitário (sendo que os licenciandos participaram de ambas as sessões da oficina).

Como previsto, os alunos do Ensino Básico resolveram os dois problemas iniciais (aqueles da primeira etapa) sem escrever a expressão matemática, e utilizaram diretamente os algoritmos da adição e da multiplicação para determinar os resultados. Além disso, quando foi perguntado pelos mediadores o que eles responderam nessas questões, a maioria verbalizou diretamente o valor da resposta do problema, e não a expressão matemática que o modela (como pedido inicialmente). Por exemplo, na Questão 1, muitos responderam diretamente “360 parcelas”, sendo que foi deixado claro, no início, que eles não se preocupassem com os resultados finais, nem mesmo com as resoluções. Os mediadores então ressaltaram o objetivo das questões, apresentando exemplos de respostas adequadas.

Após a primeira etapa e as explicações dos mediadores, os participantes se dispuseram a escrever as expressões matemáticas. Alguns apresentaram dificuldades (e participaram pouco da dinâmica) enquanto outros se mostraram mais entusiasmados (respondendo a todos os problemas propostos). Algumas dificuldades por eles encontradas foram a identificação de qual operação matemática utilizar e a própria escrita das expressões matemáticas que modelam os problemas (visto que, como dito anteriormente, os alunos estão acostumados a resolver as questões

armando uma conta, e resolvendo, via algoritmos, mecanicamente). Vários deles conversavam com seus colegas ao lado, buscando uma melhor forma de escrever o que foi pedido. De modo geral, eles compreenderam bem a proposta e se empenharam nos exercícios, mesmo chegando rapidamente às soluções.

Outro ponto de dificuldade foi a generalização dos problemas, visto que os estudantes do Ensino Básico não estão tão habituados a escrever expressões algébricas nesses moldes. No entanto, após alguns erros, a maior parte deles compreendeu a ideia e escreveu corretamente as expressões generalizadas.

É interessante notar que, após entenderem o objetivo da oficina, muitos utilizaram os tradicionais x e y , por exemplo, para nomear as incógnitas nas primeiras questões. Os mediadores então disseram que, embora estivesse correto, que eles buscassem utilizar nomes mais condizentes (mnemônicos, como dito anteriormente) com os objetos que estavam sendo abordados em cada questão, com o intuito de identificá-los mais facilmente nas generalizações. A partir de então, os participantes seguiram à orientação e evitaram utilizar x e y .

Devido ao tempo reduzido para a realização da oficina, nem todas as atividades foram apresentadas aos dois grupos. Dentre os participantes, tanto os licenciandos quanto o professor universitário tiveram a oportunidade de analisar todos os exercícios e reconheceram a importância dessa abordagem na formação básica. Por outro lado, as questões trabalhadas trouxeram discussões interessantes (pois os participantes demonstraram não estar acostumados com esse tipo de abordagem) e a maior parte deles se mostrou bastante receptiva às ideias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudos sobre a linguagem matemática, em especial, sua gramática (Cunha e Velasco, 2019) se mostram importantes na formação de novos professores, para que os conceitos relacionados à introdução ao pensamento algébrico sejam abordados de forma

adequada, minimizando dificuldades ao longo do Ensino Básico. A escrita em linguagem matemática de uma situação problema (enunciada em língua portuguesa) pode auxiliar em uma melhor compreensão do próprio problema, e conseqüentemente, na busca de melhores estratégias para sua resolução.

Exercícios como os aqui apresentados podem ser desenvolvidos a partir do 6º ano (e até mesmo em anos anteriores) para estimular o pensamento algébrico, estabelecendo uma premissa para o início da Álgebra.

AGRADECIMENTOS

Os mediadores desta oficina agradecem à Comissão Organizadora da XVII Semana do IME/UERJ tanto pela oportunidade em apresentar as ideias aqui descritas a alunos do Ensino Básico quanto para escrever este relato.

REFERÊNCIAS

- BIANCHINI, E. **Matemática. 6º Ano**. São Paulo: Editora Moderna, 2022.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 25 jan. 2025.
- CUNHA, S.; VELASCO, J. **Introdução à Gramática da Linguagem Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2019.
- SOUZA, J. R. de; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática. 6º Ano**. São Paulo: FTD. 2015.

MODELAGEM DE UMA DINÂMICA DE METAPOPULAÇÕES DENSIDADE-DEPENDENTE

Samuel H. M. Rodrigues^{a,1}, Zochil G. Arenas^{a,2},
Patrícia N. da Silva^{a,3}

^a*Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil*

Resumo: Este trabalho utiliza o conceito de difusão para descrever a dinâmica de uma metapopulação, caracterizada por indivíduos que vivem em fragmentos isolados e podem interagir por migração. O modelo de difusão-reação é empregado para representar o crescimento populacional e o espalhamento dos indivíduos da metapopulação, considerando uma equação diferencial parcial com dependência linear ou quadrática na densidade. Para o caso mais simples encontra-se a solução analítica, enquanto usa-se uma abordagem numérica para casos mais gerais. As simulações numéricas são realizadas usando o Método de Diferenças Finitas, realizando a programação em Python. Resultados gráficos são empregados para analisar a influência dos parâmetros do modelo, ilustrando algumas características da dinâmica populacional que o modelo oferece.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais; dinâmica de metapopulações; modelagem matemática; simulação numérica.

INTRODUÇÃO

Do ponto de vista macroscópico, o fenômeno de difusão é um processo de transporte de matéria, fluido (gás ou líquido) ou energia. Esse transporte é caracterizado pela passagem de matéria de um local de maior concentração para outro de menor

¹ shrodrigues_mat@outlook.com.

² zochil@ime.uerj.br.

³ nunes@ime.uerj.br.

concentração. Neste trabalho, utiliza-se o conceito de difusão para descrever uma dinâmica populacional. Será estudado um modelo descrito por uma equação diferencial parcial de difusão-reação, no qual supõe-se que, além da dispersão de indivíduos pelo ambiente, há variação populacional e também ocorre uma interação com ambientes externos. O estudo da dinâmica populacional é de vital importância em diversas áreas, incluindo setores da Saúde, Biologia e Ecologia.

Na Ecologia, faz-se uma clara distinção entre os conceitos de população e comunidade. Enquanto uma população pode ser definida como um conjunto de seres da mesma espécie, uma comunidade é considerada como sendo um conjunto de populações. Nesse contexto, a Teoria de Metapopulações defende a ideia de que comunidades ou “população de populações” [1], vivendo em pequenos locais isolados, conhecidos como refúgios [2], ou em áreas fragmentadas [3], interagem entre si através da migração [4, 5]. Além disso, outros fatores que influenciam a dinâmica populacional desses indivíduos são a reprodução, a competição intraespecífica (dentro da mesma espécie) e a predação.

Neste trabalho vamos assumir que os refúgios podem sofrer alterações ao longo do tempo. O caso de ilhas ou ilhotes, nas quais as águas do mar ocupam maior ou menor faixa de terra dependendo do estado da maré, é um exemplo desta situação. Outro exemplo tem a ver com atuais consequências das mudanças climáticas, como o derretimento de geleiras, o qual faz aparecer acidentes geográficos que transformam o habitat e a reprodução de muitas espécies. Considerando que a movimentação da população depende do espaço disponível para tal, apresenta-se o seguinte modelo de difusão-reação, sujeito às condições de contorno de Dirichlet e à condição inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, K) \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) \right) + r(t) \rho^\mu(x, t), & \mu = 1, 2 \\ \rho(0, t) = \rho(L, t) = 0, & t \in [0, +\infty) \\ \rho(x, 0) = \frac{N_0}{L}, & x \in (0, L) \end{cases} \quad (1)$$

com $(x, t) \in (0, L) \times [0, +\infty)$ e $L > 0$. Os termos considerados na equação são a densidade populacional $\rho(x, t)$, que relaciona o número de indivíduos no espaço x e tempo t ; e o coeficiente de difusão $D(x, K)$, que caracteriza o espalhamento de indivíduos pelo meio e que, na sua forma mais geral, é variável e depende da capacidade suporte K . A capacidade suporte determina a quantidade de indivíduos que o meio comporta. N_0 é o tamanho inicial da população e $r(t)$ é a taxa de crescimento/decrescimento populacional.

No modelo (1), as condições de contorno indicam que a densidade populacional é nula nos extremos do fragmento de habitat considerado, um intervalo de comprimento L . Esta condição é chamada de fronteira absorvente (*absorbing boundary*) [2, 6], que supõe que os indivíduos que deixam o ambiente morrem imediatamente ou perdem de forma permanente a capacidade de retornar. Por sua vez, a condição inicial representa que os indivíduos estão uniformemente distribuídos no fragmento de habitat no instante inicial.

Serão consideradas duas possibilidades para a difusividade: constante e variável. No caso da difusão variável, será representada por uma função na forma

$$D(x, K) = D_0 e^{-Kx^2}, \quad (2)$$

na qual D_0 é uma constante positiva. Com esta expressão, busca-se representar uma situação populacional que privilegie a concentração no interior, reduzindo a densidade conforme os indivíduos se aproximem dos extremos do fragmento. Esta escolha é baseada nas alterações sofridas pelos ambientes no decorrer do tempo.

Também serão consideradas duas formas da função de reação, responsáveis pelo acréscimo ou retirada de massa do sistema: a fonte malthusiana, obtida quando $\mu = 1$ e a fonte facilitada, no caso em que $\mu = 2$. Estas diferentes fontes influenciam na capacidade do modelo de descrever o crescimento

da população dentro do fragmento e, também, na intensidade desse crescimento.

Considerar a fonte de crescimento malthusiana equivale a supor que a metapopulação cresce de forma proporcional à densidade, sendo uma das formas mais simples de incluir crescimento ou decrescimento linear em uma equação. Por outro lado, tomar a função de crescimento facilitada equivale a supor que há algum tipo de cooperação na reprodução dos indivíduos, de modo que dois indivíduos possam gerar um terceiro [7]. Nesse caso, o modelo é dito densidade-dependente, pois o fator ou taxa de crescimento *per capita* é dado por $r(t)\rho(x,t)$, multiplicado pela própria densidade da população, o que torna a equação (1) não linear.

O objetivo deste trabalho é modelar a dinâmica de uma metapopulação descrita pelo modelo (1) e verificar sob quais circunstâncias pode haver extinção local (apenas da subpopulação interna do refúgio) ou sobrevivência dos indivíduos em cada fragmento. Os resultados mostram que a presença de ambas as fontes provoca um crescimento exponencial da densidade da população, quando $r > 0$, sendo a fonte facilitada a mais intensa entre as duas. Estes resultados foram apresentados no XLIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2024) [8] e no evento Semana do IME/UERJ 2024, na sessão de painéis dos alunos da pós-graduação.

METODOLOGIA

Nesta seção, são apresentados os casos particulares considerados para a análise do modelo, em relação à forma do coeficiente de difusão, da taxa de crescimento e da capacidade suporte, e discute-se a metodologia empregada em cada situação. Serão analisados três casos com diferentes graus de complexidade: difusão constante e difusão variável com crescimento malthusiano, ou seja, considerando $\mu = 1$ na equação diferencial do modelo (1), e difusão variável com crescimento facilitado, para $\mu = 2$.

Ao longo do trabalho, considera-se uma taxa de crescimento variável, na forma da função p -periódica,

$$r(t) = r_1 + r_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) \quad (3)$$

onde r_1 e r_2 são constantes reais positivas. Nos casos de difusão variável, a capacidade suporte também tem a forma de uma função p -periódica,

$$K(t) = k_1 + k_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{p}\right) \quad (4)$$

com k_1 e k_2 constantes reais e positivas, porém com a restrição $k_1 > k_2$. Como será mostrado, ambas as funções (3) e (4) possibilitam a representação de diferentes cenários de oscilações periódicas no ambiente e no crescimento da população. Estas funções foram estudadas em [9] para uma dinâmica populacional descrita pela equação logística.

Inicialmente, considerou-se a equação (1) com difusão constante, $D = D_0$, para o caso em que $\mu = 1$. Esta equação foi resolvida pelo método clássico de separação de variáveis, encontrando a solução analítica na forma de uma série trigonométrica. Os detalhes serão apresentados na próxima seção.

O caso da difusão variável, traz um problema matemático complexo, com uma liberdade muito grande na escolha de parâmetros e condições de integração. Nessas condições, foi necessário procurar a solução de forma numérica. Foi empregado um método básico de linearização explícita [10, 11], também conhecido como esquema de tempo avançado, centrado no espaço (*forward-time, central-space scheme*). Tendo em vista a quantidade de parâmetros do modelo (1), o uso de um método numérico condicionalmente estável limitou a análise da interferência desses parâmetros nas simulações.

Foi utilizada a linguagem de programação Python como ferramenta de apoio computacional para fazer simulações gráficas

da equação aqui trabalhada. Os códigos desenvolvidos são abertos e podem ser acessados na plataforma GitHub⁴.

MODELOS ESTUDADOS

Nesta seção, são discutidos os modelos estudados, apresentando-se alguns resultados parciais e finais. É importante observar que se trata de uma pesquisa em andamento. A seção foi dividida em três subseções, destinando cada uma a um caso específico na escolha de parâmetros e condições para a análise do modelo (1).

Difusão constante com crescimento malthusiano

O primeiro caso a ser analisado corresponde ao modelo (1) com difusão constante considerando $\mu = 1$. A taxa de crescimento $r(t)$ é dada pela expressão (3). Nessas condições, como foi indicado acima, procurou-se a solução pelo método clássico de separação de variáveis. Com isso, busca-se a função $\rho(x, t)$ na forma de um produto de funções que dependem apenas de x e t , respectivamente, denominadas como parte espacial e parte temporal

$$\rho(x, t) = X(x)T(t). \quad (5)$$

Omitindo-se os argumentos, a equação (1) fica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + r\rho \quad (6)$$

a partir da qual, considerando a densidade dada pela expressão (5) e aplicando as derivadas em relação a t e a x , chega-se à igualdade

$$\frac{T'}{T} - r = D_0 \frac{X''}{X} = -\lambda \quad (7)$$

com $\lambda > 0$, chamada de constante de separação. Após isso, resolve-se uma EDO de primeira ordem, tomando-se o lado esquerdo da

⁴ <https://github.com/MukRodrigues/Simulacao-difusao-reacao.git>.

igualdade (7), e uma EDO de segunda ordem ao considerar a igualdade do meio, e igualando cada uma dessas expressões a $-\lambda$.

A solução da parte espacial tem a forma

$$X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D_0}} x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D_0}} x\right) \quad (8)$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas pelas condições de contorno

$$\begin{cases} \rho(0, t) = X(0) = 0 \\ \rho(L, t) = X(L) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Com isso, encontram-se

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{D_0}} L\right) = 0. \end{cases}$$

e

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi\sqrt{D_0}}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Logo, a solução da parte espacial $X(x)$ é

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

A solução da parte temporal $T(t)$ é encontrada resolvendo a EDO de coeficiente variável

$$T'(t) + (\lambda - r(t))T(t) = 0,$$

sujeita à condição inicial $T(0) = C$, com C constante. Com isso,

$$T_n(t) = C e^{-(\lambda_n t - R(t))} \quad (12)$$

na qual

$$R(t) = r_1 t + \frac{r_2 p}{2\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right)\right]. \quad (13)$$

Juntando a parte espacial (11) e a parte temporal (12) em (5), pelo Princípio da Superposição, obtém-se que

$$\rho(x, t) = \frac{N_0}{2L} \sum_{n=1} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{D_0\left[R(t) - t\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]}, \quad (14)$$

onde C_n é o coeficiente da série de Fourier,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) dy = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]. \quad (15)$$

Esta solução permite representar dois possíveis cenários, um de aumento de densidade e persistência da população de forma indefinida no caso em que a parte temporal de $\rho(x, t)$ seja uma função exponencial positiva, e outro de extinção, conforme o tempo avança, caso essa função exponencial seja negativa. Analisando a contribuição da parte temporal na solução (14), nota-se que o aumento e a diminuição da densidade dependem da potência

$$R(t) - t\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \quad (16)$$

Pode-se verificar que $R(t)$ é uma função limitada, pois

$$r_1 t \leq R(t) \leq r_1 t + \frac{r_2 p}{\pi}. \quad (17)$$

Por simplicidade, será feita uma análise considerando a contribuição mínima de $R(t)$ na densidade, ou seja, $R(t) = r_1 t$. Assim, no cenário de aumento da densidade, para algum índice $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$R(t) > t\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

ou seja,

$$r_1 > \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \quad (18)$$

De outro modo, no cenário de diminuição da densidade,

$$R(t) < t\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

isso é,

$$r_1 < \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (19)$$

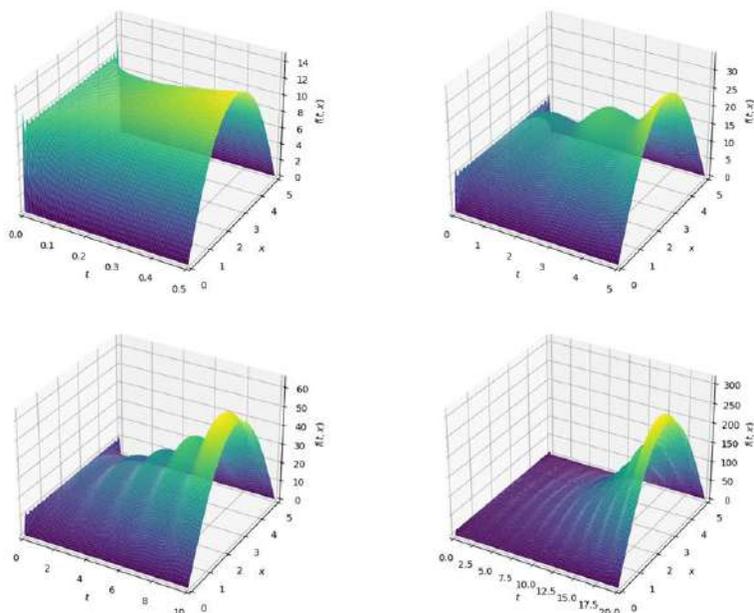
para todo $n \in \mathbb{N}$.

No primeiro destes cenários ocorre um fenômeno de aglomeração, ou seja, há acréscimo de massa no sistema e aumento da densidade por unidade de espaço e tempo. Em outras palavras, a velocidade de crescimento da população “vence” a difusão. Isto é ilustrado na Figura 1, para alguns valores do tempo entre $t = 0$ a $t = 20$. Na figura, pode-se observar o aumento da densidade em diferentes regiões do espaço, de forma exponencial, através da presença de regiões amarelas nos quatro sub-gráficos. A cor amarela indica a maior densidade e pode ser observada ao analisar a Figura 1 de cima para baixo e da esquerda para a direita. Observa-se a aglomeração, ou seja, um maior aumento na quantidade de indivíduos que dispersos no espaço, resultando em pontos mais amarelos do que outros. Na simulação, foram considerados os seguintes valores dos parâmetros: $L = 5$, $T = 20$, $\rho_0 = 10$, $D_0 = 1.5$, $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.2$, $p = 2$ e $n = 1, 2, \dots, 50$. Os subgráficos correspondem a diferentes escalas de tempo, para ilustrar melhor o comportamento da solução dada pela equação (14). É importante notar que foram simuladas algumas trajetórias para instantes de tempo específicos e a ideia de continuidade é dada pelo preenchimento automático em cores. A imagem foi gerada utilizando a biblioteca Sympy do Python.

No segundo cenário, com apenas uma leve variação na taxa de crescimento, ocorre um fenômeno de homogeneização da densidade devido à prevalência da difusão sobre a velocidade de crescimento. Consequentemente, a densidade é homogeneizada de forma mais rápida do que a subpopulação cresce em número. Para esta simulação foram usados os mesmos valores dos parâmetros considerados na situação anterior, mudando apenas o valor de r_1 . Os valores usados foram: $L = 5$, $T = 20$, $\rho_0 = 10$, $D_0 = 1.5$, $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.2$, $p = 2$ e $n = 1, 2, \dots, 50$. Na Figura 2 ilustra-se este fenômeno no decorrer do tempo, para diversos valores entre $t = 0$ e $t = 20$. Nesta figura, pode-se observar o decréscimo da densidade ao longo do tempo. As subfiguras ilustram diferentes escalas de tempo para melhor visualizar o decréscimo. Pode-se notar que a dispersão ocorre de forma mais acentuada do que o

aumento da densidade, embora o fator de crescimento ainda atue. O resultado é a homogeneização da densidade, que vai tendendo a zero.

Figura 1. Representação da solução para vários instantes de tempo quando ocorre aglomeração de densidade devido ao crescimento malthusiano.



Fonte: Os Autores, 2025.

Difusão variável com crescimento malthusiano

O segundo caso analisado corresponde ao modelo (1) com difusão variável, novamente considerando $\mu = 1$. Diferentemente da versão do modelo tratada na subseção anterior, agora a difusão é uma função, dada pela equação (2), que depende da capacidade suporte definida na equação (4).

Como indicado na seção anterior, este caso foi abordado através do cálculo numérico. Tratando-se de uma equação diferencial parcial, foi considerado um método de diferenças finitas. Para isso, foi

realizada uma discretização da equação no modelo, substituindo as derivadas por fórmulas discretas de diferenças. Foi utilizado um método explícito, com a derivada avançada no tempo e de segunda ordem centrada no espaço. Fazendo estas considerações, a discretização do modelo (1) é dada por

$$\rho_i^{j+1} = (\gamma D_x^j + \lambda D_i^j) \rho_{i+1}^j + (\gamma D_x^j - 2\lambda D_i^j) \rho_i^j + (-\gamma D_x^j + \lambda D_i^j) \rho_{i-1}^j + kr^j \rho_i^j \quad (20)$$

com i tomando valores de 0 a N , j , de 0 a M , e as constantes γ e λ são tais que

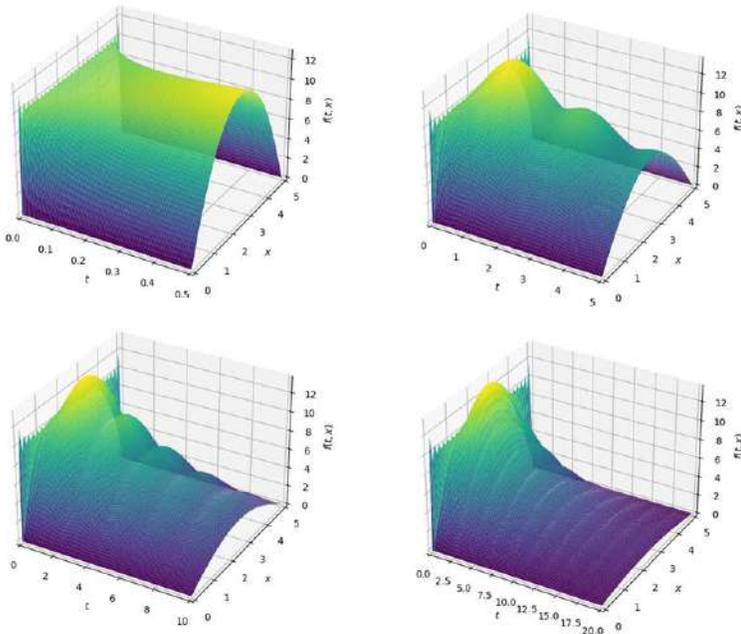
$$\gamma = \frac{k}{2h}, \quad \lambda = \frac{k}{h^2}. \quad (21)$$

Nas igualdades (21), foram tomados os passos das discretizações como $k = \Delta t$ e $h = \Delta x$. Esse método consiste em representar as derivadas espacial e temporal como diferenças finitas calculadas em função de pontos $\rho(x_i, t_j) = \rho_i^j$ previamente conhecidos. Os pontos a serem calculados são aqueles que são avançados no tempo, ou seja, em t_{j+1} , em função daqueles pontos conhecidos em t_j . Com isso, pôde-se verificar a interferência de cada parâmetro na simulação do modelo. Primeiramente, para a fonte malthusiana, pôde-se verificar que:

- D_0 contribui para a velocidade de difusão, quanto maior esse valor, mais rápido a densidade decresce;
- k_1 reduz a velocidade de difusão, o que faz com que a densidade populacional decresça mais lentamente, possibilitando a persistência da população;
- k_2 provoca aumento e diminuição da capacidade suporte, a depender do período de oscilação da função (4). Como consequência, quanto maior seu valor, maior a possibilidade de persistência da população. Observa-se também uma contribuição para o aumento de densidade ao longo do espaço;
- r_1 contribui para o crescimento populacional; à medida que a taxa de crescimento supera a velocidade de difusão, quanto maior seu valor, maior o aumento de densidade populacional;

- r_2 provoca oscilação na taxa de crescimento, de modo que, tanto no cenário de crescimento populacional quanto de decréscimo, observa-se o efeito de “regressão” durante o processo. Quanto maior, maior será a regressão da densidade de forma periódica, à medida que essa cresce ou decresce com o passar do tempo.

Figura 2. Cenário de homogeneização. Representação da solução para vários instantes de tempo quando ocorre homogeneização de densidade.



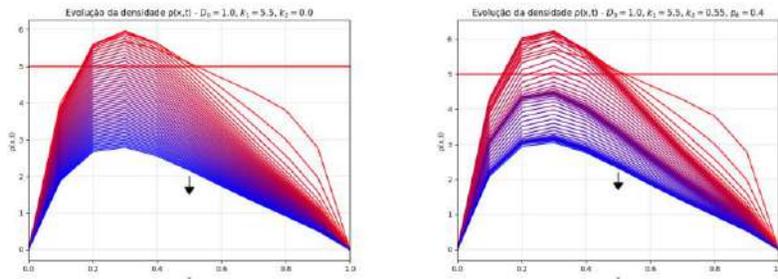
Fonte: Os Autores, 2025.

A Figura 3 apresenta simulações que exemplificam a dinâmica do modelo quando se considera uma capacidade suporte variável no modelo de metapopulação em desequilíbrio com fonte malthusiana. As duas imagens apresentam o mesmo valor de $k_1 = 5.5$, porém com diferentes valores de k_2 , permitindo a comparação

entre a capacidade suporte constante, para $k_2 = 0$ (Figura 3.a), e variável, com $k_2 = 0.55$ (Figura 3.b). Nota-se que k_1 desacelera a tendência da difusão em homogeneizar a densidade, enquanto k_2 intensifica e amortece esse valor de forma periódica.

Considerando que a capacidade suporte é dada pela função periódica (4), ao fixar k_1 , o modelo apresenta uma dada homogeneização da densidade. Nesse contexto, a interferência de k_2 intensifica ou reduz esta homogeneização. Com o passar do tempo, a capacidade suporte oscila, podendo alcançar seu valor mais alto, $K = k_1 + k_2$, ou seu menor valor, $K = k_1 - k_2$, a depender do período de oscilação. Essa oscilação aumenta ou diminui a interferência de k_1 , fazendo com que a densidade decresça mais ou menos rapidamente. Pode-se notar esse efeito de diminuição da homogeneização na Figura 3.b, onde as curvas mais próximas (em vermelho, roxo e azul) representam a densidade nos valores mais elevados da capacidade suporte ($K = k_1 + k_2$), enquanto as curvas mais espaçadas estão mais próximas do menor valor ($K = k_1 - k_2$). Nesse caso, há três faixas nas quais as curvas estão mais próximas devido ao parâmetro p escolhido ($p_K = 0.4$). A capacidade suporte atinge seu valor mais alto em três ocasiões e seu valor mais baixo em duas.

Figura 3. Solução numérica da equação de difusão-reação com fonte malthusiana. Parâmetros da simulação usados: (a) $D_0 = 1, k_1 = 5.5, k_2 = 0, r_1 = 1, r_2 = 0$, (b) $D_0 = 1.0, k_1 = 5.5, k_2 = 0.55, p_K = 0.4, r_1 = 1, r_2 = 0$.



(a) Capacidade suporte constante. (b) Capacidade suporte variável.

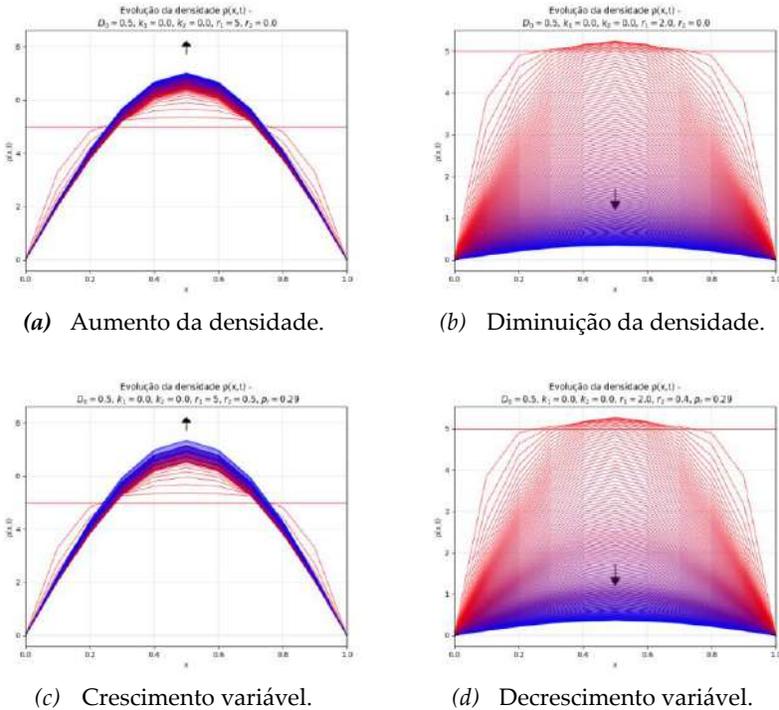
Fonte: Os Autores, 2025.

Nesta simulação e nas simulações seguintes, a seta preta indica a tendência de a densidade crescer exponencialmente (quando apontando para cima) ou ser reduzida a zero (quando apontando para baixo) a partir da distribuição inicial da densidade ($\rho(x, 0) = 5$), conforme o tempo avança. As curvas que transitam do vermelho para o azul indicam a densidade calculada em diferentes instantes de tempo, de modo que as curvas vermelhas estão mais próximas do tempo inicial $t_0 = 0$, enquanto as curvas azuis estão mais próximas do tempo final.

A Figura 4 apresenta quatro simulações num cenário de difusão constante, ou seja, com a capacidade suporte nula, procurando ilustrar a forma em que a taxa de crescimento r atua juntamente com o coeficiente básico de difusão D_0 . Nesse sentido, os resultados mostrados na figura devem se corresponder ao que foi obtido na subseção anterior, onde foi calculada a solução analítica para o modelo com difusão constante. Agora, as simulações foram consideradas para duas situações diferentes geradas pela taxa de crescimento r , sendo constante ($r_2 = 0$) e variável ($r_2 \neq 0$).

Na Figura 4.a, a seta preta e as curvas azuis indicam que a densidade populacional cresce de forma indefinida a partir da distribuição inicial $\rho(x, 0)$, enquanto a Figura 4.b mostra a situação contrária. Esta variação depende dos valores do coeficiente de difusão D_0 e da taxa de crescimento constante ($r_2 = 0$) e da relação entre estes parâmetros. Na primeira destas subfiguras, a taxa de crescimento r é muito alta em relação ao coeficiente de difusão, diferente da situação na segunda subfigura. Assim, na Figura 4.b, apresenta-se a tendência de homogeneização da densidade conforme o tempo avança. As figuras da parte de baixo, diferentemente das anteriores, foram obtidas para o modelo com uma taxa de crescimento variável ($r_2 \neq 0$), incorporando uma oscilação periódica na solução numérica.

Figura 4. Solução numérica da equação de difusão-reação com fonte malthusiana, considerando difusão constante ($k_1 = k_2 = 0$) e com uma taxa de crescimento r constante e variável. Parâmetros da simulação usados: (a) $D_0 = 0.5, r_1 = 5, r_2 = 0$, (b) $D_0 = 0.5, r_1 = 2, r_2 = 0$, (c) $D_0 = 0.5, r_1 = 5, r_2 = 0.5, p_r = 0.29$, (d) $D_0 = 0.5, r_1 = 2, r_2 = 0.4, p_r = 0.29$.



Fonte: Os Autores, 2025.

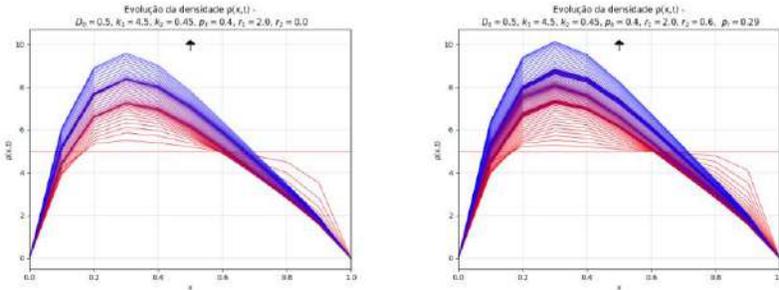
Na Figura 4.c, pode-se observar que, embora sendo muito parecida com a Figura 4.a, por conta dos valores dos parâmetros, neste caso o crescimento ocorre de forma oscilatória, notando-se uma sobreposição de curvas com o avanço do tempo, dado pelas curvas azuis sobrepostas com curvas vermelhas, o que fica ilustrado na região roxa. Dessa forma, evidencia-se uma oscilação na densidade, mesmo mantendo a tendência de crescimento, algo já observado na simulação da solução analítica da Figura 1. Já na

Figura 4.d, num cenário de decrescimento variável, também se observa oscilação na solução, de forma semelhante ao que foi observado na Figura 2, tendendo à homogeneização da densidade. Pode-se verificar que, a depender da escolha dos parâmetros r_1 e r_2 , pode ocorrer o mesmo efeito de sobreposição de curvas observado na Figura 4.c, caso a taxa de crescimento r , dada pela equação (3), seja maior que a difusão. Dessa forma, os resultados aqui obtidos numericamente, considerando as condições modeladas na subseção anterior, correspondem àqueles obtidos de forma analítica.

A Figura 5 apresenta duas simulações que exemplificam cenários de difusão variável com crescimento malthusiano, permitindo representar de forma conjunta os efeitos da difusão sob a interferência da capacidade suporte e da variação populacional dada pela taxa de crescimento. Esses efeitos foram ilustrados separadamente nas Figuras 3 e 4. Em ambas as subfiguras 5.a e 5.b, observa-se um crescimento populacional, embora tenha-se utilizado o mesmo valor $r_1 = 2$, que anteriormente descreveu um cenário de homogeneização nas Figuras 4.b e 4.d. A diferença está na contribuição da capacidade suporte no modelo, que possibilita a permanência dos indivíduos no ambiente.

A Figura 5.a ilustra um cenário de aumento da densidade com crescimento constante ($r_2 = 0$), enquanto a Figura 5.b mostra esse aumento com crescimento variável ($r_2 = 0.6$). Na primeira dessas figuras, observa-se que a densidade tem seu crescimento desacelerado à medida que a capacidade suporte atinge seu menor valor, $K = k_1 - k_2$ (ao contrário do que ocorre na Figura 3.b, o que pode ser visto pelas curvas mais próximas (nas cores vinho e roxo), conforme a densidade cresce. Algo semelhante ocorre na segunda figura, porém com o efeito de sobreposição de curvas (conforme Figura 4.c), o que representa uma pequena regressão no crescimento à medida que a densidade aumenta.

Figura 5. Solução numérica da equação de difusão-reação com fonte malthusiana. Parâmetros da simulação usados: (a) $D_0 = 0.5, k_1 = 4.5, k_2 = 0.45, p_K = 0.4, r_1 = 2, r_2 = 0$, (b) $D_0 = 0.5, k_1 = 4.5, k_2 = 0.45, p_K = 0.4, r_1 = 2, r_2 = 0.6, p_r = 0.29$.



(a) Crescimento constante e suporte variável. (b) Crescimento variável e suporte variável.

Fonte: Os Autores, 2025.

É importante destacar que as simulações com as quais foram geradas as Figuras 3, 4 e 5 foram feitas com um método numérico bastante simples, embora ele permita uma ideia geral do que ocorre com a solução. Em todas as simulações foi necessário escolher os passos de discretização do espaço e do tempo de forma apropriada para evitar simulações incoerentes com o modelo. Para as simulações foram usados os passos $h = 0.1$ (espaço) e $k = 2.0 \cdot 10^{-4}$ (tempo). Todas as imagens foram geradas utilizando a biblioteca *Matplotlib.pyplot* do Python.

Difusão variável com crescimento facilitado

Por fim, nesta subseção estuda-se o modelo (1) com difusão variável e crescimento facilitado, considerando $\mu = 2$. Neste caso, vamos analisar apenas a situação com difusão variável, sendo dada pela equação (2), que depende da capacidade suporte definida na equação (4).

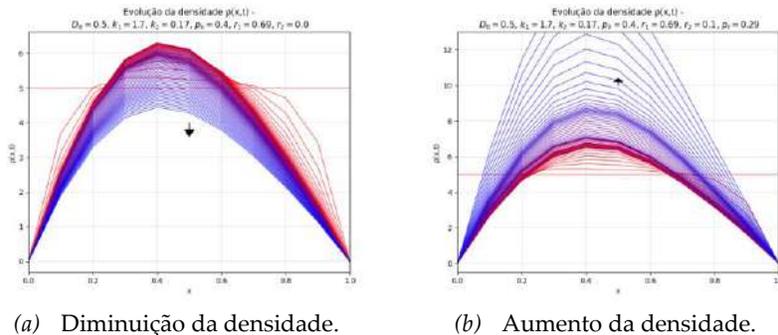
A equação do modelo é semelhante à equação discretizada na subseção anterior, dada pela equação (20), porém considerando o quadrado na densidade no último termo da direita. Assim, o modelo com a fonte facilitada é discretizado da seguinte forma

$$\rho_i^{j+1} = (\gamma D_{x_i}^j + \lambda D_i^j) \rho_{i+1}^j + (\gamma D_{x_i}^j - 2\lambda D_i^j) \rho_i^j + (-\gamma D_{x_i}^j + \lambda D_i^j) \rho_{i-1}^j + kr^j (\rho_i^j)^2 \quad (22)$$

novamente com i tomando valores de 0 a N , j , de 0 a M , e as constantes γ e λ definidas pelas igualdades (21).

Observa-se que, em relação à fonte malthusiana, a fonte facilitada incorpora uma maior sensibilidade ao crescimento e decrescimento na solução. Serão exemplificadas apenas duas situações, uma situação de aumento e outra, de diminuição da densidade, ilustradas na Figura 6.

Figura 6. Solução numérica da equação de difusão-reação com fonte facilitada. Parâmetros da simulação usados: (a) $D_0 = 0.5, k_1 = 1.7, k_2 = 0.17, p_K = 0.4, r_1 = 0.69, r_2 = 0$, (b) $D_0 = 0.5, k_1 = 1.7, k_2 = 0.17, p_K = 0.4, r_1 = 0.69, r_2 = 0.1, p_r = 0.4$.



Fonte: Os Autores, 2025.

A Figura 6.a mostra uma diminuição da densidade de forma lenta, devido à escolha do coeficiente básico de difusão $D_0 = 0.5$. É interessante notar que a Figura 6.b exibe um comportamento completamente oposto devido ao aumento no valor de r_2 , mesmo sendo um acréscimo pequeno de apenas um décimo de unidade. Mantendo-se D_0 inalterado e variando sutilmente a taxa de crescimento, o cenário de decrescimento lento muda para um crescimento explosivo, evidenciando a sensibilidade desse modelo à variação deste parâmetro.

Dessa forma, verifica-se que com este modelo de difusão-reação, é possível descrever diferentes cenários da dinâmica de

uma metapopulação em um fragmento de habitat com capacidade suporte variável. Também é possível mostrar sob quais circunstâncias pode haver extinção local ou sobrevivência dos indivíduos no refúgio.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi utilizado o conceito de difusão para descrever a dinâmica de uma metapopulação, considerando-se a variação populacional, a dispersão de indivíduos pelo ambiente e a possibilidade de interação com ambientes externos. Para isso, foram estudadas três variações de uma equação diferencial parcial de difusão-reação, dada pelo modelo (1). Foram consideradas uma versão da equação com fonte malthusiana em dois regimes de difusão, constante e variável, e uma outra situação de difusão variável com uma fonte facilitada. Para o caso mais simples encontrou-se a solução analítica, enquanto foi empregada uma abordagem numérica, através do Método de Diferenças Finitas nos outros casos analisados.

Para o modelo estudado foram verificadas as circunstâncias nas quais acontece extinção local da subpopulação em um fragmento de habitat isolado, assim como a sobrevivência dos indivíduos em cada fragmento. A partir dos resultados encontrados foi possível verificar que a presença de ambas as fontes provoca um crescimento exponencial da densidade de população quando se tem uma taxa de crescimento positiva, sendo este crescimento mais intenso no caso da fonte facilitada. O modelo, embora limitado por não apresentar fatores que limitam o crescimento da metapopulação no fragmento, permitiu descrever crescimento e persistência, bem como extinção local.

Considerando a natureza não linear da equação, é necessário fazer uma análise mais cuidadosa da influência dos parâmetros no sistema e da estabilidade da solução numérica. Uma alternativa que está sendo atualmente implementada para a simulação numérica é o método de *Crank-Nicolson*, um método de

discretização incondicionalmente estável, bastante útil para discretizar equações não lineares. Em relação aos parâmetros das funções periódicas consideradas para representar a taxa de crescimento e a capacidade suporte, deve-se ter atenção para garantir funções K e r limitadas e, ainda, restringir a capacidade suporte K a valores não negativos, pelo próprio significado biológico que esse fator tem. Como trabalho futuro, é previsto aprimorar o modelo incorporando um fator limitante ao crescimento e um fator de migração, para conectar vários fragmentos de habitat, possibilitando obter um modelo metapopulacional mais completo.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

- [1] MARINI-FILHO, O.; MARTINS, R. **Teoria de metapopulações, novos princípios na biologia da conservação**. Ciência Hoje, v. 27, p. 22-29, 2000.
- [2] COLOMBO, E.; ANTENEODO, C. **Nonlinear population dynamics in a bounded habitat**. Journal of Theoretical Biology, v. 446, p. 11-18, 2018.
- [3] ASSIS, L. M. E.; ASSIS, R. A.; FONSECA, O. J. T. **Um estudo teórico de dinâmica entre fragmentos de habitat**. Biomatemática, v. 30, p. 55-92, 2020.
- [4] LEVINS, R. **Some Demographic and Genetic Consequences of Environmental Heterogeneity for Biological Control**.

- Bulletin of the Entomological Society of America, v. 15, n. 3, p. 237-240, 1969.
- [5] HARRISON, S.; TAYLOR, A. D. Empirical Evidence for Metapopulation Dynamics. In: HANSKI, I.; GILPIN, M. E. (Ed.). *Metapopulation Biology*. San Diego: Academic Press, 1997. p. 27-42.
- [6] BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C.; FENG, Z. **Mathematical Models in Epidemiology**. New York: Springer New York, 2019.
- [7] JORGE, D.; MARTINEZ-GARCIA, R. **Demographic effects of aggregation in the presence of a component Allee effect**. *Journal of the Royal Society Interface*, v. 21, 20240042, 2024.
- [8] RODRIGUES, S.; ARENAS, Z. G. **Dinâmica metapopulacional densodependente**. In: *Proceeding Series of the SBMAC*, v. 11, n. 1, 2024.
- [9] COLEMAN, B. D.; HSIEH, Y.-H.; KNOWLES, G. P. **On the optimal choice of r for a Population in a periodic Environment**. *Mathematical Biosciences*, v. 46, n. 1-2, p. 71-85, 1979.
- [10] STRIKWERDA, J. C. **Finite difference schemes and partial differential equations**. Filadélfia: SIAM, 2004.
- [11] CUNHA, C. **Métodos Numéricos**. Campinas: Editora Unicamp, 2003.

MOVIMENTOS RÍGIDOS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

Jackeline Conrado^{a,1}, Gabriel Pestana^{a,2}, Isac Barbosa^{a,3}, Walter Rocha^{a,4}

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Neste trabalho estudamos as curvas planas e os movimentos rígidos no plano, também conhecidos como isometrias. Um movimento rígido no plano é uma transformação geométrica que preserva distâncias. Como consequência de sua definição, os movimentos rígidos preservam a geometria intrínseca das curvas. A principal propriedade intrínseca de uma curva plana é a sua curvatura (com sinal). O principal resultado deste trabalho é o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Este teorema caracteriza as curvas planas através de sua curvatura com sinal, garantindo que, a menos de movimentos rígidos do plano, uma curva plana é completamente determinada por sua curvatura com sinal. Para uma compreensão mais aprofundada deste teorema, são apresentados conceitos fundamentais como curvas planas e movimentos rígidos, explorando suas propriedades e características. Este estudo faz parte do projeto de iniciação científica que visa investigar a geometria intrínseca e a topologia de superfícies, oferecendo uma base sólida para futuras pesquisas na área de geometria.

Palavras-chave: Curvas planas; movimentos rígidos; geometria diferencial.

¹ jackeline.conrado@ime.uerj.br.

² estudospestana@gmail.com.

³ barbosa.gisac@gmail.com.

⁴ walterdapaz2005@gmail.com.

INTRODUÇÃO

O objetivo do nosso projeto é estudar a geometria intrínseca e topologia das superfícies. Isto significa estudar propriedades geométricas e topológicas que são invariantes por deformações contínuas. Nosso primeiro objetivo é estudarmos o Teorema de Gauss-Bonnet, que estabelece uma profunda conexão entre as propriedades geométricas (curvaturas) e as propriedades topológicas (característica de Euler-Poincaré) de uma superfície.

Teorema 1 (Teorema de Gauss-Bonnet). *Se S é uma superfície regular e orientada e $R \subset S$ é uma região regular com componentes de bordo orientados positivamente pelo comprimento de arco, então*

$$\int k_g(t)dt + \sum \alpha_i = 2\pi\chi(R) - \iint_R KdA,$$

onde $\int k_g(t)dt$ denota a soma das integrais das curvaturas geodésicas sobre todos os segmentos suaves de todas as componentes de bordo de R e $\sum \alpha_i$ denota a soma de todos os vértices de todas as componentes de bordo de R .

Em seguida, estudaremos a geometria intrínseca e topologia das superfícies através de campos de vetores.

Teorema 2 (Teorema de Poincaré). *Se S é uma superfície regular compacta e conexa e V é um campo tangente em S cujos pontos singulares são todos isolados, então a soma dos índices de V em todos os pontos singulares é igual a $\chi(S)$.*

Portanto, temos a seguinte expressão

$$\chi(S) = I_{p_1}(V) + I_{p_2}(V) + \cdots + I_{p_N}(V),$$

onde $I_p(V)$ denota os índices do campo vetorial V no ponto p e χ é a característica de Euler de S . Como consequência do Teorema 2, temos

Corolário 3. *Uma superfície regular compacta e conexa S na qual existe um campo tangente que não se anula em nenhum ponto é difeomorfa a um toro.*

O Corolário 3 implica, em particular, que a esfera S^2 não admite um campo vetorial que não se anula em nenhum ponto. Este fato, é conhecido como **Teorema da Bola Cabeluda**. Para compreendermos tais teoremas necessitamos iniciar nossos estudos com a teoria local das curvas.

CURVAS PLANAS

Definição 4. *Uma curva parametrizada em R^n é uma função suave $\gamma: I \rightarrow R^n$, onde $I \subset R$ é um intervalo. Dizemos que*

- i) *A curva γ é **regular** se $\|\gamma'(t)\| \neq 0$, para todo $t \in I$.*
- ii) *A curva γ é **parametrizada pelo comprimento de arco** se $\|\gamma'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$.*
- iii) *Se $n = 2$ a curva γ é chamada de **curva plana**. Se $n = 3$ a curva γ é chamada de **curva espacial**.*

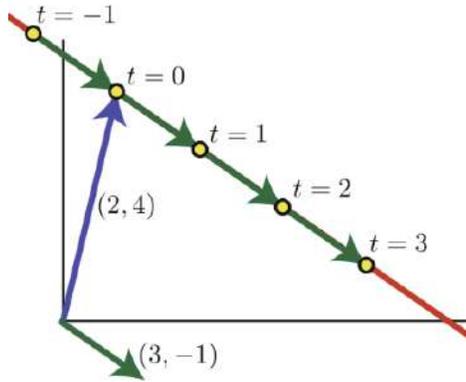
Exemplo 1 (Um círculo). *A função $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, é uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco, que modela um objeto se movendo no sentido anti-horário ao redor do círculo unitário.*

Exemplo 2 (Um gráfico). *A função $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in (-\infty, \infty)$, é uma curva plana regular, que modela um objeto se movendo ao longo da parábola $y = x^2$ de tal forma que sua coordenada x sempre coincide com o parâmetro de tempo.*

Mais geralmente, se I é um intervalo e $f: I \rightarrow R$ é uma função suave, então $\gamma(t) = (t, f(t))$ modela um objeto percorrendo o gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo 3 (Uma reta). *A curva plana regular $\gamma(t) = (2 + 3t, 4 - t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, possui componentes lineares, ela modela um objeto se movendo ao longo de uma linha reta. Veja Figura 1.*

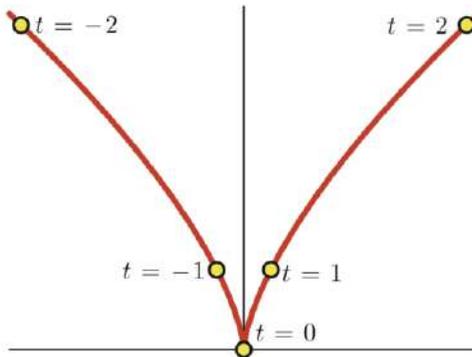
Figura 1. Uma reta em \mathbb{R}^2 .



Fonte: Tapp, 2016.

Exemplo 4 (Uma Curva Plana Irregular). A função $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in (-\infty, \infty)$, é uma curva plana. Suas funções componentes $x(t) = t^3$ e $y(t) = t^2$ satisfazem a equação $y(t) = x(t)^{2/3}$ para todo t . Portanto, γ modela um objeto que se move ao longo do gráfico da equação $y = x^{2/3}$ e, de fato, percorre todo o gráfico dessa equação (veja Figura 2). O gráfico contém uma 'ponta aguda' na origem, isso se dá ao fato de que $\|\gamma'(0)\| = 0$, ou seja, γ não é regular.

Figura 2. Curva plana irregular.



Fonte: Tapp, 2016.

Assumiremos a seguinte notação: $v(t) = \gamma'(t)$ e $a(t) = \gamma''(t)$, que são as funções velocidade e aceleração associadas a curva γ , respectivamente. Podemos escrever $a(t)$ como soma de dois vetores: $a(t) = a^{\parallel}(t) + a^{\perp}(t)$, onde $a^{\parallel}(t)$ é paralelo a $v(t)$ e $a^{\perp}(t)$ é ortogonal a $v(t)$.

CURVATURA DE UMA CURVA PLANA

Definição 5. *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular. Sua função de curvatura, $\kappa: I \rightarrow [0, \infty)$, é definida como*

$$\kappa(t) = \frac{\|a^{\perp}(t)\|}{\|v(t)\|^2}.$$

A curvatura de uma curva regular quantifica o quanto esta curva difere de uma linha reta em cada ponto.

Exemplo 5 (Curvatura da circunferência). *Seja γ uma curva parametrizada, tal que $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ com $r > 0$. As funções velocidade e aceleração são dadas por*

$$v(t) = (-r \sin(t), r \cos(t)) \quad e \quad a(t) = (-r \cos(t), -r \sin(t)).$$

Logo,

$$k(t) = \frac{\|a(t)\|}{\|v(t)\|^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}.$$

Proposição 6. *Se γ é parametrizada pelo comprimento de arco, então $\kappa(t) = \|a(t)\|$.*

Demonstração. Sendo γ parametrizada pelo comprimento de arco, temos que $\|v(t)\| = 1$, o que implica

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle v(t), v(t) \rangle = \langle v'(t), v(t) \rangle + \langle v(t), v'(t) \rangle \\ &= 2 \langle v(t), v'(t) \rangle = 2 \langle v(t), a(t) \rangle. \end{aligned}$$

Logo, $v(t)$ e $a(t)$ são ortogonais e $a(t) = a^{\perp}(t)$. Portanto,

$$\kappa(t) = \frac{\|a^{\perp}(t)\|}{\|v(t)\|^2} = \frac{\|a(t)\|}{1^2} = \|a(t)\|.$$

■

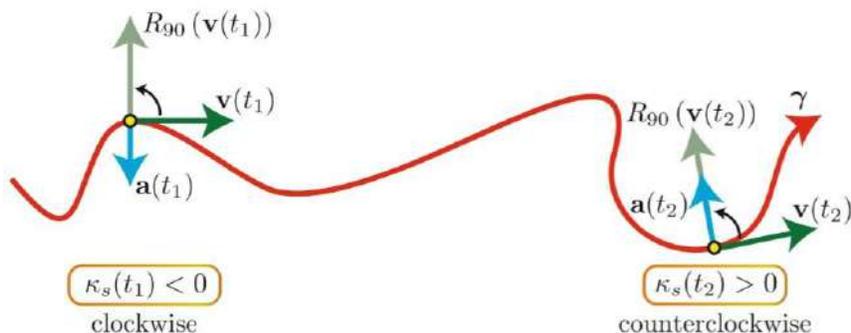
Exemplo 6. Seja $\beta: R \rightarrow R^2$ uma curva dada por $\beta(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$, $t \in R$. Note que β é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1, \quad \forall t \in R.$$

Logo, a função curvatura será:

$$k(t) = \|\beta''(t)\| = 0, \quad \forall t \in R.$$

Figura 3. Função curvatura.



Fonte: Tapp, 2016.

Considere γ uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco e o isomorfismo linear $R: R^2 \rightarrow R^2$ dada por $R(x, y) = (-y, x)$. Observe que, $a(t)$ e $R(v(t))$ são paralelos, logo

$$a(t) = \kappa_s(t)R(v(t)), \quad (1)$$

onde $\kappa_s(t) \in R$. A aplicação $\kappa_s: I \rightarrow R$ é chamada de função *curvatura com sinal* de γ .

MOVIMENTOS RÍGIDOS

Definição 7. Um *movimento rígido* em R^n é uma função $f: R^n \rightarrow R^n$ que preserva distâncias, ou seja, $\text{dist}(f(p), f(q)) = \text{dist}(p, q)$ para todos $p, q \in R^n$.

Considere M_n sendo o conjunto de todas as matrizes com entradas reais $n \times n$. Seja $A \in M_n$, defina $L_A: R^n \rightarrow R^n$ tal que

$L_A(p) = Ap$. A matriz $A \in M_n$ é chamada de **ortogonal** se $\|L_A(p)\| = \|p\|$, para todo $p \in R^n$. O conjunto de todas as matrizes ortogonais é denotado por $O(n)$. Para qualquer $q \in R^n$, a função de **translação** $T_q: R^n \rightarrow R^n$, definida como $T_q(p) = p + q$, é um movimento rígido que translada a origem para q .

Exemplo 7. Seja uma rotação de noventa graus $R: R^2 \rightarrow R^2$ definida por

$$R(x, y) = (-y, x),$$

podemos afirmar que essa rotação é um movimento rígido pois ela preserva distância, já que:

$$\text{dist}(x, y) = \text{dist}(-y, x), \forall (x, y) \in R^2.$$

Proposição 8. Se f é um movimento rígido de R^n que fixa a origem, então $f = L_A$ para algum $A \in O(n)$. Em particular, f é linear.

Demonstração. Como f é um movimento rígido de R^n que fixa a origem, então f preserva o produto interno, ou seja:

$$\langle f(p), f(q) \rangle = \langle p, q \rangle, \text{ para todos } p, q \in R^n.$$

Seja A uma matriz cuja i -ésima coluna é $f(e_i)$, de modo que $f(e_i) = L_A(e_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$, onde e_1, \dots, e_n é uma base ortonormal para R^n . Note que $A \in O(n)$, pois suas colunas são ortonormais. Provaremos que $f = L_A$ (e, portanto, que f é linear) mostrando que

$$g := (L_A)^{-1} \circ f$$

é a função identidade. Observe que a função g é um movimento rígido que fixa a origem pois é uma composição de movimentos rígidos e $f(0) = 0$. Além disto, a função g preserva distâncias e produtos internos, e $g(e_i) = e_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Seja $p \in R^n$. Escreva p e $g(p)$ como combinação linear dos elementos da base e_1, \dots, e_n da seguinte maneira:

$$p = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad \text{e} \quad g(p) = \sum_{i=1}^n b_i e_i.$$

Como $\langle p, e_i \rangle = a_i$ e $b_i = \langle g(p), e_i \rangle$, e g é um movimento rígido temos

$$b_i = \langle g(p), e_i \rangle = \langle g(p), g(e_i) \rangle = \langle p, e_i \rangle = a_i,$$

o que prova que $g(p) = p$, logo g é a função identidade. Portanto,

$$L_A = f.$$

■

Proposição 9. *Se f é um movimento rígido de R^n , então $f = T_q \circ L_A$ para uma escolha única de $q \in R^n$ e $A \in O(n)$.*

Demonstração. Seja f um movimento rígido. Definimos $q = f(0)$, temos que $(T_q)^{-1} \circ f$ é um movimento rígido que fixa a origem, ou seja, $(T_q)^{-1} \circ f(0) = 0$, onde $(T_q)^{-1} = T_{-q}$. Pela Proposição 8, $(T_q)^{-1} \circ f = L_A$ para algum $A \in O(n)$. Portanto, $f = T_q \circ L_A$.

■

Um movimento rígido $f = T_q \circ L_A$ é **próprio** se $\det(A) = 1$, e **impróprio** se $\det(A) = -1$.

Proposição 10. *Seja γ uma curva regular plana. A função curvatura com sinal de γ é invariante sob movimentos rígidos próprios e muda de sinal sob movimentos rígidos impróprios.*

Demonstração. Sejam $v, R(v)$ uma base positivamente orientada e $A \in O(n)$. Sabemos que $A \cdot v, A \cdot R(v)$ é positivamente orientada se e somente se $\det(A) = 1$. Considere $\bar{v} := Av$, temos que $\bar{v}, R(\bar{v})$ é positivamente orientada. Logo, $R(\bar{v}) = \pm A \cdot R(v)$, onde o sinal depende do $\det(A)$. Portanto,

$$\bar{\kappa}_s = \langle \bar{a}, R(\bar{v}) \rangle = \langle A\bar{a}, \pm AR(v) \rangle = \pm \langle a, R(v) \rangle = \pm \kappa_s.$$

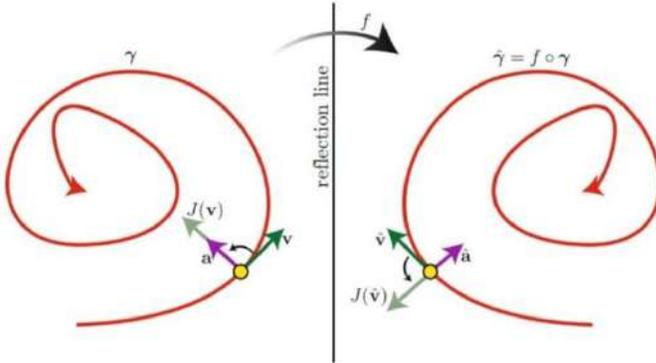
Segue que,

$$\bar{\kappa}_s = \kappa_s \text{ se } \det(A) > 0 \quad \text{e} \quad \bar{\kappa}_s = -\kappa_s \text{ se } \det(A) < 0.$$

■

A Figura 4 ilustra como um movimento rígido impróprio de R^2 , que altera o sinal da curvatura com sinal de uma curva γ .

Figura 4. Movimento rígido impróprio.



Fonte: Tapp, 2016.

Teorema 11 (Teorema Fundamental das curvas planas). *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $\kappa_s: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então existe uma curva plana parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja função de curvatura com sinal é igual a κ_s . Se $\gamma, \tilde{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ são duas dessas curvas, então existe um movimento rígido próprio, f , de \mathbb{R}^2 tal que $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$.*

Demonstração. (Existência) Fixado um valor arbitrário $t_0 \in I$. Definimos a função ângulo $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \kappa_s(u) du + \lambda,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante. Fixado um ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, definimos função velocidade associada a função ângulo sendo $v(t) = (\cos(\theta(t) + \lambda_0), \sin(\theta(t) + \lambda_0))$, com $\lambda_0 := -\lambda$. Por fim, definimos a curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ onde

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \cos(\theta(u) + \lambda_0) du$$

e

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \sin(\theta(u) + \lambda_0) du.$$

Observe que, γ é parametrizada pelo comprimento de arco e que

$$a(t) = \theta'(t)(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t))) = \theta'(t)R(v(t)).$$

Pela equação (1) obtemos $\theta'(t) = \kappa_s(t)$. Portanto, existe uma curva parametrizada pelo comprimento de arco γ cuja curvatura com sinal é dada por κ_s .

(Unicidade) Considere $\gamma, \bar{\gamma}: I \rightarrow R^2$ duas curvas planas parametrizadas pelo comprimento de arco as quais possuem a mesma função curvatura κ_s . Sejam θ e $\bar{\theta}$ duas funções ângulos associadas a κ_s , como θ e $\bar{\theta}$ diferem por uma constante, temos $\bar{\theta} = \theta + \theta_0$. Seja v e \bar{v} funções velocidades associadas às funções ângulos θ , $\bar{\theta}$, respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) &= (\cos(\bar{\theta}(t)), \sin(\bar{\theta}(t))) = (\cos(\theta(t) + \theta_0), \sin(\theta(t) + \theta_0)) \\ &= L_A(v(t)), \end{aligned}$$

onde A é uma matriz de rotação pelo ângulo θ_0 . Considere o movimento rígido próprio $f = T_q \circ L_A$ e uma curva $\beta = f \circ \gamma$, onde $q \in R^2$ tal que $\beta(t_0) = \bar{\gamma}(t_0)$. Como β e $\bar{\gamma}$ têm a mesma função derivada e o mesmo valor inicial, pela unicidade das funções primitivas implicam que $\beta = \bar{\gamma}$. ■

CONCLUSÕES

Ao compreendermos o teorema fundamental das curvas planas, percebemos que uma curva plana está intrinsecamente ligada à sua curvatura. Essa propriedade geométrica, que não depende da parametrização, define completamente a curva a menos de um movimento rígido.

REFERÊNCIAS

- [1] TAPP, Kristopher. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Springer, 2016.

OFICINA ADA LOVELACE: RELATO DE EXPERIÊNCIA

Michelle Lau^{a,1}, Natália Pedroza^{a,2}

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Este relato descreve a experiência de uma oficina de programação realizada com alunos do Ensino Fundamental e Médio participantes da XVII Semana do IME, que teve como objetivo principal estimular o pensamento computacional de forma lúdica, com foco na promoção de carreiras em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) e na valorização do papel da mulher na ciência. A oficina incluiu uma introdução à história de Ada Lovelace, pioneira da programação, seguida de atividades de Computação Desplugada, que permitiram aos participantes desenvolverem o Pensamento Computacional, conceitos fundamentais de algoritmos e lógica de programação. A iniciativa buscou não apenas despertar o interesse das meninas por áreas tecnológicas, mas também promover a equidade de gênero nesses campos.

Palavras-chave: Meninas nas exatas; pensamento computacional; computação desplugada.

INTRODUÇÃO

As desigualdades sociais, de gênero e econômicas continuam a ser barreiras significativas ao acesso de meninas às áreas de tecnologia. Segundo a UNESCO (2021), as mulheres representam apenas 33,3% dos pesquisadores em todo o mundo, e seu trabalho raramente recebe o devido reconhecimento. Essa sub-representação feminina em STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia

¹ michelle.lau@ime.uerj.br.

² npsnatalia@gmail.com.

e Matemática) revela a urgência de iniciativas que promovam a inclusão de meninas e mulheres nesses campos.

No Brasil, essa lacuna é ampliada pelo acesso desigual a recursos educacionais e pela falta de incentivo para que meninas explorem áreas tecnológicas desde cedo. No entanto, introduzir conceitos de computação e pensamento computacional desde o ensino básico é fundamental. De acordo com Barr e Stephenson (2011, p. 49), não é mais suficiente esperar até o ensino superior para expor os alunos a essas habilidades; todos os estudantes viverão uma vida fortemente influenciada pela computação. Assim, o desenvolvimento de habilidades como resolução algorítmica de problemas e o uso de ferramentas computacionais deve começar já no ensino fundamental.

O pensamento computacional, como aponta Liukas (2015), é a capacidade de "pensar em problemas de uma maneira que permita que computadores os resolvam", envolvendo lógica, reconhecimento de padrões, algoritmos e decomposição de problemas. Wing (2006) reforça a importância de adicionar essa competência à formação básica de todas as crianças, equiparando-a à leitura, escrita e aritmética.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) já reconhece essa necessidade, abordando temas de tecnologia e computação de forma transversal. A competência geral número 5 (Competência de Cultura Digital) incentiva o uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs), estimulando os alunos a serem protagonistas ativos no uso da tecnologia. A introdução da programação no currículo, como destacam Mattos, Ferreira e Anacleto (2016), é crucial para desenvolver a criatividade, o raciocínio lógico e a resolução de problemas, habilidades essenciais no mundo moderno.

Nesse contexto, o presente trabalho descreve uma experiência prática realizada durante a XVII Semana do IME, um evento organizado pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). A oficina de programação realizada teve como foco o estímulo ao Pensamento

Computacional em alunos do Ensino Fundamental e Médio participantes do evento, utilizando atividades lúdicas para introduzir conceitos de algoritmos e lógica de programação.

O trabalho está organizado em quatro seções, sendo apresentado na primeira a fundamentação teórica sobre Pensamento Computacional e Computação Desplugada, conceitos essenciais para a proposta da atividade. Na segunda seção, é apresentada a origem do “Ada Lovelace Day” e a importância da sua celebração. A terceira seção descreve a oficina apresentada no evento XVII Semana do IME, incluindo detalhes das observações e análises dos alunos participantes envolvidos. Por fim, na última seção são apresentadas as conclusões do trabalho.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL E COMPUTAÇÃO DESPLUGADA

O Pensamento Computacional (PC) é um termo que aparece pela primeira vez na obra “Mindstorms: Computers and Powerful Ideas” (Papert, 1980, p. 182) e foi amplamente popularizado por Jeanette Wing em 2006. No entanto, sua definição ainda é objeto de debate entre os pesquisadores da área. Para este trabalho, optamos por adotar a definição apresentada no livro infantil: “Hello, Ruby: Adventures in Coding” de Linda Liukas (2015):

Pensar em problemas de uma maneira que permita que computadores os resolvam. O pensamento computacional é algo que as pessoas fazem, não os computadores. Ele inclui o pensamento lógico e a capacidade de reconhecer padrões, pensar com algoritmos, decompor um problema e abstrair um problema (Liukas, 2015, p. 110).

De modo geral, o PC é uma habilidade que permite resolver problemas de maneira eficiente e sistemática, utilizando princípios da Ciência da Computação. De acordo com Wing (2006), o PC envolve competências como a Decomposição de Problemas, Reconhecimento de Padrões, Abstração e a Construção de Algoritmos.

A Decomposição, ocorre quando um problema complexo é dividido em partes menores, facilitando a sua resolução e permitindo atenção a mais detalhes. O Reconhecimento de Padrões, manifesta-se quando o estudante começa a identificar possíveis padrões na resolução de um problema, podendo aplicá-los em outras situações de maneira similar, otimizando o processo e tornando-o mais eficiente. A Abstração acontece quando o estudante entende o que é realmente relevante. Os Algoritmos aparecem quando se integram etapas para elaborar uma solução utilizando uma sequência de passos (Liukas, 2015).

Embora seja central para o campo da programação, o PC transcende as áreas tecnológicas e é amplamente reconhecido como uma habilidade fundamental para a solução de problemas em diversas disciplinas. Ao desenvolver o PC, as/os alunas/os são estimuladas/os a pensar de forma lógica e estruturada, e ter habilidades essenciais para enfrentar desafios complexos em qualquer área. Conforme apontam Zorzo, Raabe e Brackmann (2021):

Há abundante evidência científica que comprova que crianças e adolescentes que aprendem a resolver problemas de maneira computacional melhoram seu desempenho em outras áreas disciplinares, entre elas Matemática e Línguas (Zorzo, Raabe e Brackmann, 2021, p. 161).

A Computação Desplugada surge como uma metodologia eficaz para o ensino do Pensamento Computacional, especialmente no contexto da educação básica. Essa abordagem permite que os alunos aprendam os conceitos fundamentais da computação sem a necessidade de utilizar computadores. Por meio de atividades práticas, como jogos, desafios e simulações, as/os estudantes exploram conceitos como algoritmos, estruturas de dados e lógica de programação. Bell et al. (2009) defendem que a Computação Desplugada facilita o aprendizado ao permitir que os alunos interajam fisicamente com os conceitos e colaborem entre si, o que torna o processo mais engajante e acessível. Além disso, ao não depender de tecnologias avançadas, essa metodologia promove a

inclusão, permitindo que alunos de diferentes contextos sociais e econômicos tenham acesso ao ensino de computação.

Promover o Pensamento Computacional em meninas, em particular, é uma iniciativa crucial diante da sub-representação feminina nas áreas de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM). Fatores como estereótipos de gênero, ausência de modelos femininos e barreiras institucionais contribuem para a menor participação de meninas nessas áreas, conforme apontam Stoet e Geary (2018). Desde cedo, muitas meninas perdem o interesse por disciplinas como Matemática e Física, o que se reflete nas suas escolhas profissionais futuras. Para enfrentar esse desafio, é fundamental criar iniciativas que incentivem a participação feminina em STEM, oferecendo a elas um ambiente de suporte e encorajamento desde o início de sua trajetória escolar.

ADA LOVELACE DAY

O “Ada Lovelace Day” é uma celebração internacional que acontece todos os anos no mês de outubro e se dá em homenagem à Augusta Ada Byron King, Condessa de Lovelace (1815-1852), Figura 1. Nascida em Londres, filha da matemática Anabella Milbanke e do poeta Lord Byron, é considerada a primeira programadora da história. Esta celebração, fundada pela tecnóloga Suw Charman-Anderson em 2009, é realizada com o objetivo de chamar a atenção para esta cientista pioneira (Ada Lovelace) e promover as conquistas das mulheres em carreiras STEM.

Figura 1. Ada Lovelace.



Fonte: Domínio público, 2025.

Ao destacar figuras históricas como Ada Lovelace, pioneira da programação, essas iniciativas oferecem às meninas modelos inspiradores. Ada Lovelace, reconhecida como a primeira programadora, desenvolveu no século XIX um algoritmo destinado a ser processado por uma máquina, muito antes da invenção dos computadores modernos (Stein, 1985). O exemplo de Lovelace não apenas celebra a contribuição das mulheres para a Ciência da Computação, mas também serve como uma ferramenta motivacional para meninas que aspiram a seguir carreiras em STEM. Guzdial (2016) ressalta a importância de expor meninas a modelos femininos e a experiências bem-sucedidas em STEM, pois isso amplia suas perspectivas de futuro e promove a equidade de gênero nesses campos.

Como parte das celebrações globais do Dia de Ada Lovelace, é realizada a “Jornada Latinoamericana de Talleres STEM para niñas y mujeres adolescentes” (EXTENSIÓN FIQ . UNL, 2025) (Jornada Latino-Americana de STEM para Meninas) promovida pela Faculdade de Ciências Exatas e Naturais (Universidade de Buenos Aires - UBA), a Faculdade de Engenharia Química (Universidad Nacional del Litoral - UNL), a Universidad Nacional de Rafaela (UnRaf) e a Universidad Torcuato Di Tella (UTDT).

Atualmente, a iniciativa ocorre em seis países da América Latina - Argentina, Brasil, Chile, Colômbia, México e Uruguai. No Brasil, sua realização tornou-se possível por meio de uma parceria do Comitê Temático Mulheres na Matemática Aplicada e Computacional da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional e a UBA (Mulheres SBMAC, 2024).

Esta iniciativa busca inspirar e motivar jovens mulheres a se aprofundar no fascinante mundo da Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM). Por meio de atividades divertidas e interativas, o objetivo é oferecer uma experiência única que capacite as meninas a explorar e desenvolver seu potencial nessas áreas fundamentais para o futuro. O encontro propõe uma série de oficinas lúdicas com sessões de resolução de problemas com meninas entre 10 e 12 anos (do 5º ao 7º ano do Ensino Fundamental). Através da Computação Desplugada, é possível introduzir essas meninas ao Pensamento Computacional de forma acessível e lúdica, criando oportunidades para que elas desenvolvam habilidades que serão fundamentais em suas futuras carreiras. Além de despertar o interesse por áreas tecnológicas, essas experiências promovem o empoderamento feminino, preparando as alunas para serem protagonistas na criação de soluções tecnológicas e científicas. Assim, incentivar meninas nas

Ciências Exatas não é apenas uma questão de justiça social, mas também uma estratégia para promover inovação e diversidade nas áreas de STEM.

OFICINA ADA LOVELACE - XVII SEMANA DO IME

A Semana do IME é um encontro acadêmico tradicional promovido pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da UERJ. Em 2024, foi realizada a sua décima sétima edição, integrando a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT), realizada nos dias 18 a 25 de outubro de 2024, no campus Maracanã. O evento promoveu diversas atividades acadêmicas e científicas como minicursos, oficinas, palestras, mesas redondas,

maratona de programação, maratona de matemática, além de sessões de painéis de alunos da escola básica, de graduação e de pós-graduação e exposições.

A oficina *Ada Lovelace* compôs a programação da XVII Semana do IME e sua realização foi possível devido à participação da UERJ na *Jornada Latino-Americana de STEM para Meninas*, evento anual que ocorre no IME. Dentre as diversas atividades promovidas pela Jornada, a atividade escolhida para compor a oficina na Semana do IME foi a atividade denominada “R2-D2 e o caminho à Millenium Falcon”. Esta atividade, baseada no livro de Bordignon e Iglesias (2020), tem como objetivo ensinar fundamentos da programação por meio da Computação Desplugada introduzindo conceitos do Pensamento Computacional.

Durante a XVII Semana do IME, a oficina foi realizada em duas sessões de 30 minutos cada, com a participação de alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, além de duas professoras e um professor da Universidade do Rio de Janeiro. Embora, originalmente, a atividade fosse voltada para meninas de 10 a 12 anos no contexto da *Jornada Latino-Americana de STEM para Meninas*, no evento da Semana do IME, a oficina foi aberta a todos os alunos participantes.

A atividade teve início com uma questão introdutória aos participantes: “Vocês sabem que foi Ada Lovelace?”. Os participantes de ambas as sessões não conheciam e não tinham ouvido falar sobre Ada Lovelace. A professora que conduzia a apresentação explicou, então, que quando o matemático Charles Babbage publicou seu artigo sobre a máquina analítica (uma máquina capaz de realizar cálculos utilizando determinadas funções) em uma revista suíça. Ada Lovelace realizou a tradução do francês para o inglês e acrescentou suas próprias notas de rodapé. Nessas notas, Ada discorre sobre como a Máquina Analítica poderia ser usada para alavancar o progresso da sociedade e não só realizar meros cálculos. As notas de Lovelace foram classificadas de A a G (MISA, 2016). Na nota G, ela descreve

um algoritmo para que a máquina pudesse computar a Sequência de Bernoulli, apresentada na Equação (1).

$$\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, \dots\right\} \quad (1)$$

Esse feito foi posteriormente reconhecido pela Academia Científica como sendo o primeiro programa de computador da história. Assim, Ada Lovelace tornou-se reconhecida como a primeira programadora da história. A professora enfatizou que Lovelace foi a primeira pessoa — independentemente de gênero — a desenvolver um algoritmo. Após, foi iniciada a atividade voltada para o ensino da programação. A atividade foi separada em três atividades, sendo descritas a seguir:

Atividade 1

Nesta atividade inicial, os participantes foram apresentados ao robô R2-D2, que deveria encontrar o caminho para a nave Millennium Falcon (tubo “E”) por meio de um labirinto de tubos, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2. Atividade 1.



Fonte: Ada Lovelace Day, 2024.

Os participantes precisavam ajudar o robô a seguir um conjunto de três instruções simples, previamente programadas:

1. Desça pelo tubo até que apareça um novo túnel ou você encontre a nave.
2. Sempre que você encontrar um novo túnel, deve atravessá-lo.
3. Volte para a instrução 1.

A primeira questão proposta foi: “Se ele entrar pelo tubo “A”, ele encontrará a nave seguindo as instruções?”. Alguns alunos responderam afirmativamente, mas, ao analisarmos seus trajetos, notou-se que não estavam considerando a obrigatoriedade de virar no túnel após entrar no tubo “E”. Essa omissão foi compreensível, dado que os participantes, ao visualizarem diretamente a nave, optaram por seguir um caminho intuitivo, dado o pouco hábito de seguir instruções estritamente lógicas para um computador.

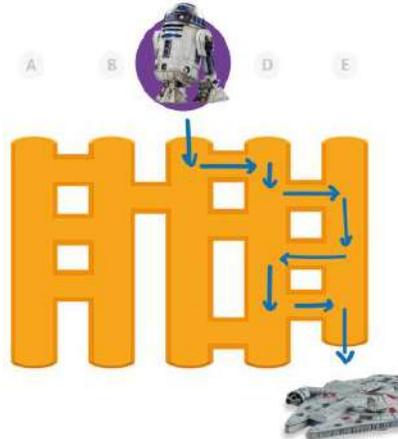
Esta atividade também abre espaço para refletir sobre a importância da precisão na programação de algoritmos e como pequenas variações nas regras podem alterar significativamente o resultado final.

Atividade 2

Após a constatação de que o tubo “A” não levava à nave, os alunos foram questionados: “Por qual tubo o R2-D2 deveria entrar para alcançar a nave, seguindo as mesmas instruções?”.

Observou-se que alguns alunos ainda encontravam dificuldades, em especial por falta de atenção ao ignorar certos túneis onde deveriam virar. Esse comportamento reforça a tendência humana de buscar caminhos diretos e intuitivos, sem necessariamente seguir a lógica sequencial exigida pelo algoritmo. No entanto, a maioria identificou rapidamente o túnel “C” como o correto. Com apoio das professoras, todos os participantes chegaram à resposta certa, conforme Figura 3.

Figura 3. Atividade 2.



Fonte: Ada Lovelace Day, 2024.

Esta atividade pode ser utilizada para discutir o papel das instruções bem definidas na programação, destacando a importância de seguir um conjunto lógico de regras para alcançar um objetivo.

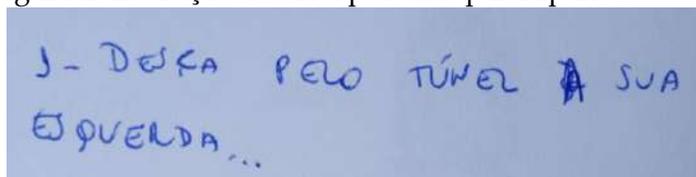
Atividade 3

A última atividade propôs o desafio de criar um conjunto de instruções que permitisse ao R2-D2 encontrar a nave independentemente do tubo de entrada. Os alunos precisavam escrever instruções que garantissem o sucesso em qualquer situação.

Ao longo da atividade, observou-se uma diversidade de estratégias utilizadas pelos alunos para interpretar as instruções e encontrar a solução correta. Um aspecto interessante foi a forma como alguns deles se colocaram no lugar do robô dentro do desenho do labirinto, ao invés de adotarem a visão externa do mapa. Esse fator levou alguns alunos a considerarem a necessidade de virar à esquerda, pois, ao mentalizarem a trajetória do R2-D2 a partir de sua própria perspectiva dentro do labirinto, sua orientação espacial era diferente da visualização convencional do

diagrama, conforme instrução de uma participante ilustrada na Figura 4.

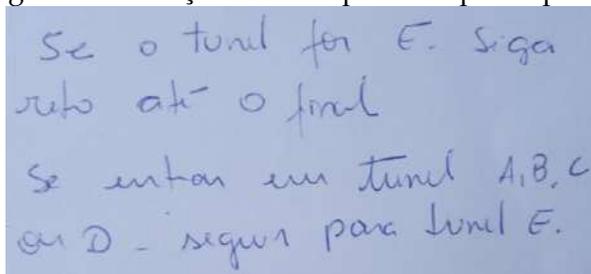
Figura 4. Instrução descrita por uma participante.



Fonte: Acervo das autoras, 2024.

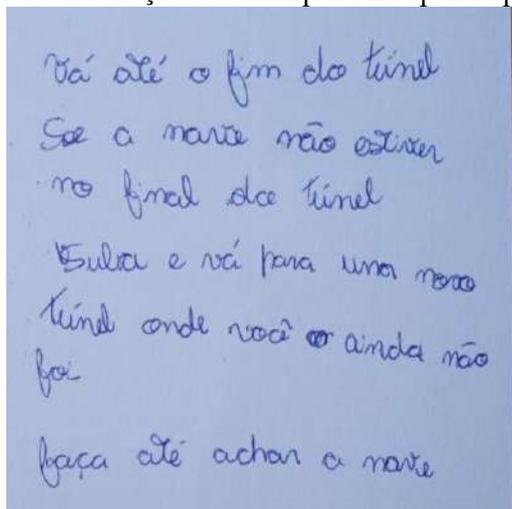
Por outro lado, a maioria dos alunos manteve a restrição de virar sempre à direita, possivelmente porque interpretaram a instrução de forma mais sistemática, baseando-se na sequência lógica do algoritmo. No entanto, em alguns casos, os participantes apresentaram instruções pouco precisas, um exemplo é apresentado na Figura 5, onde a participante descreve a instrução “seguir para o túnel E” sem descrever precisamente como o robô deve fazer isso. Por fim, uma participante utilizou a ideia de que o robô deveria seguir o tubo até o final antes de considerar qualquer virada, o que levou a trajetórias incorretas ou caminhos mais longos do que o necessário, conforme Figura 6.

Figura 5. Instrução descrita por uma participante.



Fonte: Acervo das autoras, 2024.

Figura 6. Instrução descrita por uma participante.



Fonte: Acervo das autoras, 2024.

Essa variação nas abordagens revela aspectos interessantes do pensamento lógico e espacial dos alunos. Enquanto alguns priorizaram uma visão mais intuitiva e subjetiva, outros buscaram seguir regras estritas sem questionar possíveis exceções. Essa diferença de interpretação reforça a importância de discutir não apenas a formulação das regras, mas também a perspectiva adotada ao segui-las.

Com a orientação das professoras, que incentivaram os participantes a traçarem caminhos e buscar padrões, o entendimento da solução foi se consolidando. Uma estudante em especial chamou a atenção ao incluir uma condição extra: ela propôs que o robô deveria virar "até quatro vezes à direita", observando que, a partir do tubo "A", seriam necessárias quatro viradas, três a partir do tubo "B", duas do "C" e apenas uma do "D". Embora sua solução estivesse correta, uma das professoras sugeriu que repensasse a necessidade de incluir tal condição. Após uma breve explicação, a aluna compreendeu que o acréscimo não era essencial.

Essas soluções são particularmente interessantes, pois refletem o processo de raciocínio e desenvolvimento que ocorre ao se escrever um algoritmo. Com frequência, ideias e comandos são modificados e, por vezes, permanecem elementos que já não são necessários, mas que podem revelar um raciocínio detalhado e cuidadoso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A oficina relatada teve como foco o desenvolvimento do Pensamento Computacional em alunos do Ensino Fundamental e Médio, utilizando uma abordagem lúdica para introduzir conceitos fundamentais de algoritmos e lógica de programação. A atividade proposta da simulação do robô R2-D2 navegando por um labirinto, possibilitou aos alunos compreenderem a importância de seguir instruções precisas, desenvolver estratégias, analisar dados e trabalhar em equipe.

Essas práticas estão diretamente alinhadas com os princípios do Pensamento Computacional, que envolve decompor problemas, identificar padrões, abstrair soluções e criar algoritmos. Em particular, as atividades desplugadas demonstraram ser uma ferramenta importante para introduzir esses conceitos de forma acessível. A desconexão do ambiente tecnológico em si permitiu que os participantes focassem no raciocínio lógico e na construção de soluções sem a complexidade de aprender a operar dispositivos simultaneamente.

Além do conteúdo técnico, a oficina também buscou incentivar a reflexão sobre a participação das mulheres na Ciência e na Tecnologia, destacando a história de Ada Lovelace como a primeira pessoa programadora da história. Essa inserção foi essencial para inspirar as alunas participantes a se verem como agentes de transformação nas áreas STEM (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática), enfatizando que essas disciplinas são, e devem ser, acessíveis a todos, independentemente de gênero.

Iniciativas como essa, que promovem a inclusão de meninas em áreas tecnológicas desde cedo, são fundamentais para enfrentar as desigualdades de gênero no setor. Oferecer às alunas oportunidades para desenvolver suas habilidades em STEM contribui não apenas para a formação de novas gerações de profissionais qualificadas, mas também para a redução da disparidade de gênero nesse campo.

Por fim, o uso da Computação Desplugada provou-se eficaz no desenvolvimento do Pensamento Computacional entre os participantes. Ao aplicar estratégias lúdicas e colaborativas, os participantes puderam experimentar de forma prática como resolver problemas complexos e como a computação pode ser um recurso valioso em suas vidas acadêmicas e futuras carreiras. Essas atividades foram uma primeira introdução ao universo da programação e, ao mesmo tempo, um incentivo para que mais meninas se interessem por essas áreas e contribuam para a construção de um futuro mais diverso e equitativo. Além disso, a presença de alunos do sexo masculino foi essencial para ampliar a conscientização sobre a importância da participação e contribuição feminina nas áreas STEM, ajudando a desconstruir estereótipos e fortalecer uma cultura de respeito e igualdade, na qual todos possam contribuir e se desenvolver plenamente no campo da tecnologia.

AGRADECIMENTOS

Universidade de Buenos Aires, a Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, e a Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro e a Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo financiamento.

REFERÊNCIAS

- BARR, V.; STEPHENSON, C. **Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community?**. *Acm Inroads*, v. 2, n. 1, p. 48-54, 2011.
- BORDIGNON, F. R. A.; IGLESIAS, A. A. **Introducción al pensamiento computacional**. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional; Educar, SE, 2020.
- EXTENSIÓN FIQ. UNL. **Ada Lovelace day**. Disponível em: <https://adalovelace.net.ar/index.html>. Acesso em: 10 mar. 2025.
- LIUKAS, Linda. **Hello Ruby: adventures in coding**. New York: Macmillan, 2015.
- MISA, T. J. **Charles Babbage, Ada Lovelace, and the Bernoulli numbers**. In HAMMERMAN, R.; RUSSEL, A. L. (Eds.) *Ada's Legacy: Cultures of Computing from the Victorian to the Digital Age*, New York: Association for Computing Machinery, p. 11-31, 2016.
- MULHERES SBMAC. **Ada Lovelace Day - 2024**. Disponível em: <https://www.mulheressbmac.com.br/ada-lovelace-day-2024>. Acesso em: 10 mar. 2025.
- XVII Semana do IME. Disponível em: <https://www.even3.com.br/xvii-semana-do-ime-490422/>. Acesso em: 10 mar. 2025.
- WING, J. M. **Computational thinking**. *Communications of the ACM*, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.
- ZORZO, A. F.; RAABE, A. L. A.; BRACKMANN, C. **Computação: o vetor de transformação da sociedade**. arXiv e-prints, p. arXiv: 2106.11419, 2021. Disponível em: <https://www.computacional.com.br/files/Geral/ZORZO%20-%20Vetor%20de%20Transforma%C3%A7%C3%A3o%20da%20Sociedade.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2025.

OFICINA BICICLETA ENERGIA

**Thiago Daboit Roberto^{a,1}, Flávia Luzia Jasmim^a,
Thiago Corrêa Almeida^a**

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: A oficina Bicicleta Energia, realizada na XVII Semana do IME, proporcionou aos participantes uma experiência interativa sobre conversão de energia e eficiência energética. Utilizando uma bicicleta com dínamo, foi possível visualizar, na prática, a diferença de consumo entre lâmpadas LED e halógenas, além da variação na demanda energética de fitas de LED coloridas. A atividade destacou a importância do uso consciente da energia e da adoção de tecnologias sustentáveis.

Palavras-chave: Energia; sustentabilidade; bicicleta; eficiência energética; ensino de Física.

INTRODUÇÃO

O crescimento da demanda energética e a preocupação com a sustentabilidade tornam cada vez mais urgente o desenvolvimento de tecnologias eficientes e a conscientização sobre o uso responsável da energia. A eficiência energética, isto é, a capacidade de obter o máximo aproveitamento da energia disponível, é um dos fatores fundamentais para reduzir desperdícios e minimizar impactos ambientais. No contexto educacional, estratégias que unem teoria e prática são essenciais para facilitar a compreensão de conceitos científicos complexos e estimular a reflexão crítica.

As fontes de energia podem ser classificadas em renováveis (solar, eólica, hidráulica, biomassa) e não renováveis (petróleo,

¹ Thiagodbtr@gmail.com

carvão, gás natural e energia nuclear). Ambas são fundamentais para a matriz energética global, mas as fontes renováveis se destacam por sua menor emissão de poluentes e maior sustentabilidade a longo prazo (Santos; Rodrigues; Carniello, 2021). No entanto, a geração de energia, independentemente da fonte, sempre envolve processos de conversão, nos quais ocorrem perdas energéticas. Na geração de eletricidade a partir do movimento mecânico, como no caso de hidrelétricas, turbinas eólicas ou dínamos, há perdas por atrito, dissipação térmica e resistência elétrica (Pauliello; Moreira, 2006). Dessa forma, compreender a conversão e a eficiência energética é essencial para desenvolver hábitos de consumo mais conscientes e incentivar o uso de tecnologias sustentáveis. A educação desempenha um papel crucial nesse processo, pois a abordagem experimental permite que os conceitos teóricos sejam mais bem assimilados. Borges, Dickman e Vertchenko (2018) sugerem que o ensino de física deve incluir experimentos práticos para que os alunos visualizem fenômenos abstratos de maneira mais concreta.

Com esse objetivo, a oficina Bicicleta Energia, realizada na XVII Semana do IME, foi projetada para demonstrar, de maneira interativa e prática, os princípios da conversão de energia e a importância da eficiência energética. Utilizando uma bicicleta equipada com um dínamo e diferentes dispositivos de iluminação, os participantes puderam visualizar, em tempo real, o impacto da energia gerada por suas pedaladas e como diferentes tecnologias consomem essa energia de formas distintas.

A experiência permitiu que os participantes comparassem o esforço necessário para acender lâmpadas LED e halógenas e entendessem a relação entre consumo energético e eficiência luminosa. Além disso, a variação na demanda energética de fitas de LED coloridas gerou discussões sobre as diferenças no consumo elétrico entre tecnologias e dispositivos.

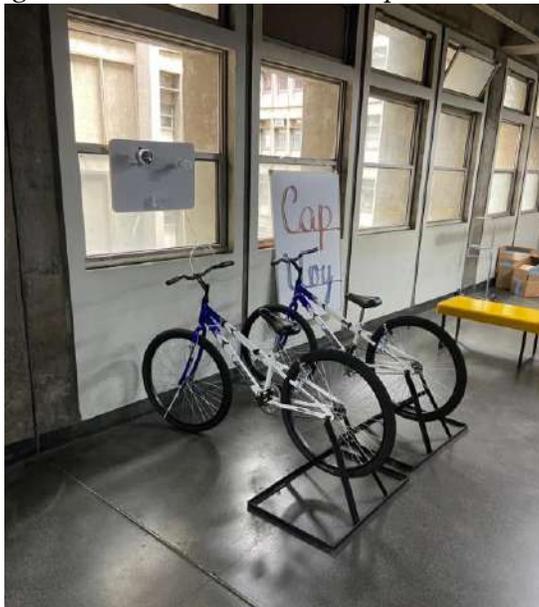
Este capítulo descreve a metodologia aplicada na oficina, os principais resultados observados e a importância dessa abordagem

para o ensino de física e a conscientização sobre sustentabilidade energética.

MATERIAIS E MÉTODOS

A oficina Bicicleta Energia utilizou uma abordagem experimental e interativa, permitindo que os participantes observassem, na prática, os conceitos de conversão de energia e eficiência energética. A atividade foi estruturada para demonstrar como a energia mecânica, gerada pelo movimento de pedaladas, pode ser transformada em energia elétrica e utilizada para alimentar diferentes dispositivos. Antes do início da oficina, as bicicletas e os equipamentos foram organizados no espaço de experimentação, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1. Bicicletas arrumadas para a oficina.



Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

Materiais Utilizados

Para a montagem do experimento, foram utilizados os seguintes materiais:

- I. Bicicleta convencional – utilizada como fonte de energia mecânica, com a roda traseira acoplada a um gerador elétrico.
- II. Suporte de bicicleta – estrutura para manter a bicicleta estática, permitindo que a roda traseira gire livremente quando pedalada.
- III. Dínamo (gerador elétrico) – responsável por converter a energia mecânica das pedaladas em energia elétrica. Foi acoplado à roda traseira para captar o movimento de rotação.
- IV. Fios elétricos – utilizados para conduzir a energia gerada pelo dínamo até os painéis de demonstração.
- V. Painéis de demonstração – construídos para apresentar os efeitos da energia gerada, compostos por:
 - a. Painel 1: Fitas de LED azul e vermelha, para ilustrar a variação na demanda energética entre cores distintas.
 - b. Painel 2: Lâmpada LED e lâmpada halógena, ambas de 12V, para comparação de eficiência luminosa.
- VI. Multímetro – utilizado para medir a tensão e corrente geradas durante o experimento, permitindo uma quantificação aproximada da energia produzida.
- VII. Ferramentas diversas – chaves de fenda, alicates e outros instrumentos para montagem e ajustes dos componentes elétricos e mecânicos.

Procedimento Experimental

A oficina foi conduzida de forma dinâmica e interativa, permitindo que os participantes experimentassem, na prática, a conversão de energia mecânica em elétrica. Inicialmente, a bicicleta foi posicionada sobre um suporte, garantindo que a roda traseira pudesse girar livremente sem deslocamento. Um dínamo foi acoplado à roda para captar o movimento gerado pelas pedaladas e convertê-lo em eletricidade. Os fios elétricos conectaram o dínamo aos painéis de demonstração, onde estavam instaladas as lâmpadas e as fitas de LED que ilustrariam os diferentes consumos energéticos.

Antes da experimentação, os facilitadores apresentaram uma breve explicação teórica sobre conversão e eficiência energética, destacando a importância do tema para o uso consciente da eletricidade e a adoção de tecnologias sustentáveis. Após essa introdução, os participantes foram convidados a pedalar e observar os efeitos da energia gerada nos dispositivos conectados. Durante a atividade, foram feitas duas análises principais: a primeira focou na diferença de consumo entre as fitas de LED azul e vermelha, permitindo que os participantes percebessem que a fita vermelha acendia com menor esforço, enquanto a azul exigia maior potência para funcionar. A segunda análise comparou o comportamento da lâmpada LED e da lâmpada halógena, demonstrando que a lâmpada halógena demandava um esforço muito maior para produzir iluminação semelhante à da lâmpada LED, evidenciando a superioridade do LED em termos de eficiência energética.

A interação com os alunos do ensino médio, durante a XVII Semana do IME, tornou a atividade ainda mais enriquecedora. Como mostrado na Figura 2, os participantes se envolveram ativamente no experimento, discutindo os conceitos de conversão de energia e eficiência energética com base na experiência prática.

Figura 2. Oficina em andamento na UERJ com alunos do Ensino Médio durante a XVII Semana do IME



Fonte: Arquivo pessoal dos autores, 2025.

A experimentação prática proporcionou uma compreensão mais aprofundada sobre os processos de conversão de energia, permitindo que os participantes percebessem de forma concreta a relação entre esforço físico e consumo elétrico. A oficina despertou questionamentos sobre o uso de tecnologias mais eficientes e sustentáveis, estimulando reflexões sobre o impacto da escolha de diferentes dispositivos no dia a dia.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados observados durante a oficina Bicicleta Energia demonstraram, de maneira prática, o impacto da

conversão de energia e a importância da eficiência energética. A interação direta dos participantes com o sistema de geração possibilitou uma compreensão mais intuitiva sobre como a energia mecânica das pedaladas é transformada em eletricidade e como diferentes dispositivos consomem essa energia de maneira distinta.

Durante a atividade, a primeira análise realizada foi a comparação entre as fitas de LED azul e vermelha. Os participantes perceberam que a fita vermelha acendia com menor esforço, enquanto a azul exigia uma pedalada mais intensa para se iluminar. Essa diferença ocorre devido às propriedades elétricas dos LEDs de diferentes cores. O LED azul, por exemplo, opera com uma tensão de acionamento maior do que o LED vermelho, o que implica um maior consumo energético. Essa observação gerou discussões sobre as variações no consumo de energia entre diferentes tecnologias e cores de luzes, permitindo que os participantes relacionassem o fenômeno com aplicações práticas, como a escolha de dispositivos de iluminação mais eficientes. A segunda análise envolveu a comparação entre a lâmpada LED e a lâmpada halógena. Muitos participantes relataram surpresa ao perceber que a lâmpada halógena demandava um esforço significativamente maior para produzir iluminação semelhante à da lâmpada LED. Esse resultado reforça um princípio fundamental da eficiência energética: a lâmpada LED converte uma fração muito maior da energia elétrica em luz, enquanto a lâmpada halógena dissipa grande parte da energia em forma de calor. Esse aspecto foi essencial para consolidar a discussão sobre consumo energético e impacto ambiental, destacando a importância da substituição de lâmpadas menos eficientes por tecnologias mais econômicas e sustentáveis.

Além dos aspectos técnicos, a abordagem pedagógica da oficina mostrou-se eficaz para a aprendizagem dos participantes. A experiência prática permitiu que conceitos abstratos fossem visualizados de maneira concreta, favorecendo a aprendizagem ativa. O envolvimento dos participantes e a possibilidade de experimentação direta contribuíram para um maior engajamento e

assimilação dos conceitos. Além disso, as discussões posteriores indicaram que a atividade incentivou reflexões sobre o impacto ambiental e econômico das escolhas energéticas no dia a dia, reforçando a importância do uso consciente da eletricidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A oficina Bicicleta Energia proporcionou uma abordagem interativa e prática para o ensino de conversão de energia e eficiência energética. A experiência permitiu que os participantes visualizassem, em tempo real, como a energia mecânica das pedaladas é transformada em eletricidade e como diferentes dispositivos consomem essa energia de maneiras distintas. A comparação entre lâmpadas LED e halógenas, bem como a variação no consumo das fitas de LED coloridas, reforçou a importância de optar por tecnologias mais eficientes.

Além do aprendizado conceitual, a oficina estimulou reflexões sobre o impacto ambiental do consumo energético, promovendo maior conscientização sobre a necessidade de escolhas sustentáveis. A continuidade desse projeto em outros ambientes educacionais pode ampliar seu impacto, incentivando um uso mais consciente da energia. Como sugestão para futuras edições, a inclusão de medições quantitativas da energia gerada e consumida pode enriquecer ainda mais a análise, proporcionando dados mais precisos para discussão.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro FAPERJ pelo suporte financeiro ao projeto, processo SEI-260003/015892/2021.

REFERÊNCIAS

BORGES, C. C.; DICKMAN, A. G.; VERTCHENKO, L. **Uma aula sobre conversão de energia utilizando bicicleta, motor, alternador e lâmpada**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 40, 2017.

DOS SANTOS, R. M.; DE SÁ RODRIGUES, M.; CARNIELLO, M. F. **Energia e sustentabilidade: panorama da matriz energética brasileira**. Scientia: Revista Científica Multidisciplinar, v. 6, n. 1, p. 13-33, 2021.

PAULIELLO, R. J.; MOREIRA, J. R. S. **Análise técnica do aproveitamento eólico e solar para a conversão em energia elétrica**. 2006. 68 f. (Trabalho de Conclusão de Curso) Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

SCHERER, L. A. et al. **Fonte Alternativa de Energia: energia solar**. Anais do XX Seminário Interinstitucional de ensino, pesquisa e extensão, 2015.

OFICINA DE PRODUÇÃO DE REPELENTES À BASE DE PRODUTOS NATURAIS: POPULARIZAÇÃO DA QUÍMICA NUMA ABORDAGEM CTS (CIÊNCIA, TECNOLOGIA E SOCIEDADE)

Andressa Muniz^{a,1}, Monique Gonçalves^{a2}

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: A valorização do conhecimento popular nos currículos traz benefícios e gera maior interesse em relação à ciência por parte dos alunos. A “Oficina de Produção de Repelentes à base de Produtos Naturais” traz a proposta da popularização científica, com temas pertinentes à área da saúde, no combate de vetores de doenças, e resgata práticas dos povos originários e seus saberes. A abordagem do conhecimento popular ultrapassa fronteiras da sala de aula, e faz do estudante protagonista da aprendizagem.

Palavras-chave: Repelentes; produtos naturais; ensino de Química; popularização científica; letramento e alfabetização científica.

INTRODUÇÃO

Um país como o Brasil, com tantas peculiaridades e pluralidades climáticas e geográficas, abriga uma diversidade de insetos e plantas. Além das espécies nativas e cultivadas para fins comerciais, para consumo interno e exportação, historicamente muitas espécies vegetais foram introduzidas por colonizadores e imigrantes, sendo responsáveis pela introdução de espécies exóticas de predadores fitófagos.

¹ andressa.smuniz@gmail.com.

² professoramoniquegoncalves@gmail.com.

Durante muitas décadas o Brasil teve sua economia baseada no setor primário de produção e, ainda hoje, ocupa uma posição de destaque no abastecimento mundial de cereais, frutas e outros produtos de origem vegetal sendo, portanto, o controle de pragas nativas ou exóticas um desafio que persiste e tem se agravado ano após ano.

Um fato preocupante que assombra o estado do Rio de Janeiro, principalmente no verão, é a alta incidência de filebólitos como o *Aedes aegypti*, que introduziram epidemias como a Dengue, Zika, Chikungunya e a perigosa Febre Amarela. Alertar a população em relação a esse grave problema de saúde pública também é dever da escola.

Na Antiguidade utilizava-se sais inorgânicos de arsênio como repelentes no controle de pragas; os chineses, a cerca de 2000 anos, faziam uso das piretrinas isoladas do crisântemo como importante forma de repelente natural; com a chegada dos repelentes industriais passamos a ficar expostos a uma série de produtos e substâncias químicas, com nomes desconhecidos nos rótulos, danosas às crianças, pessoas alérgicas e animais domésticos (De Souza Guinati *et al.*, 2014).

Um aspecto que chama atenção é que a população indígena brasileira também sofria com a infestação de mosquitos, o que fez com que desenvolvessem e empregassem produtos naturais como forma de prevenção, após a observação do comportamento dos animais, que se esfregavam em determinadas plantas, como andiroba e citronela e assim, não eram picados por mosquitos, como apontado pelo pesquisador Djalma Marques (Meireles, 2015).

Contraopondo os repelentes industriais e aproveitando a diversidade da fauna brasileira, Furtado *et al.* (2005) determinaram o potencial larvicida de espécies de plantas na forma de óleo essencial contra as larvas de *A. aegypti*, selecionando assim plantas encontradas no Ceará e que deveriam apresentar ao menos uma das seguintes características: atribuições de propriedades repelentes segundo credence popular, ação inseticida e atividade terapêutica, neste caso possuindo a vantagem de serem benéficas

ao homem, na qual encontraram resultados positivos para diversas espécies, entre elas a citronela e o limão.

A valorização de práticas dos povos originários evidencia a importância da etnofarmacobotânica, e de se manter preservados os saberes populares, que vem se perdendo em função de boa parte da transmissão ser feita apenas de forma oral, pois, segundo Muniz e Gonçalves (2018), *as tradições e o conhecimento popular sempre fizeram com que gerações sobrevivessem à custa de conhecimentos práticos e tradições acumuladas ao longo do tempo, sem uma base científica concreta, como os saberes transmitidos de geração em geração pelas pessoas mais idosas da família, o que chamamos de 'coisas de avó'.*

A abordagem de conhecimentos populares é uma temática em que dependendo do interesse do ouvinte, pode ultrapassar as fronteiras e os tornar mais próximos da família, ao perceber que os saberes são concretos e importantes.

Sendo assim, o ensino de Ciências ao ser associado com o conhecimento hereditário, além de valorizar os saberes populares, oferece a possibilidade de melhor assimilação por parte dos estudantes em relação ao conteúdo científico e ainda, torna o ouvinte o protagonista da aprendizagem, uma vez que o mesmo se identifica com o que é ensinado, por fazer parte da vivência abordada, o que pode contribuir para uma prática educativa mais significativa e exemplificada (Muniz e Gonçalves, 2018).

Desta forma, uma série de componentes envolvendo a misturas de produtos naturais e de baixo custo pode ser utilizada como alternativa a repelentes sintéticos, sendo de fácil preparo e reprodução, seguro para o uso doméstico e um facilitador ambiental, uma vez que cascas de cítricos que seriam descartadas sem preparo prévio podem ser agora colocadas sem problemas em composteiras.

As oficinas propostas sugerem o emprego da experimentação com os discentes para a divulgação da química via elaboração de repelentes à base de produtos naturais, com materiais de baixo custo, como alternativas a repelentes industrializados, sendo de fácil preparo e seguro para o uso

doméstico. O projeto alerta sobre as doenças cujos vetores são os insetos, no caso o mosquito *Aedes aegypti*, na transmissão da dengue, da febre Chikungunya e do vírus Zika.

O SABER POPULAR VERSUS O SABER CIENTÍFICO

Com a evolução da história, a humanidade construiu conhecimentos e desenvolveu, em suas práticas diárias, uma ciência própria que Borda (1984, *apud* Kovalski *et al*, 2011) denomina “*conhecimento prático, empírico, que ao longo dos séculos tem possibilitado, enquanto meios naturais diretos, que as pessoas sobrevivam, criem, interpretem, produzam e trabalhem*”.

Entretanto, existem diferentes definições e considerações sobre os saberes populares. Para Marconi e Lakatos (2003), o conhecimento vulgar ou popular é “*geralmente típico de camponês, transmitido de geração para geração por meio da educação informal e baseado em imitação e experiência pessoal*”. Já para Chassot (2006, *apud* Kovalski *et al*, 2011), o saber popular “*é aquele que detém, socialmente, o menor prestígio, isto é, o que resiste a menos códigos*” e acrescenta que, “*popular pode significar vulgar, trivial, plebeu. Talvez devêssemos recordar que este saber popular, em algum tempo, foi/é/será um saber científico*”.

Com esses vários conceitos é notável que a valorização dos conhecimentos populares de um determinado grupo é muito importante, pois, além de resgatarmos os saberes quase esquecidos no tempo, proporcionam também o fortalecimento e a difusão destes conhecimentos para a sociedade, criando uma interface que vêm a ser muito útil, principalmente no ensino das ciências em si.

Chassot (2006) ilustra isso na seguinte passagem, na qual o autor resgata tais saberes e técnicas utilizadas por pessoas simples, mas que possuem um valor inestimável:

[...] O pescador solitário, que encontramos em silenciosas meditações, sabendo onde e quando deve jogar a tarrafa, também tem saberes importantes. A lavadeira, que sabe escolher a água para os lavados, tem os segredos para remover manchas mais renitentes ou conhece as

melhores horas de sol para o coaro. A parteira, que os anos tornaram doutora, conhece a influência da lua nos nascimentos e também o chá que acalmara as cólicas do recém-nascido. A benzedeira não apenas faz rezas mágicas que afastam o mau-olhado, ela conhece chás para curar o cobreiro, que o dermatologista diagnostica como herpes-zoster. O explorador de águas, que indica o local propício para se abrir um poço ante o vergar de sua forquilha de pessegueiro, tem conhecimentos de hidrologia que não podem ser simplesmente rejeitados (Chassot, 2006).

Por muito tempo, o conhecimento não científico foi ignorado pelos cientistas, porém após várias observações e pesquisas, esse cenário tem mudado e hoje temos a valorização e interesse por esses saberes populares, surgindo a cada dia, novas alternativas e inserção desses conhecimentos no saber científico. Baseado em tais considerações e nos estudos realizados nas últimas décadas a respeito do conhecimento popular, cada vez mais observamos a importância destes saberes para o nosso próprio benefício, conforme afirma Elisabetsky (1987):

A etnofarmacologia permite, portanto, o desenvolvimento de medicamentos sem o custo da metodologia industrial. Para isso, é de fundamental importância a informação coletada junto a população usuária a respeito do uso da planta. Somente assim poder-se-á racionalizar os estudos farmacológicos e químicos subsequentes (Elisabetsky, 1987).

Essa população citada por Elisabetsky são os povos originários, quilombolas, moradores de cidades do interior e principalmente, os nossos anciões, em especial as 'avós', que para toda (ou quase toda) enfermidade, têm uma solução eficaz, principalmente com o uso de produtos naturais. E a medicina popular é um exemplo que tem ganhado atenção pela quantidade de informações que oferece ao saber científico, na qual a própria indústria farmacêutica é fruto da associação desse saber popular com a ciência moderna.

O conhecimento científico até ser incorporado pela ciência tem que ser comprovado, passando por inúmeras experimentações

e testes estatísticos. De modo geral, o conhecimento científico não é aplicado aos saberes tradicionais/populares, uma vez que estes são mais flexíveis e tolerantes, pois podem acolher, com a mesma intensidade, explicações diversas de um mesmo fenômeno, por um mesmo grupo de pessoas ou comunidade (Cunha, 2007).

O ensino das ciências que os alunos estão habituados a ver é algo que sempre parece muito distante de um contexto comum. Esse ensino, na concepção de Mortimer (1998), *“tem reforçado a visão da ciência como algo estático, como um conjunto de verdades imutáveis, de estruturas conceituais congeladas no tempo”*, em que a culpa desta situação é decorrente da

falta de diálogo [...] entre a linguagem científica e a linguagem cotidiana, entre a realidade criada pela ciência, e a realidade da vida cotidiana, entre a teoria científica e a prática dos fenômenos, entre os princípios científicos e os contextos sociais e tecnológicos em que eles se materializam. (Mortimer, 1998).

Sendo assim, a escola deve ser um ambiente que possibilite o diálogo e troca de conhecimento entre aluno e professor, onde por meio da troca de informações, seja possível valorizar o conhecimento prévio dos alunos e investigar suas dificuldades e a partir desses pontos, construir o conhecimento científico.

Entretanto, em grande parte das vezes, apenas o conhecimento científico é ensinado nas escolas, onde se observa a ausência ou desprezo pelas outras formas de saber que são externas. Esse fato pode estar relacionado à própria falta de interesse das instituições em incorporar esses outros conhecimentos ao seu currículo e também a falta de preparo por parte dos professores, que em muitos dos casos não aprenderam dessa forma, ao ingressar na faculdade também não tiveram esse contato e ao concluir a graduação, alguns não prosseguem com uma formação posterior, o que torna ainda mais difícil a aplicação e aprendizado por parte desses profissionais por metodologias não tão usuais.

Para isto, Costa (2008) argumenta que os professores devem reconhecer os saberes populares “*como valiosos no processo de ensino-aprendizagem, os quais serão acessados pelo contato com a realidade social dos alunos*”. Apesar desses vários estudos e comprovações, o que ainda se presencia nas escolas é a transmissão do conhecimento de maneira tradicional aos alunos, sem qualquer tipo de diálogo ou questionamento, o famoso falante-ouvinte. Chassot (2002) defende que hoje não se pode mais conceber propostas para um ensino de ciências sem incluir nos currículos componentes que estejam orientados na busca de aspectos sociais e pessoais dos estudantes.

Uma maneira de abordar o conhecimento popular em sala de aula ou projetos externos é através da introdução de temas cotidianos à população onde a escola está inserida, destacando o caráter científico incluso em tais temas. Face ao exposto, o emprego de produtos químicos naturais e produtos químicos sintéticos corriqueiros a estas populações são exemplos de temas que permitem esta abordagem.

REPELENTE NATURAIS

Desde a Antiguidade existe a preocupação com o resgate e o entendimento do conhecimento referente ao uso que diferentes povos fazem dos elementos de seu ambiente natural, com destaque para as plantas medicinais. E as informações sobre esses recursos foram transmitidas ao longo dos tempos e gerações, o que garantiu a preservação dos saberes populares (Brandelli e Monteiro, 2017).

Na busca por um produto que afastasse mosquitos, mas sem o uso de aditivos químicos que pudessem ser tóxicos, os pesquisadores naturalistas Djalma Marques e Fátima Fonseca encontraram em aldeias indígenas a chave para a questão, através da utilização de plantas como alecrim, cravo, citronela e andiroba pelos mesmos, na forma de óleos (Meireles, 2015).

Conforme apresentado por Stefani *et al.* (2009), os óleos naturais são os mais antigos repelentes que se tem conhecimento, baseando-se em essências de ervas, frutas cítricas, citronela, coco,

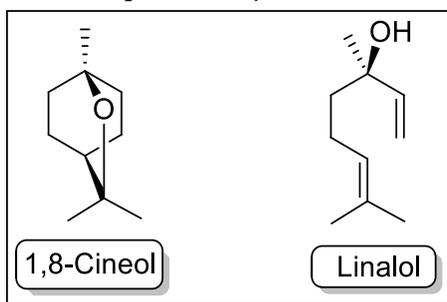
soja, eucalipto, cedro, gerânio, hortelã, melissa, entre outros, e têm sido usados por séculos, com eficácia razoável. Segundo Affonso *et al.* (2012), os óleos derivados de produtos naturais que possuem os maiores potenciais como repelentes de insetos são os de citronela, cravo, verbena, cedro, lavanda, pinho, canela, alecrim, manjeriço, pimenta e pimenta da Jamaica.

A fim de aparelhar a discussão e facilitar o manuseio e a aquisição pelo professor, dentre as plantas que possuem poder repelente, escolheu-se o alecrim, a canela, o cravo da Índia, os cítricos (laranja e limão) e a citronela como objetos de estudo, devido a fácil acessibilidade e baixo custo.

Alecrim - *Rosmarinus officinalis*

Planta de origem europeia, própria das regiões quentes, com aplicações culinárias, cosméticas e medicinais conhecidas desde a Antiguidade, que foram largamente difundidas durante a Idade Média e a Renascença (Almeida, 1983). O óleo essencial poderá apresentar os seguintes compostos: canfeno, 1,8-cineol (eucaliptol), cânfora, acetato de bornila, borneol, β -pineno, β -mirceno, limoneno, p- cimenol, α - terpinol e verbenona (Wonffenbüttel, 2016), no qual os principais compostos são o α -pineno (14,9%), 1,8-cineol (7,43%) e linalol (14,9%), (Gachkar *et al.*, 2007), no quais os compostos majoritários estão representados na Figura 1:

Figura 1. Compostos majoritários do Alecrim



Fonte: Autoras, 2025. Estruturas montadas no programa *ChemBioDraw*.

O alecrim foi usado como ingrediente para a produção de um repelente bovino, já que o gado leiteiro sofre influência em sua produção por diversos fatores, entre eles estão a ação de ectoparasitas como *Haemato biairritans* (mosca-dos-chifres) e *Rhipicephalus* (*Boophilus*) *microplus* (carrapato bovino) que causam estresse, gerando baixa produtividade, perda de peso e irritação (Duarte *et al.*, 2018).

Os autores produziram de forma alternativa e economicamente viável um repelente natural à base de alecrim, arruda, citronela e hortelã, como alternativa aos produtos químicos existentes no mercado que causam prejuízos ao meio ambiente, alto custo de combate e, em longo prazo, resistência ectoparasitária. Após testes experimentais com os ectoparasitos através de biocarrapaticidograma, além de comparação das fórmulas já existentes com a composição das plantas repelentes, obtiveram eficácia significativa no controle e combate desses parasitas. Entretanto, relataram que os produtores por buscarem facilidade, continuaram a utilizar o produto químico convencional.

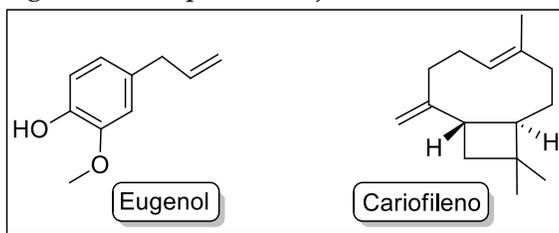
Canela – *Cinnamomum zeylanium*

No Antigo Testamento já se faz menção da canela como perfume e óleo santo utilizado por Moisés no Tabernáculo; em 500 a.C., Hipócrates escreveu sobre a importância de suas propriedades medicinais, entre elas propriedades adstringentes e carminativas (reduzoras dos gases intestinais), além do tratamento de resfriados e bronquites (Almeida, 1983).

Segundo estudos de Jumbo (2013), o óleo essencial de canela, composto majoritariamente por eugenol (93 %) e o sesquiterpeno β -cariofileno (7)% (Figuras 2), confirmou que:

o uso dos óleos essenciais de cravo e canela pode vir a ser uma alternativa viável no controle de insetos-praga de produtos armazenados, constituindo-se numa alternativa para a proteção de grãos de feijão em pequena escala, reduzindo o risco de possíveis intoxicações para o produtor e o consumidor dos grãos (Jumbo, 2013, p.31).

Figura 2. Compostos majoritários da Canela.



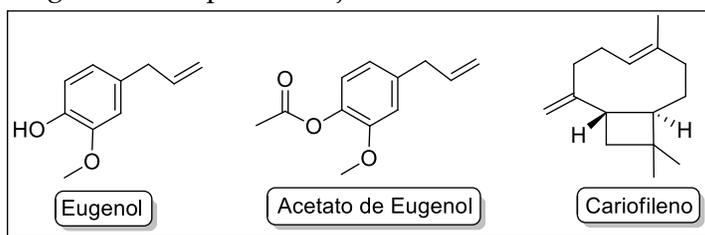
Fonte: Autoras, 2025. Estruturas montadas no programa ChemBioDraw.

Cravo da Índia – *Eugenia aromática*, *Syzygium aromaticum*

Uma das primeiras especiarias mencionadas nos antigos documentos chineses, o Cravo da Índia era apreciado por gregos e romanos por suas propriedades medicinais e desde o século IV seu uso era extensivo a toda a Europa, importado do Oriente. Uma das principais “especiarias” que levaram Portugal a se aventurar no mar e descobrir o Brasil. Está aclimatado no país sendo facilmente encontrado desde a Amazônia até São Paulo, onde só floresce em regiões de climas tropicais, próximas ao mar (Almeida, 1983).

Silvestri *et al.* (2010) obtiveram o óleo e analisaram o mesmo, na qual a composição química do óleo essencial, realizada por CG/EM mostrou o eugenol como composto majoritário (Figura 3), além de β -cariofileno e acetato de eugenol.

Figura 3. Compostos majoritários do Cravo da Índia.



Fonte: Autoras, 2025. Estruturas montadas no programa ChemBioDraw.

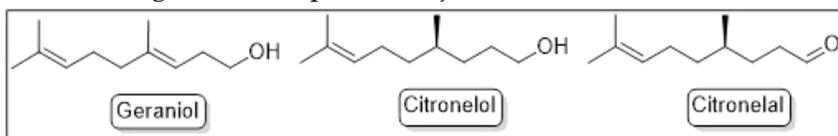
Segundo relato de Affonso *et al* (2012), foi detectada a atividade acaricida e larvicida do eugenol contra o *Aedes aegypti*,

obtendo a maior capacidade repelente entre os 38 óleos essenciais testados, na qual a avaliação de repelência é feita preferencialmente em seres humanos, devido às particularidades da pele humana.

Citronela – *Cymbopogon nardus*

De acordo com a base da Environmental Protection Agency (EPA), o óleo essencial de citronela possui como alvo repelir insetos e carrapatos, na categoria de biopesticidas que não apresentam riscos ao meio ambiente (Wonffenbüttel, 2016). Conforme apresentado por Beneti (2009), a citronela é amplamente utilizada como repelente de insetos, apresentando eficácia para o mosquito *Aedes aegypti*. Entre os componentes da citronela, os majoritários são os monoterpenos geraniol, citronelol e o citronelal (Figura 4).

Figura 4. Compostos majoritários da Citronela.



Fonte: Autoras, 2025. Estruturas montadas no programa *ChemBioDraw*.

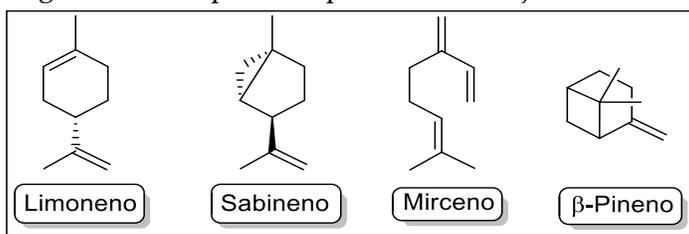
Laranja e Limão – *Citrus sinensis* e *Citrus limon*

As frutas cítricas são as mais cultivadas no mundo, sendo a laranja a principal delas. A produção de laranjas e a industrialização do suco estão concentradas em quatro países, sendo o Brasil o primeiro deles, respondendo por um terço da produção mundial da fruta e quase 50% do suco fabricado. Aproximadamente 70% são processados e 30% vão para o consumo interno (Bizzo *et al.*, 2009).

Em 1983, se estudou pela primeira vez no Brasil os óleos cítricos quanto a sua qualidade, composição e características físico-químicas, com o objetivo de se obter uma padronização e, por conseguinte, valorização no mercado internacional (Almeida, 1983).

O óleo essencial de laranja (*Citrus sinensis*) apresentou como compostos majoritários o limoneno (93 %), mirceno (3 %) e o α -pineno (1 %). Já o limão (*Citrus limon*), apresentou de forma majoritária os compostos: limoneno (66 %), β -pineno (11 %) e sabineno (2 %) (Wonffenbüttel,2016), que estão representados na Figura 5:

Figura 5. Principais compostos da laranja e do limão.



Fonte: Autoras, 2025. Estruturas montadas no programa *ChemBioDraw*.

Nos estudos de Araújo Júnior (2009), além de atividade inseticida, os óleos de cítricos apresentaram potencial microbiano contra fungos fitopatogênicos.

METODOLOGIA

A primeira oficina foi desenvolvida com estudantes da 1ª e 2ª séries do Ensino Médio, no ano de 2017, no CIEP 201 Aarão Streinbruch, situado no bairro São Bento, em Duque de Caxias, RJ, durante o ano de 2017, em função de uma necessidade local – além de muito arborizada, ao lado da escola existe despejamento de esgoto a céu aberto, o que contribui para a presença de alguns vetores, e no nosso caso, mosquitos.

No primeiro momento, houve a proposta da atividade e foi pedido para que os estudantes se organizassem em grupos e se dividissem para levar cascas de cítricos, assim como algumas especiarias, como canela em pau, cravo, alecrim. Foi falado para as turmas da ação repelente da citronela (Wonffenbüttel, 2016) e um dos estudantes lembrou que a avó possuía a mesma em seu quintal.

Também foi pedido que, levassem embalagem vazias e limpas para reutilizarmos quando os repelentes estivessem prontos. Para a segunda aula, os estudantes prepararam os macerados, utilizando o gral e pistilo, álcool etílico e álcool de cereais como solventes para a extração a frio, colocando os mesmos em frascos âmbar, onde ficaram em repouso por 15 dias (período de extração). Após os 15 dias, foram feitas as filtrações dos substratos. Cada aluno preparou seu próprio repelente, com as proporções de cada óleo determinadas pelos mesmos, criando assim vários *blends* (misturas).

De forma se tornar viável a preparação dos repelentes, o processo foi realizado em duas etapas: na 1ª etapa (em laboratório), prepararam-se os macerados utilizando etanol, como solvente para as extrações, onde ficaram em repouso por sete dias (período de extração).

Para a 2ª etapa (Figura 6), os macerados foram filtrados durante as oficinas pelos participantes, onde os mesmos puderam preparar os próprios repelentes, seguindo a ideia de que as proporções de cada óleo seriam determinadas pelos mesmos, criando seus próprios *blends* (misturas).

Figura 6. (a) Extratos filtrados pelos participantes. (b) Materiais utilizados.



(a)

(b)

Fonte: Autoras, 2025.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A primeira oficina foi realizada durante as aulas de Química, em que, na ocasião em que a atividade foi proposta, muitos discentes lembraram de que suas avós possuíam os temperos/especiarias em suas hortas, o que já representava uma parte significativa na intenção da atividade, ou seja, a química fazendo parte do cotidiano do aluno, o que muito foi defendido na visão do desenvolvimento e aprendizagem na perspectiva histórico-cultural de Vygotsky (1984): *“o aluno só aprende de fato quando há a apropriação do conhecimento”*.

As mesas das salas de aula foram organizadas como se fossem pequenas bancadas, onde na primeira aula se deu início à preparação dos substratos naturais (Figura 7), com a maceração de suas matérias primas (cravo, alecrim, canela, cascas de laranja e limão) em gral e pistilo para posterior adição do solvente, em que para alguns macerados se usou o álcool etílico comercial e em outros, o álcool de cereais), onde foi realizada uma extração a frio (Figura 8).

Figura 7. Estudantes preparando dos substratos naturais.



Fonte: Autoras, 2025.

Figura 8. Extração a frio.



Fonte: Autoras, 2025.

Durante o processo, os estudantes aprendiam os nomes das vidrarias utilizadas, algumas propriedades das substâncias

trabalhadas e foi conversado sobre a história dos repelentes naturais. Uma discente durante o processo notou que *'o frasco com limão estava mais escuro que no início'*, o que fez com que fosse falado o porquê isso ocorre, no qual foi abordado de forma rápida o conceito de oxidação dos ácidos orgânicos presentes na casca do limão – ácido cítrico.

Após duas semanas (período da extração), as misturas foram filtradas, e os estudantes produziram suas próprias fragrâncias (Figura 9) com os óleos essenciais obtidos, pela criação de *blends* (misturas), variando as proporções de forma livre, sem que houvesse um procedimento específico que quantificasse o volume para cada um, prevalecendo como critério, a sensação olfativa.

Figura 9. Parte final do preparo dos repelentes.



Fonte: Autoras, 2025.

A atividade experimental foi recebida de forma muito empolgante pelos estudantes, sendo evidenciado pelo fato de que tiravam fotos durante a atividade para mostrar a familiares/ amigos e na turma de primeiro ano, eles ligaram para que o professor de História viesse à nossa sala para ver os repelentes.

Durante a realização dos experimentos, eles discutiram entre si e disseram que *“essa Química é fácil”*, contrapondo a visão atomística que é vista por muitos como algo difícil de entender, imaginar, e principalmente, aplicar.

Para ilustrar o impacto dos experimentos e a discussão em sala de aula é importante destacar o relato importante de uma das faxineiras após algumas semanas. A mesma comentou que os repelentes que foram deixados no banheiro de fato espantam os mosquitos, além de deixar um perfume agradável ao ambiente. O fato foi corroborado por professoras que também faziam uso do ambiente e que observaram o mesmo fenômeno.

A valorização dos saberes populares se concretizou no momento em que foi percebido um saber científico, fundamentando o mesmo, vinculado a ‘reagentes’ presentes ao cotidiano dos alunos e conforme apontado por Neto (2016) em relação aos saberes populares:

[...] os mestres e mestras do saber são pessoas de cujas experiências de vida e os conhecimentos e saberes que manipulam são reconhecidamente válidos entre os indivíduos das comunidades que a constitui e que as suas ações cotidianas são pautadas no exercício de educar, aconselhar, curar – dentre outras ações – pessoas que estão à sua volta ou que as procuram.

Vale ressaltar que a atividade foi desenvolvida de forma que fosse possível a reprodução fora do ambiente escolar e com um custo baixo, já que cascas de cítricos foram utilizadas no processo (laranja e limão). Durante a oficina, além do preparo dos repelentes, discutiu-se sobre as doenças que são causadas por mosquitos. Além disso, houve alguns relatos de crianças em relação aos repelentes convencionais, no qual uns dos comentários foram: *“Eu já falei para minha mãe não usar aqueles repelentes com cheiro ruim, pois vai matar a nossa calopsita!”*; *“Eu tenho medo do nosso cachorro morrer, o cheiro é muito ruim”*.

As oficinas de produção de repelentes naturais, pelo viés da Alfabetização e Divulgação Científica foram realizadas em feiras de

ciências e eventos científicos/acadêmicos: no evento *Domingo com Ciência* (2019) promovido pela SBPC; durante a Semana de Química do IFRJ, unidade Maracanã, na feira do Conhecimento (2019) (Figura 10); Fundação-Técnico Educacional Souza Marques (FTSM) (2019); na Escola Municipal Rivadávia Correia, localizada no Centro do Rio de Janeiro, na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (2019, 2022 e 2023) (Figura 11); no Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira (2022 e 2023) (Figura 12); na Universidade do Estado do Rio de Janeiro, no evento UERJ SEM MUROS (2022 e 2023) (Figura 13); e no Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro (ISERJ/FAETEC) (2023) (Figura 14); e na Semana do IME (Instituto de Matemática e Estatística da UERJ) (2023 e 2024) (Figura 15).

Figura 10. Oficina de repelentes de produtos naturais na Semana da Química do IFRJ, - unidade Maracanã, em 22/10/2019.



Fonte: Autoras, 2025.

Figura 11. Oficina na Escola Municipal Rivadávia Correia, com turmas do Ensino Fundamental II, em 14/11/2019, na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia.



Fonte: Autoras, 2025.

Figura 12. Oficina de repelentes de produtos naturais, no Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira (2022).



Fonte: Autoras, 2025.

Figura 13. Oficina de repelentes de produtos naturais, na Universidade do Estado do Rio de Janeiro, no evento UERJ SEM MUROS (2023).



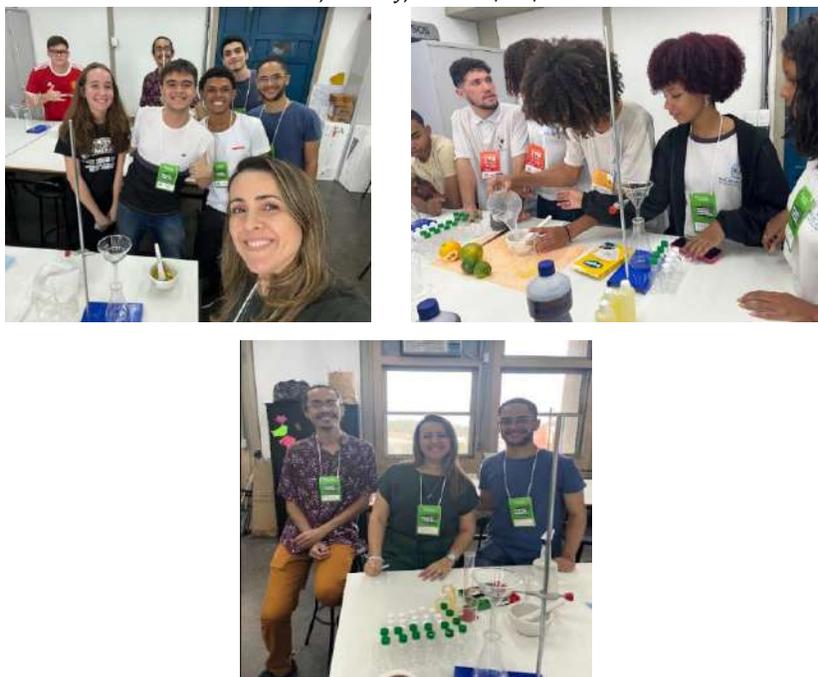
Fonte: Autoras, 2025.

Figura 14. Oficina de repelentes de produtos naturais, no Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro (ISERJ/FAETEC) (2023).



Fonte: Autoras, 2025.

Figura 15. Oficina de repelentes de produtos naturais na Semana do IME, UERJ, em 25/10/2024.



Fonte: Autoras, 2025.

CONCLUSÃO

As oficinas de repelentes à base de produtos naturais apresentaram resultados extremamente satisfatórios em cada espaço escolar ou feira científica, em que foi exposta. O tema *Repelentes Naturais* foi algo que surgiu de uma necessidade do primeiro espaço escolar onde o projeto foi desenvolvido, o CIEP 201 Aarão Streinbruch, situado no bairro São Bento, em Duque de Caxias, RJ, durante o ano de 2017, em turmas da 1^a, 2^a e 3^a séries do Ensino Médio Regular, e gerou bastante impacto extraclasse. Além da imensa empolgação apresentada pelos estudantes, principalmente por terem feito uso de vidrarias, professores do CIEP e as faxineiras da escola relatara que, após algumas semanas de uso dentro da escola, o repelente se mostrou muito bom, uma vez que moscas e mosquitos que eram frequentes no refeitório, copa e banheiros, deixaram de aparecer, agregando assim valor ao trabalho realizado em sala.

Com a contextualização dos exemplos práticos, ampliaram-se os conceitos químicos, no qual a partir do momento em que o discente reconstrói a compreensão por si mesmo e encontra motivos para mudar um conceito pré-estabelecido, sente-se capaz de através da apropriação do saber científico, se tornar um propagador de determinada informação, interferindo assim em sua realidade e/ou ambiente familiar, através da valorização de um conhecimento prévio aprendido em casa.

Sendo assim, os estudantes percebem que a Química não é uma ciência só para pessoas de jaleco branco, cabelos para o alto e cara de maluco, e sim, uma ciência para todos, e o objetivo central do ensino de Química é formar o cidadão, preparar o indivíduo para que ele compreenda e faça uso das informações químicas básicas necessárias para a sua participação efetiva na sociedade tecnológica em que vive.

Um último ponto que vale ser considerado é o fato da importância dos saberes populares e principalmente, a importância em se conhecer a nossa história. Em 02 de setembro de 2018,

ocorreu um trágico incêndio no Museu Nacional, no Rio de Janeiro, que além de ter causado um dano irreparável, consumiu para sempre parte da nossa história, o que nos leva a refletir sobre o quão sublime é a nossa existência e memória, e como perdemos com a diminuição de certos saberes orais, como era muito comum aos povos originários e o povo do campo. *‘Um povo sem memória, é um povo sem história’* (Emília Viotti).

AGRADECIMENTOS

Aos organizadores da Semana do IME, pelo convite; ao DEPEXT, pelas bolsas concedidas aos estudantes; a todos os alunos voluntários do projeto.

REFERÊNCIAS

- AFFONSO, R. da S. *et al.* **Aspectos químicos e biológicos do óleo essencial de cravo da Índia**. Revista Virtual de Química, v. 4, n. 2, p. 146-161, 2012.
- ALMEIDA, C. R. **Coleção Plantas que curam**. São Paulo: Três Livros e Fascículos, 1983.
- ARAÚJO J. C. P. **Composição química e atividade biológica dos óleos essenciais de frutas cítricas**. 2009. 95 f. Dissertação (Mestrado em Química). Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2010.
- BENETI, S. C. **Fracionamento de óleos essenciais em coluna de destilação a vácuo em modo batelada**. 2009. 105 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Alimentos). Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões. Erechim, 2009.
- BIZZO, H. R.; HOVELL, A. M. C.; REZENDE, C. M. **Óleos essenciais no Brasil: aspectos gerais, desenvolvimento e perspectivas**. Química Nova, v. 32, n. 3, p. 588-594, 2009.
- BRANDELLI, C.; MONTEIRO, S. **Farmacobotânica: Aspectos teóricos e aplicação**. Porto Alegre: Artmed, 2017.
- CHASSOT, A.I. **Alfabetização científica: uma possibilidade para a inclusão social**. Revista Brasileira de Educação, n. 21, p. 157-158, 2002.

CHASSOT, A.I. **Para ajudar a diminuir preconceitos**. Educação Unisinos, v. 10, n. 1, p. 78-80, 2006.

COSTA, R. G. de A. **Os saberes populares da etnociência no ensino das ciências naturais: uma proposta didática para aprendizagem significativa**. Didática Sistemática, v. 8, 2008.

CUNHA, A. Proença da. **O emprego das plantas aromáticas desde as antigas civilizações até o presente**, 2007. Disponível em: [http://www.oleoessencial.com.br/OEMPREGODASPLANTAS\[1\].pdf](http://www.oleoessencial.com.br/OEMPREGODASPLANTAS[1].pdf)
Acesso em: 14 dez. 2024.

DUARTE, K. S. *et al.* **Uso de repelente natural para ectoparasitas de bovinos de leite na EEEPDP**. Anais da 12ª Mostra de Iniciação Científica Júnior-Congrega Urcamp 2017, n. 12, p. 87-88, 2018.

ELISABETSKY, E. **Etnofarmacologia de algumas tribos brasileiras**. In: RIBEIRO, Berta (Org.). Suma etnológica brasileira. São Paulo: Vozes: FINEP, v.1: Etnobiologia, 1987.

FURTADO, R. *et al.* **Larvicidal Activity of Essential Oils against Aedes aegypti L. (Diptera: Culicidae)**. Neotropical Entomology, v. 34, n. 5, p. 843-847, 2005.

GACHKAR, L. *et al.* **Chemical and biological characteristics of Cuminum cyminum and Rosmarinus officinalis essential oils**. Food chemistry, v. 102, n. 3, p. 898-904, 2007.

JUMBO, L. O. V. **Atividade inseticida e de repelência de óleos essenciais de cravo e canela sobre o caruncho Acanthoscelides obtectus (Say)**. 2013. 44 f. Dissertação (Mestrado em Entomologia). Universidade Federal de Viçosa, 2013.

KOVALSKI, M. L.; OBARA, A. T.; FIGUEIREDO, M. C. **Diálogo dos saberes: o conhecimento científico e popular das plantas medicinais na escola**. VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências–ENPEC, 2011. Disponível em: <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/viiienpec/resumos/R1647-1.pdf>. Acesso em: 02 jan. 2025.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. Fundamentos de metodologia científica. São Paulo: Atlas, 2003.

MORTIMER, E. F. **Sobre chamus e cristais: a linguagem cotidiana, a linguagem científica e o ensino de ciências**. In: CHASSOT, A. (Org.). Ciência, ética e cultura na educação. São Leopoldo: UNISINOS, 1998.

- MEIRELES, M. **Dermatologista pernambucano cria repelente natural contra o Aedes**. G1 PE, 2015. Disponível em: <https://g1.globo.com/pernambuco/noticia/2015/12/dermatologista-pernambucano-cria-repelente-natural-contra-o-aedes.html>. Acesso em: 10 jan. 2025.
- MUNIZ, A.; GONÇALVES, M. **Elementos do saber popular fazendo-se saberes científicos no ensino de química na educação básica**. Encontro de debates sobre o ensino de química, Brasil, set. 2018. Disponível em: <http://edeq.com.br/submissao/index.php/edeq/38edeq/paper/view/643/132>. Data de acesso: 15 fev. 2025.
- NETO, F. **Descolonizar a educação: os mestres dos saberes populares e tradicionais no contexto da formação cultural**. Interfaces Científicas – Educação. Aracaju, v.4, n. 3, p. 31-42, 2016.
- SILVESTRI, J. D. *et al.* **Perfil da composição química e atividade antibacteriana e antioxidante do óleo essencial do cravo-da-índia (*Eugenia caryophyllata* Thunb)**. Ceres, v. 57, n. 5, 2010.
- DE SOUZA GUINATI, B. G.; GONÇALVES, M. X.; REED, E. **Inseticidas Domésticos- Composição química, riscos e precauções na sua manipulação**. Estudos, v. 41, n. 1, p. 86-94, 2014.
- STEFANI, G. P. *et al.* **Repelentes de insetos: recomendações para uso em crianças**. Revista Paulista de Pediatria, v. 27, n. 1, p. 81-89, 2009.
- WOFFENBÜTTEL, A. N. **Base da química dos óleos essenciais e aromaterapia: Abordagem técnica científica**. Belo Horizonte: Editora Laszlo, 2016.
- VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

PROPOSIÇÃO DE RECICLAGEM DE SEDIMENTOS MARINHOS NA BAÍA DE SEPETIBA: UMA ESTRATÉGIA SUSTENTÁVEL DE SUSTENTABILIDADE AMBIENTAL E SOCIAL

Graziela dos Santos Ferreira^{a,1}, Jariane Maria Santos Souza^{a,2}, Alessandra Santos Braga^{a,3}, Pedro Nasor Felisberto dos Santos^{a,4}, Sérgio Cardoso Nogueira Filho^{a,5}, Douglas Eloy dos Santos^{a,6}, Elisabete dos Santos Vieira^{a,7}, Patrícia dos Santos Matta^{a,8}

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: A reciclagem de sedimentos marinhos na Baía de Sepetiba visa mitigar impactos ambientais e promover o desenvolvimento sustentável. A proposta envolve dragagem sustentável, processamento e reutilização dos sedimentos na construção civil. A gestão integrada inclui autoridades e comunidade local, além do monitoramento da qualidade da água. A iniciativa fortalece a economia local e preserva a biodiversidade, reduzindo a poluição e recuperando áreas degradadas.

Palavras-chave: Impacto ambientais; sedimentos marinhos; construção civil; economia local; baía de Sepetiba.

¹ kriokgraziuerj@gmail.com.

² jrnjr1234@gmail.com.

³ alessandrabragamagalhaes@gmail.com.

⁴ nasor.pedro@graduacao.uerj.br.

⁵ serginho.sergionogueirafilho0@gmail.com.

⁶ douglaseloycont@gmail.com.

⁷ elis.engenhariauerj@gmail.com.

⁸ patricia.matta@uerj.br.

INTRODUÇÃO

A Baía de Sepetiba é uma área costeira estratégica para o estado do Rio de Janeiro, abrangendo atividades como pesca, aquicultura, turismo e transporte marítimo. Contudo, o depósito de sedimentos associado à poluição industrial e urbana compromete sua navegabilidade e biodiversidade. Segundo dados recentes da Agência Nacional de Águas (ANA), a região é responsável por uma elevada carga de poluentes, agravando os impactos ambientais e sociais.

O aumento populacional e a intensificação das atividades econômicas nas últimas décadas ampliaram os desafios. Projeções indicam que, em 2020, cerca de 1,9 milhão de pessoas residiam na bacia hidrográfica da baía, gerando mais de 519 mil m³ diários de efluentes sanitários. Esses fatores tornam urgente a adoção de práticas sustentáveis para mitigar os impactos ambientais.

Diante disso, este trabalho propõe uma abordagem integrada para a reciclagem dos sedimentos marinhos da Baía de Sepetiba, alinhada aos princípios da economia circular. A solução proposta combina dragagem sustentável com a reutilização de sedimentos tratados em aplicações industriais, promovendo o desenvolvimento sustentável da região.

METODOLOGIA

A pesquisa será conduzida em três etapas principais, detalhadas a seguir:

Caracterização dos sedimentos

Serão coletadas amostras em diferentes pontos da baía, abrangendo áreas próximas a indústrias e zonas urbanas. As análises incluirão:

- Granulometria: Avaliação do tamanho das partículas para identificar aplicações possíveis.

- Química: Identificação de metais pesados e outros contaminantes.
- Biológica: Verificação da presença de micro-organismos e impacto na saúde humana.

Os resultados dessas análises orientarão as estratégias de dragagem e reaproveitamento, assegurando a viabilidade ambiental do projeto.

Dragagem sustentável

A dragagem será realizada utilizando sistemas de baixo impacto ambiental, como barreiras flutuantes para conter sedimentos e equipamentos que minimizam a ressuspensão de partículas contaminadas.

Reutilização dos sedimentos

Após o tratamento, os sedimentos serão utilizados em três aplicações principais:

- Produção de tijolos cerâmicos, com adição de até 20% de sedimentos.
- Fabricação de cimento e concreto, substituindo parcialmente a areia convencional.
- Recuperação de áreas degradadas, como aterros sanitários.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Caracterização dos sedimentos

As análises realizadas anteriormente por setores competentes, indicaram nos sedimentos da Baía de Sepetiba, alta concentração de areia fina e argila, adequadas para aplicações industriais. Contudo, níveis elevados de metais pesados, como cádmio e chumbo, foram encontrados em áreas próximas a indústrias, exigindo tratamento prévio.

Aplicações industriais

Os testes com tijolos cerâmicos mostraram que a adição de sedimentos melhorou a resistência mecânica, atingindo padrões adequados para a construção civil. No caso do cimento, a substituição parcial da areia reduziu custos e impactos ambientais, sem comprometer a qualidade do produto final.

Impactos ambientais e sociais

A análise das pesquisas gerou benefícios significativos, incluindo:

- Redução de resíduos: Diminuição do volume de sedimentos descartados na baía.
- Melhoria da qualidade da água: Redução de contaminantes e aumento da biodiversidade local.
- Geração de empregos: Envolvimento de comunidades locais na coleta e reaproveitamento dos sedimentos.

Tabela 1. Comparação entre métodos tradicionais e sustentáveis de dragagem.

População, contribuições de esgoto sanitário + água de infiltração e carga orgânica para a bacia hidrográfica contribuinte da Baía de Sepetiba para o ano de 2000 e projeções para os anos de 2010 e 2020.

Ano	População (habitantes)	Contribuições de esgoto sanitário+água de infiltração (m ³ /dia)	Carga orgânica (kg DBO/dia)
2000	1.400.000	378.000	70.000
2010	1.650.000	452.000	89.000
2020	1.900.00	519.000	102.000

Fonte: Comitê Guandu⁹, 2025.

⁹ <https://comiteguandu.org.br/downloads/ARTIGOS%20E%20OUTROS/AVALIACAO%20DA%20POLUICAO%20POR%20ESGOTO%20SANITARIO%20NA%20BAIA%20DE%20SEPETIBA.pdf>.

A bacia hidrográfica que contribui para a Baía de Sepetiba abriga mais de 100 indústrias, formando um dos principais pólos industriais do Estado do Rio de Janeiro. A maioria dessas indústrias é de pequeno e médio porte, com poucas de grande porte. Em relação à poluição, a contribuição orgânica de origem industrial é relativamente baixa, especialmente quando comparada aos níveis de poluição de origem doméstica observados na região. Além disso, as indústrias com maior potencial de gerar esse tipo de carga possuem um bom desempenho ambiental. Portanto, considerando que o foco deste estudo é a poluição orgânica na Baía de Sepetiba, foram levadas em conta apenas as cargas provenientes do lançamento de esgoto doméstico.

A análise sublinha a necessidade urgente de intervenções para melhorar a qualidade da água em Sepetiba, destacando a importância de projetos de despoluição e gestão eficaz de resíduos para mitigar os impactos ambientais adversos e proteger os ecossistemas marinhos locais (Tabela 1).

A persistente má qualidade da água sugere uma contínua introdução de fontes de poluição, possivelmente de esgoto doméstico e industrial não tratado, reforçando a necessidade de um monitoramento rigoroso e de ações corretivas sustentáveis.

A análise da qualificação anual das praias de Sepetiba, com base nos dados consolidados de bacteriologia, revela uma constante preocupação com a qualidade da água ao longo de um extenso período. Utilizando o percentual de boletins próprios (PBP) como métrica, o estudo avalia a proporção de classificações positivas em relação ao total de classificações emitidas anualmente para cada praia, conforme os critérios estabelecidos pela resolução CONAMA 274/2000.

REPERCUSSÕES

Praias de Sepetiba, Recôncavo e Cardo: De 2001 a 2023, estas praias consistentemente apresentaram um percentual de boletins próprios de 0%, indicando uma ausência de períodos em que a

qualidade da água foi considerada adequada para o banho. Interrupção do Monitoramento: Devido à pandemia de COVID-19, o monitoramento foi interrompido em março de 2020 e retomado em março de 2022, resultando em lacunas significativas nos dados coletados durante esse intervalo.

IMPLICAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

As análises indicam que as praias de Sepetiba, Recôncavo e Cardo sofrem com contaminação persistente da água, provavelmente resultante do descarte inadequado de esgoto doméstico e industrial (Instituto Estadual do Ambiente - INEA, 2023). A qualidade insatisfatória da água continua a ser uma ameaça considerável à saúde pública e ao meio ambiente, ressaltando a necessidade imediata de:

- **Melhorias no Saneamento:** Implementação de sistemas de tratamento de esgoto mais eficazes para diminuir a carga de poluentes.
- **Monitoramento Contínuo:** Manter e ampliar os programas de monitoramento da qualidade da água para avaliar a eficácia das medidas corretivas implementadas.
- **Educação e Conscientização:** Programas de educação ambiental para sensibilizar a comunidade sobre a importância de práticas sustentáveis e o impacto do despejo de resíduos.

A recuperação das praias de Sepetiba depende de um esforço colaborativo entre autoridades ambientais, comunidades locais e setores industriais para adotar práticas mais sustentáveis e garantir a saúde dos ecossistemas marinhos.

Estudos apontam que a liberação de Cd e Zn dos sedimentos para a coluna d'água desempenha um papel significativo, sendo favorecida pela decomposição da matéria orgânica e pela formação de complexos solúveis com cloro. Esse processo possibilita que parte do Cd seja transportada para o

oceano, enquanto o Zn tende a permanecer mais fixo nos sedimentos.

A comparação entre a contaminação na Baía de Sepetiba e outras regiões costeiras do Rio de Janeiro, como as lagoas de Itaipu, Saquarema, Maricá e Araruama, destaca um enriquecimento significativo de Cd e Zn na Baía de Sepetiba, demonstrando a necessidade de estratégias específicas de gestão e reciclagem de sedimentos para essa área. De acordo com a tese “Geodinâmica de Cádmio e Zinco na Baía de Sepetiba” (Barcellos, 1995).

Praias de Sepetiba, Recôncavo e Cardo: De 2001 a 2023, estas praias consistentemente apresentaram um percentual de boletins próprios de 0%, indicando uma ausência de períodos em que a qualidade da água foi considerada adequada para o banho. Segundo o Relatório de Qualidade das Águas da Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA, 2023), essas áreas vêm sendo monitoradas devido à persistente contaminação, resultado do descarte inadequado de esgoto doméstico e industrial.

- **Interrupção do Monitoramento:** Devido à pandemia de COVID-19, o monitoramento foi interrompido em março de 2020 e retomado em março de 2022, resultando em lacunas significativas nos dados coletados durante esse intervalo (Organização Mundial da Saúde, 2020). Essa interrupção dificultou a obtenção de dados contínuos, essenciais para a avaliação da eficácia das políticas públicas e das condições ambientais.

IMPLICAÇÕES E RECOMENDAÇÕES

As análises indicam que as praias de Sepetiba, Recôncavo e Cardo sofrem com contaminação persistente da água, provavelmente resultante do descarte inadequado de esgoto doméstico e industrial (Instituto Estadual do Ambiente - INEA, 2023). A qualidade insatisfatória da água continua a ser uma

ameaça considerável à saúde pública e ao meio ambiente, ressaltando a necessidade imediata de:

- **Melhorias no Saneamento:** Implementação de sistemas de tratamento de esgoto mais eficazes para diminuir a carga de poluentes. A necessidade de investimentos em infraestrutura de saneamento é destacada nas **Diretrizes para a Recuperação e Gestão de Zonas Costeiras** do Ministério do Meio Ambiente (MMA, 2023), que apontam para a urgência em desenvolver soluções sustentáveis e tecnicamente viáveis.
- **Monitoramento Contínuo:** Manter e ampliar os programas de monitoramento da qualidade da água para avaliar a eficácia das medidas corretivas implementadas. Conforme o INEA (2023), o monitoramento contínuo é fundamental para detectar mudanças na qualidade da água e assegurar a saúde pública.
- **Educação e Conscientização:** Programas de educação ambiental para sensibilizar a comunidade sobre a importância de práticas sustentáveis e o impacto do despejo de resíduos. Campanhas de conscientização são recomendadas pelo Ministério do Meio Ambiente (2023) como uma ferramenta essencial para envolver a comunidade na preservação ambiental.

A recuperação das praias de Sepetiba depende de um esforço colaborativo entre autoridades ambientais, comunidades locais e setores industriais para adotar práticas mais sustentáveis e garantir a saúde dos ecossistemas marinhos. Estudos apontam que a liberação de Cd e Zn dos sedimentos para a coluna d'água desempenha um papel significativo, sendo favorecida pela decomposição da matéria orgânica e pela formação de complexos solúveis com cloro (Barcellos, 1995). Esse processo possibilita que parte do Cd seja transportada para o oceano, enquanto o Zn tende a permanecer mais fixo nos sedimentos.

A comparação entre a contaminação na Baía de Sepetiba e outras regiões costeiras do Rio de Janeiro, como as lagunas de

Itaipu, Saquarema, Maricá e Araruama, destaca um enriquecimento significativo de Cd e Zn na Baía de Sepetiba, demonstrando a necessidade de estratégias específicas de gestão e reciclagem de sedimentos para essa área (Barcellos, 1995).

A reciclagem de sedimentos marinhos contaminados com cádmio (Cd) e zinco (Zn) representa uma estratégia promissora para mitigar impactos ambientais. Métodos como adsorção, coagulação e precipitação demonstram eficácia na remoção desses metais da coluna d'água. Além disso, a formação de complexos orgânicos e a presença de matéria orgânica são fundamentais na mobilização e remoção dos metais dos sedimentos, proporcionando uma abordagem integrada e eficiente para a recuperação ambiental da Baía de Sepetiba.

Em julho de 2024, moradores de Sepetiba, no Rio de Janeiro, denunciaram o despejo irregular de minério de ferro na região. A reportagem do G1 revelou preocupações com o impacto ambiental e a saúde pública, já que o despejo compromete a qualidade da água e afeta a biodiversidade marinha local. Essas denúncias destacam a urgência de implementar planos de reciclagem de sedimentos marinhos, visando a mitigação dos danos ambientais e a promoção de práticas sustentáveis. A reciclagem pode transformar resíduos em materiais úteis para a construção civil, contribuindo para a recuperação do ecossistema e beneficiando a comunidade local.

Tabela 2. Dados Gerais das Empresas de Construção

Número de empresas ativas	Unidade	174690
Pessoal ocupado em 31/12	Pessoas	2317759
Receita bruta total	Mil Reais	467571613
Receita líquida	Mil Reais	429548875
Total de custos e despesas	Mil Reais	382285175

Fonte: IBGE, 2022.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A reciclagem de sedimentos marinhos é uma solução prática e replicável para os desafios ambientais enfrentados pela Baía de Sepetiba. O trabalho demonstrou que é possível transformar resíduos em recursos valiosos, promovendo a sustentabilidade e o desenvolvimento econômico.

RECOMENDAÇÕES FINAIS

Para ampliar os benefícios do projeto, recomenda-se:

- Investir em tecnologias de tratamento mais avançadas.
- Estimular parcerias entre governos, indústrias e comunidades locais.
- Expandir a aplicação do modelo para outras áreas costeiras do Brasil.

Os Dados gerais das empresas de construção em 2022 (IBGE) mostram como a construção civil é uma grande consumidora de suplementos para se manter ativa.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à UERJ pelo suporte técnico e à Prof^a Patrícia dos Santos Matta pela orientação neste projeto.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO (ANA). **Atlas esgotos: despolição de bacias hidrográficas**. Brasília, 2017.

AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO (ANA). **Relatório de qualidade das águas**. Brasília, 2023.

BARCELLOS, C. **Geodinâmica de cádmio e zinco na Baía de Sepetiba**. 1995. 148 f. Tese (Doutorado em Geoquímica Ambiental) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 1995.

COSTA, L. C. **Estudo de caso bacia hidrográfica da Baía de Sepetiba, Rio de Janeiro**. 2009. Dissertação (Mestrado em Saúde Pública) – Escola Nacional de Saúde Pública, Fundação Oswaldo Cruz, Rio de Janeiro, 2009.

CUNHA, C. L. N.; ROSMAN, P. C. C.; MONTEIRO, T. C. N. **Avaliação da poluição por esgoto sanitário na Baía de Sepetiba usando modelagem ambiental**. Anais do XXVIII Congresso Interamericano de Engenharia Sanitária e Ambiental, 2002.

G1. **Moradores denunciam despejo irregular de minério de ferro na Baía de Sepetiba**. G1, 2024. Disponível em: <https://g1.globo.com/>. Acesso em: 28 jan. 2025.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Estatísticas sobre a construção civil**. Rio de Janeiro, 2022.

INSTITUTO ESTADUAL DO AMBIENTE (INEA). **Relatório anual de qualidade das águas**. Rio de Janeiro, 2023. Disponível em: <https://www.inea.rj.gov.br/>. Acesso em: 28 jan. 2025.

MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE (MMA). **Diretrizes para a recuperação e gestão de zonas costeiras**. Brasília, 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/mma/>. Acesso em: 28 jan. 2025.

ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE (OMS). **Interrupção do monitoramento ambiental durante a pandemia de COVID-19**. Genebra, 2020. Disponível em: <https://www.who.int/>. Acesso em: 28 jan. 2025.

RELATO DE EXPERIÊNCIA: JOGO O “X” DA QUESTÃO

**Ana Cristina da Silva Corsino^{a,1}, Alessandra Assis
Menezes^{b,2}**

^a*Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), Rio de Janeiro, Brasil*

^b*Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil*

Resumo: Ao longo dos anos, professores dos primeiros anos da educação básica se sentem impotentes diante das muitas responsabilidades que lhes são impostas a cada ano que se passa. Com isso, dar continuidade à sua formação é algo que fica sempre em segundo plano. Aulas mais significativas e prazerosas não têm encontrado espaço diante da extensão dos currículos e dos projetos pedagógicos que lhe são imputados, desconectados das necessidades dos alunos. Diante deste quadro, surge o questionamento: Como adequar os conteúdos com atividades significativas que despertem a curiosidade e o espírito científico no meu aluno, para melhorar o seu aprendizado? Sendo assim, esse estudo propõe reflexões quanto ao aprendizado dos alunos e, a partir desta perspectiva, apresenta uma sugestão de jogo pedagógico, com a intenção de atrair os alunos e provocar neles o desejo pela aprendizagem. Este relato de experiência coloca à disposição dos leitores o jogo intitulado “o X da questão”, que vai estimular o raciocínio e a agilidade em resolver cálculo mental de forma criativa, divertida e satisfatória. Com isso, esperamos que haja a quebra do paradigma onde os alunos dizem não gostar da Matemática e que ele seja estimulado cada dia mais a apreciar a disciplina como algo possível e agradável, onde o erro é encarado como incentivo para novas descobertas e que o professor tenha mais leveza no exercício da sua prática pedagógica.

Palavras-chave: Jogo; educação; aprendizagem; matemática lúdica;

¹ crismat@ufrj.br.

² assisgm@yahoo.com.br.

INTRODUÇÃO

Acreditamos que um professor bem-preparado e comprometido com seu trabalho atinge objetivo destacado por António Nóvoa no artigo “Firmar a posição como professor, afirmar a profissão docente” (2017, p. 1128), quando dá a entender que: “aprender a agir como professor é compreender a importância [...] desse conhecimento profissional docente, que faz parte do patrimônio da profissão e que precisa ser valorizado na formação dos professores”.

Reconhecemos que há muitas lacunas no exercício pleno do magistério, como as políticas de desvalorização da profissão, refletidas em salários baixos e nas condições precárias das escolas. No entanto, a educação vai além dos muros da escola, pois “a profissão docente não se limita ao espaço profissional; ela se expande pelo espaço público, pela vida social, pela construção do ser humano” (Nóvoa, 2017, p. 1130). Assim, cabe aos educadores buscarem constantemente novos conhecimentos, formação continuada, qualificação profissional e materiais que ofereçam diferentes maneiras de aprendizagem aos alunos. Jogos matemáticos, por exemplo, são ferramentas valiosas para enriquecer a prática pedagógica, promovendo interação social, troca de experiências e ajudando os alunos a desenvolverem novas perspectivas para resolver problemas. Compreendendo que a sala de aula deve ser um espaço de experiências, e que as aulas são como movimentos artísticos que fogem de modelos rígidos, os jogos podem se tornar grandes aliados na criação de aulas mais envolventes e prazerosas.

DISCUSSÃO

Crianças brincam. Crescem brincando e jogando e esta é a sua razão de viver. Quando as crianças entram na vida escolar e quando trazem atividades para fazer em casa é comum os pais determinarem que só brincarão depois que fizerem o dever de casa.

Vejamos então que, em casos como esses, a brincadeira representa um prêmio a ser alcançado após o cumprimento da tarefa de casa. Sendo a brincadeira uma necessidade da criança, a tendência será o desinteresse pelas atividades escolares, pois elas se tornam impedimento à sua natureza, que é brincar.

Então, por que não se pode desenvolver o estudo e a brincadeira, ambos necessários ao desenvolvimento do indivíduo a partir de uma atividade única, comum, onde seja possível aprender brincando? (Grando, 2000, p. 19)

Os jogos ampliam o desenvolvimento cognitivo das crianças e são fundamentais no processo do desenvolvimento infantil, pois desencadeia a imaginação, a criatividade e as ideias. Quando observamos um ambiente onde as crianças estão descontraídas, brincando e jogando descompromissadas, vemos que eles estão satisfazendo às necessidades inerentes às suas idades, pois “o jogo propicia um ambiente favorável ao interesse da criança” (Grando, 2000, p. 20).

Jogos atraem. Seja pela competitividade, seja pela curiosidade, seja pela necessidade de desvendar um mistério. Mas o fato é que os jogos são provocantes, fontes de motivação e de conhecimento. Rubem Alves (2022) faz correlações e analogia de como construir conhecimento e banquetes. Segundo ele, “os banquetes não começam com a comida que se serve. Eles se iniciam com a fome. [...] Sem fome, o corpo se recusa a comer. Forçado, ele vomita”. Este precisa ser um ponto de reflexão, precisamos aguçar em nossos alunos o desejo de conhecimento, de crescimento. Do contrário, estaremos fadados ao fracasso, pois nossos alunos pensam e muitas vezes pensam diferente de nós. Aquilo que ele quer aprender nem sempre é aquilo que está no nosso plano de aula. Como professores, precisamos ter essa flexibilidade. Rubem Alves continuando que “toda experiência de aprendizagem se inicia com uma experiência afetiva. É a fome que põe em funcionamento o aparelho pensador. Fome é afeto. O pensamento nasce do afeto, nasce da fome”. Da mesma maneira, não adianta prepararmos um

“banquete pedagógico” se nosso aluno não tiver “fome”. Se nosso aluno tiver fome e se nós não tivermos um banquete para oferecê-lo, ele vai encontrar uma maneira de provocar em nós o surgimento desse banquete. Mas ele precisa ter fome e a tarefa do professor é provocar essa fome.

Com a competitividade cada vez mais em alta no mercado capitalista e com os currículos cada vez mais abarrotados de conteúdos, caminhamos para a perspectiva de que a escola possas um dos últimos lugares que ainda veremos crianças brincando, jogando, se socializando e aprendendo, pois “o jogo está tão gravemente ameaçado pela atual sociedade que cabe à escola protegê-lo” (Leif & Brunelle, 1978). Sendo assim, precisamos garantir este espaço do brincar em nossas escolas, trazendo ideias e novidades para que cada vez mais nossos alunos tenham odireito e a oportunidade do brincar garantidas e comprometidas com o desenvolvimentosaudável das nossas crianças.

Nossa função como educadores remete a um encadeamento de responsabilidades. E, atuando na Educação Básica, os desafios são ainda maiores. Lidamos com uma considerável diversidade de alunos todos os dias, com carências afetivas, emocionais, econômicas. Como provocar curiosidade em todos, ao mesmo tempo, com suas diferentes necessidades? Tem dias que o professor também está cheio de carências, mas ele está lá, procurando dar o melhor de si. Silvio Gallo diz que “a educação é, necessariamente, um empreendimento coletivo [...] que pode promover encontros alegres e encontros tristes, mas sempre encontros.” Encontros em sala de aula, encontro de alunos no pátio da escola, na hora do recreio, nos jogos, nos campeonatos, nas brincadeiras, no refeitório, na hora das refeições... Escola é lugar de encontros e, para que haja conhecimento, precisamos de todos os “outros”, pois “só há aprendizado quando algo ou alguém ensina alguma coisa” (Gallo, 2010). Sendo assim, há a necessidade cada vez maior que a escola se aproprie de ambientes coletivos de aprendizagem, onde cada um tem sua importância e ninguém pode ficar de fora. A realidade é que não temos ainda a escola dos nossos sonhos, com todos os alunos incluídos, cada um contribuindo com seu

conhecimento que nem sempre será aquele aprendido na escola, mas “educar significa lançar convites aos outros; mas o que cada um fará – e se fará – com esses convites, foge ao controle daquele que educa” (Gallo, 2010, p. 15).

No ano de 2018, estávamos iniciando um curso de Pós-graduação a nível de Especialização em Aprendizagem Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Estávamos matriculadas em uma disciplina denominada “Jogos, Mágica e Atividades Lúdicas na Educação Básica”, que era ministrada pela Prof.^a Dra. Gabriela Brião. A proposta desta disciplina era estudar textos, artigos e relatos de experiências. Como uma das formas de avaliação da disciplina, a professora dividiu a turma em grupos e solicitou a cada grupo que inventasse um jogo que pudesse ser trabalhado em sala de aula com os alunos. Esta avaliação aconteceu no dia 08 de agosto de 2018, na UERJ. Meu grupo era formado por 4 alunos e nós confeccionamos e apresentamos o jogo “O X da questão”, que ocorreu desta maneira: Primeiramente, dividimos a turma em 6 grupos, que foram se revezando ao longo das partidas. A cada partida, eram chamados 2 participantes, um de cada grupo, para participar no quadro. Colocamos um cartaz (Figura 2) com as sentenças, afixado no quadro branco. Os participantes da vez tinham que ficar de costas para o cartaz, de frente para a turma, porém, próximos ao cartaz. A cada partida, uma sentença aleatória que estava dentro de um envelope era sorteada e mostrada para os outros alunos da turma, que não estavam participando daquela jogada. Ao sinal dado, os participantes viravam, se posicionando de frente para o cartaz e o que conseguisse achar primeiro a resposta daquela sentença, ganhava ponto.

Como tínhamos 20 sentenças, tivemos 20 partidas. Foi bem legal, a turma participou ativamente, e foram momentos de muita desconstrução, de opiniões para melhorar o jogo, troca de ideias e muita animação também.

Figura 1. Regras do Jogo



Especialização em
Aprendizagem em Matemática

Pós-graduação lato sensu



Avaliação 2

Data: 08/08/2018

Prof^ª: Dra. Gabriela Brão

Componentes do Grupo: Adriana, Alessandra, Ana Cristina, Antônio Camilo

JOGO "O X DA QUESTÃO"

Organização da turma:

- Formar 6 grupos de 3 a 5 participantes;

Capacidades a serem trabalhadas:

- Desenvolver atenção, concentração e agilidade no raciocínio.

Material:

- 20 fichas coloridas com os resultados das sentenças matemáticas descritas no cartaz
- Envelope para colocar as fichas
- Cartaz com as sentenças matemáticas

Desenvolvimento:

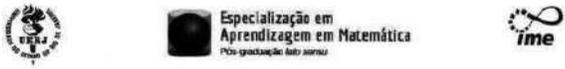
Selecionar um representante de cada grupo (que chamaremos de R1, R2, R3, R4, R5 e R6) para se posicionar ao lado do condutor do jogo, de costas para o cartaz com as sentenças. Para a primeira rodada irão participar R1 e R2. O condutor irá tirar uma ficha aleatória do envelope, contendo o resultado de uma das sentenças, toda a turma deve dizer a frase:

"Atenção pra acertar...
Diga onde o X está!"
(o X é o número escrito na ficha)

Após o sinal dado pelo condutor, o representante que colocar primeiro a palma da mão na sentença corretamente, ganhará o ponto, eliminando o adversário, que volta para o final da fila. Este ponto deverá ser registrado no quadro. Participará da segunda rodada o vencedor da primeira com o jogador R3. O procedimento será o mesmo até acabarem as fichas com as sentenças, ou seja, teremos 20 rodadas. O vencedor será o grupo que obtiver mais pontos.

Fonte: As autoras, 2025.

Figura 2. Cartaz com as sentenças



“Atenção pra acertar... Diga onde o X está!”

50% de 40 (20)	65 : 5 (13)	$\sqrt{225}$ (15)	$\log_a a$ (1)	4! (24)
O dobro de 20 + Metade de 20 (50)	20 : 5 + 18 (22)	$6 \frac{x}{(10)^x}$	\blacktriangle (60)	2^5 (32)
$\text{sen } x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ (45)	$a^x = 1$ (0)	$\frac{120}{20}$ (6)	V - F + A (2)	\blacksquare (48)
Cos 60 (0,5)	0,3 x 60 (18)	$\frac{6}{8} = \frac{x}{4}$ (3)	$\frac{1}{4}$ de 100 (25)	90 - 40 + 15 (65)

Fonte: As autoras, 2025.

CONCLUSÃO

O jogo desenvolve habilidades como raciocínio lógico, capacidade na resolução de problemas, independência e pensamento cognitivo, tornando as aulas mais interessantes e facilitando o aprendizado. É uma ferramenta importante na prática pedagógica, embora não se defenda que seja a única ou a mais eficaz. Acredita-se na importância pedagógica do jogo como possível de ser explorado em qualquer cenário ou contexto educacional, pois, no contexto da Educação Matemática analisa-se o jogo como um criador de situações-problema e provocador da aprendizagem. Mesmo com um sistema de ensino conteudista e projetos pouco relevantes, os professores devem incentivar a vontade de aprender, afastando-se de métodos tradicionais que priorizam a memorização. É essencial mostrar aos alunos seu potencial, oferecendo um ensino prazeroso e desafiador, para que a educação seja justa e igualitária.

AGRADECIMENTOS

À Prof. Dr^a Jeanne Barros pelo apoio e incentivo em nossa jornada acadêmica.

REFERÊNCIAS

- ALVES, R. **A arte de produzir fome**. Folha de S. Paulo, São Paulo, 29 out. 2002. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u146.shtml>. Acesso em 10 mar. 2025.
- EMERIQUE, P. S. Isto e aquilo: jogos que ensinam matemática. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999, p. 185-198.
- GALLO, S. **Eu, o outro e tantos outros: alteridade e filosofia da ciência**. Anais do Congresso Internacional Cotidiano: Diálogos sobre Diálogos, p. 1-16, 2008.
- GRANDO, C. R. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 224 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.
- LEIF, J.; BRUNELLE, L. **O Jogo pelo Jogo: a atividade lúdica na educação de crianças e adolescentes**. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.
- NÓVOA, A. **Firmar a profissão como professor, afirmar a profissão docente**. Cadernos de Pesquisa, v. 47, n. 166, p. 1106-1133, 2017.

SISTEMA DE REALIDADE VIRTUAL CONTROLADO POR INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL EMBARCADA PARA APOIO NO TRATAMENTO DE FOBIAS

**Claudio H. M. Jambo^{a,1}, Rosa Maria E. Moreira da
Costa^{a,2}**

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Este trabalho propõe um sistema acessível que integra IA, RV e Computação Móvel no tratamento de fobias por Exposição em Ambientes Virtuais. O protótipo PhobIA 3DS utiliza um ESP32, óculos de RV de baixo custo e sensor cardíaco, combinando lógica *fuzzy* e linguagem natural para gerenciar cenários. Avaliado por seis psicólogos, obteve bons resultados em interface, relevância e usabilidade, indicando potencial clínico.

Palavras-chave: Lógica *fuzzy*; terapia virtual; ambiente virtual 3-D; fobia.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos os domínios da saúde têm recebido contribuições tecnológicas que alteraram as práticas de diagnóstico, acompanhamento e tratamento de diferentes distúrbios e doenças (Nandakumar *et al.*, 2009). As técnicas atuais de visualização e análise de dados, comunicação, imagens 3D, aliadas às tecnologias de Inteligência Artificial (IA) (Tian *et al.*, 2019), computação móvel (Costa Stutzel *et al.*, 2019), Internet das Coisas (IoT) (Kaur; Kumar; Kumar, 2019) e Realidade Virtual (RV) (Kosonogov *et al.*, 2023) impulsionaram a criação de sistemas e

¹ claudiojambo@gmail.com.

² rcosta@ime.uerj.br.

aplicativos que, de forma crescente, são mais sofisticados, confortáveis e precisos. Entretanto, cada tecnologia possui suas fragilidades e deve ser contextualizada no domínio em que será explorada. Na área da saúde, muitos são os desafios associados ao uso de novas tecnologias e relacionam-se à precisão de sistemas, custos de desenvolvimento e de uso, telecomunicação, falta de conhecimento por parte da equipe de saúde, dificuldade de acesso a equipamentos adequados, dentre outros (Novaes; Soárez, 2020), (Thakare; Khire; Kumbhar, 2022), (Ilin *et al.*, 2022).

Especificamente, a área de tratamento de distúrbios neuropsiquiátricos tem explorado várias tecnologias para reproduzir cenários virtuais de estimulação cognitiva, tratamentos de síndromes de pânico e outras síndromes. O uso da realidade virtual é considerado tão efetivo quanto as estratégias que utilizam contextos reais para induzir respostas emocionais (Riva, 2005). O Tratamento por Exposição em Ambientes Virtuais (VRET) pode ser utilizado em pacientes com Transtorno de Estresse Pós-traumático (TEPT), pois permite criar estímulos traumáticos mais controlados e realistas (Nugraha, 2021). A terapia de exposição utilizando realidade virtual é uma ferramenta importante para o tratamento de fobias (Pereira; Faêda; Coelho, 2020), que pode ser uma opção de baixo custo, se utilizar equipamentos de imersão mais limitada, como os *smartphones* inseridos em suportes de visualização feitos de plástico. O VRET permite que os pacientes recebam diferentes níveis de estímulos traumáticos usando imersões de visão, som e *feedback* tátil, que correspondem ao princípio da dessensibilização sistemática (SD).

OBJETIVOS

Visando minimizar as desvantagens da VRET anteriormente citadas e considerando os resultados da revisão realizada, este trabalho tem por objetivo apresentar uma combinação tecnológica que integra um ambiente virtual autônomo e de baixo custo, embarcado em um microcontrolador

ESP32, com controle de multiagentes e suporte à comunicação por linguagem natural, para ser utilizado em VRET. Os cenários apresentados aos usuários podem ser alterados em tempo real, com interferência mínima por parte do terapeuta e considerando as necessidades de cada paciente. A área de aplicação será a Psicologia Clínica relacionada aos Transtornos de Ansiedade, mais especificamente às fobias.

Para a construção do protótipo foram utilizadas diversas tecnologias de *software* e de *hardware*. Como suporte para a visualização foi adotado o uso de óculos de realidade virtual de baixo custo, com as cenas apresentadas em um *smartphone*. O protótipo, denominado PhobIA 3DS, é controlado por multiagentes que integram módulos de captura de sinais fisiológicos (frequência cardíaca) utilizando um sensor de baixo custo; emprega processamento de linguagem natural (PLN) para obter o nível de ansiedade percebido pelo paciente; considera essas duas informações em um módulo de lógica *fuzzy* (ou difusa) embarcada, que, por sua vez, gera uma resposta sobre o nível de ansiedade calculado; e utiliza um módulo que controla e altera a exibição de cenários específicos para cada nível de ansiedade. Tudo isso é processado de forma paralela.

MODELAGEM DO SISTEMA PHOBIA 3DS

A implementação de um sistema multiagente neste trabalho é bastante útil, visto que cada agente é responsável por uma ou mais tarefas de forma modularizada:

Agente Controlador: Recebe as informações ditas pelo paciente (por voz) quanto ao seu nível de ansiedade, bem como a frequência cardíaca captada pelo sensor. A partir desses dados, realiza cálculos de lógica difusa para determinar o nível de ansiedade calculado.

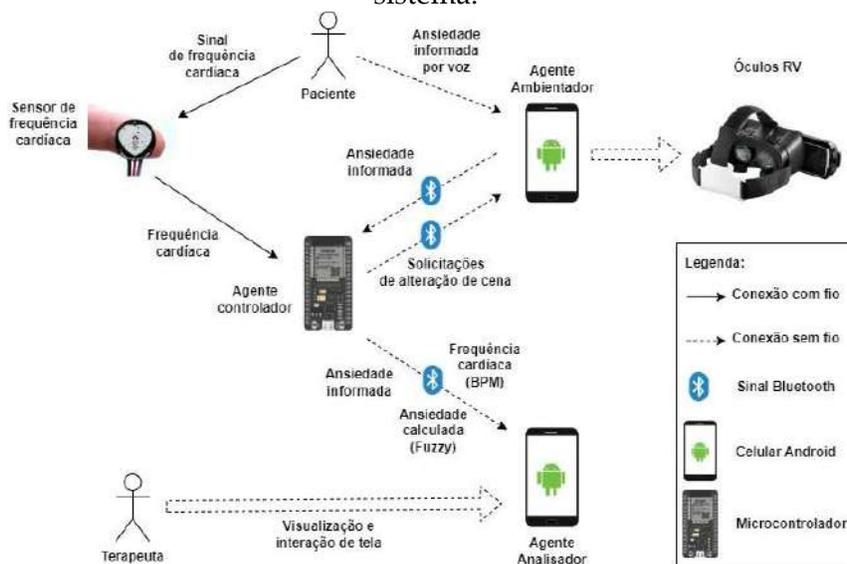
Agente Ambientador: Responsável por gerar e manter a apresentação do ambiente 3D para o paciente. Instalado em um aparelho celular Android acoplado aos óculos de realidade virtual,

ele altera as cenas conforme solicitado pelo agente controlador. Destaca-se a funcionalidade de espelhamento de tela, que permite que o terapeuta visualize as mesmas cenas.

Agente Analisador: Também instalado em um dispositivo Android, apresenta ao terapeuta, em tempo real, informações como a ansiedade informada pelo paciente, a frequência cardíaca e o nível de ansiedade calculado. Permite a interação do terapeuta via controles na tela do *smartphone*.

Expansibilidade: O módulo Bluetooth BLE possibilita a conexão simultânea de múltiplos agentes analisadores, permitindo que vários profissionais acompanhem a sessão em tempo real. As figuras 1 e 2 apresentam respectivamente o diagrama de comunicação e interação dos agentes do sistema e o primeiro teste do sistema em sua montagem final.

Figura 1: Diagrama de comunicação e interação dos agentes do sistema.



Fonte: Os Autores, 2025.

Figura 2: Teste inicial do sistema em sua montagem final.



Fonte: Os Autores, 2025.

AVALIAÇÃO DO SISTEMA

Foram consideradas diversas técnicas e dimensões na avaliação do sistema PhobIA 3DS, abrangendo:

Usabilidade: Essencial para sistemas na área da saúde, considerando os riscos envolvidos. O sistema deve ser simples e efetivo para todos os usuários, independentemente do nível de compreensão (E Zainab *et al.*, 2024).

Relevância: Avaliada por meio de 4 questões qualitativas que identificam a percepção dos usuários quanto à utilidade do software.

Interface: Avaliada através de 7 perguntas que investigam a qualidade das dinâmicas adotadas, a comunicação oral, possíveis tonturas e atrasos na geração das cenas.

Para a usabilidade, utilizou-se o *System Usability Scale* (SUS), composto por 10 sentenças formuladas de maneira alternada (afirmativa e negativa), com respostas em escala *Likert* de 1

(Discordo Fortemente) a 5 (Concordo Fortemente) (Bangor; Kortum; Miller, 2008). Valores inferiores a 35,7 são considerados ruins, acima de 71,4 bons e superiores a 85,5 excelentes.

Dois instrumentos foram aplicados: um com 4 itens para avaliar a relevância e outro com 7 itens para a interface.

O sistema foi avaliado por seis psicólogos voluntários em seus locais de atendimento, e os dados coletados foram utilizados para análise. O projeto recebeu aprovação do comitê de ética da UERJ (protocolo n. 70149523.5.0000.5282).

RESULTADOS DA AVALIAÇÃO DO SISTEMA

Usabilidade: O SUS resultou em aproximadamente 86,67, classificando o sistema como “Excelente” (acima de 85,5).

Relevância: O sistema obteve uma média de 3,42 (em uma escala de 0 a 4), demonstrando elevada relevância como ferramenta de apoio no tratamento das fobias.

Interface: A avaliação da interface resultou em uma média de 3,62 (na escala de 0 a 4), indicando uma percepção muito positiva pelos profissionais.

CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma combinação tecnológica de baixo custo, implementada em uma placa ESP32 com controle de multiagentes e lógica *fuzzy*, além de suporte à comunicação por linguagem natural, voltada para a Psicologia Clínica, especialmente no tratamento dos Transtornos de Ansiedade. O protótipo foi desenvolvido utilizando tecnologias de baixo custo e, em sua maioria, de código aberto.

Como contribuição, o sistema integra tecnologias de Inteligência Artificial em uma placa ESP32, que pode ser conectada a um *smartphone* acoplado a óculos de realidade virtual de baixo custo, abrindo novas perspectivas para tratamentos de fobias. A revisão da literatura não identificou propostas semelhantes.

Uma possível aplicação futura do PhobIA 3DS, além do apoio no tratamento específico de fobias, seria em programas de treinamento para profissionais que precisam controlar melhor seus níveis de ansiedade durante atividades.

REFERÊNCIAS

BANGOR, A.; KORTUM, P. T.; MILLER, J. T. **An Empirical Evaluation of the System Usability Scale**. *International Journal of Human-Computer Interaction*, v. 24, n. 6, p. 574-594, 2008.

COSTA STUTZEL, M. *et al.* **Multi-part quality evaluation of a customized mobile application for monitoring elderly patients with functional loss and helping caregivers**. *BMC Medical Informatics and Decision Making*, v. 19, n. 1, p. 140, 2019.

E ZAINAB, H. *et al.* **Design and development of virtual reality exposure therapy systems: requirements, challenges and solutions**. *Multimedia Tools and Applications*, v. 83, n. 2, p. 6137-6160, 2024.

ILIN, I. *et al.* **Critical Factors and Challenges of Healthcare Digital Transformation**. *In: RUDSKOI, A.; AKAEV, A.; DEVEZAS, T. (Eds.). Digital Transformation and the World Economy: Critical Factors and Sector-Focused Mathematical Models*. Cham: Springer International Publishing, p. 205-220, 2022.

KAUR, P.; KUMAR, R.; KUMAR, M. **A healthcare monitoring system using random forest and internet of things (IoT)**. *Multimedia Tools and Applications*, v. 78, n. 14, p. 19905-19916, 2019.

KOSONOGOV, V. V. *et al.* **Review of Psychophysiological and Psychotherapeutic Studies of Stress Using Virtual Reality Technologies**. *Neuroscience and Behavioral Physiology*, v. 53, n. 1, p. 81-91, 2023.

NANDAKUMAR, A. K. *et al.* **Pathways Of Health Technology Diffusion: The United States And Low-Income Countries**. *Health Affairs*, v. 28, n. 4, p. 986-995, jul. 2009.

NOVAES, H. M. D.; SOÁREZ, P. C. D. A Avaliação das Tecnologias em Saúde: origem, desenvolvimento e desafios atuais. Panorama internacional e Brasil. **Cadernos de Saúde Pública**, v. 36, n. 9, p. e00006820, 2020.

NUGRAHA, I. D. **Efficacy of Virtual Reality Exposure Therapy for Post-Traumatic Stress Disorder: A Systematic Review**. Open Science Framework, 18 nov. 2021. Disponível em: <https://osf.io/5tnvb>. Acesso em: 16 fev. 2025

PEREIRA, J. S.; FAÊDA, L. M.; COELHO, A. M. **Evolution of VRET to Assist in the Treatment of Phobias: a systematic review**. 2020 22nd Symposium on Virtual and Augmented Reality (SVR). Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9262653>. Acesso em: 16 fev. 2025

RIVA, G. **Virtual Reality in Psychotherapy: Review**. *CyberPsychology & Behavior*, v. 8, n. 3, p. 220-230, 2005.

THAKARE, V.; KHIRE, G.; KUMBHAR, M. **Artificial Intelligence (AI) and Internet of Things (IoT) in Healthcare: Opportunities and Challenges**. *ECS Transactions*, v. 107, n. 1, p. 7941-7951, 2022.

TIAN, S. et al. **Smart healthcare: making medical care more intelligent**. *Global Health Journal*, v. 3, n. 3, p. 62-65, 2019.

SOBRE FORMAS MODULARES PARA O GRUPO MODULAR E O SISTEMA DE RAMANUJAN

Bernardo Vitiello^{a,1}, Gabriel Guinody^{a,2}, Younes Nikdelan^{a,3}

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Apresentamos uma introdução à teoria das formas modulares para $SL_2(\mathbb{Z})$, destacando como primeiro exemplo clássico e não trivial as séries de Eisenstein $E_{2k}(\tau)$ para $k \geq 2$. Em seguida, analisamos a série $E_2(\tau)$, que, por não satisfazer a equação funcional das formas modulares, é classificada como uma forma quase-modular. Discutimos, ainda, como as séries de Eisenstein $E_4(\tau)$ e $E_6(\tau)$ geram o espaço das formas modulares para $SL_2(\mathbb{Z})$. Por fim, apresentamos o sistema de equações diferenciais não lineares de Ramanujan, cuja uma solução é dada pela tripla (E_2, E_4, E_6) .

Palavras-chave: Formas modulares; séries de Eisenstein; sistema de Ramanujan.

INTRODUÇÃO

As formas modulares são funções analíticas complexas definidas no semi-plano superior de Poincaré que satisfazem uma equação funcional associada à ação do grupo modular, além de obedecerem a certas condições de crescimento. Essas funções desempenharam um papel central na matemática desde o século XIX, aparecendo em contextos fundamentais da Análise Complexa e da Teoria dos Números.

¹ bernardovitiello@gmail.com.

² guinogy@gmail.com.

³ younes.nikdelan@ime.uerj.br.

Historicamente, ainda que de maneira mais elementar, as formas modulares já figuravam nos trabalhos de grandes matemáticos como Gauss, Abel, Jacobi e Dirichlet, sendo posteriormente aprofundadas por Kronecker, Eisenstein e Weierstrass. No final do século XIX, Poincaré e Klein as estabeleceram como um tema central na teoria das funções automorfas, ampliando sua influência para diversas áreas da matemática.

Um marco notável na relevância das formas modulares ocorreu com sua aplicação na prova do Último Teorema de Fermat, um problema que permaneceu em aberto por mais de três séculos. A resolução desse teorema, concretizada por Andrew Wiles, foi viabilizada pela demonstração de uma parte substancial do célebre Teorema da Modularidade, que estabelece que toda curva elíptica definida sobre o campo dos números racionais \mathbb{Q} é associada a uma forma modular.

Atualmente, as formas modulares continuam sendo objeto de intensa pesquisa, tanto na matemática quanto na física teórica. Seu estudo interage fortemente com áreas como Análise Complexa e Teoria dos Números, além de desempenhar um papel fundamental na Topologia Algébrica e na Geometria Analítica. Na Física Teórica, essas funções também são essenciais em contextos como a Teoria das Cordas, onde surgem naturalmente em diversas formulações matemáticas da teoria quântica da gravidade.

Este trabalho tem como objetivo fornecer uma introdução acessível e objetiva às formas modulares para $SL_2(\mathbb{Z})$, especialmente voltada para alunos de graduação. Além de apresentar conceitos fundamentais e exemplos relevantes, exploramos aplicações das formas modulares na resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs) não lineares.

A estrutura do texto é organizada da seguinte maneira:

Na Seção 2, introduzimos o grupo modular e sua ação sobre o semi-plano superior de Poincaré, analisando sua estrutura e propriedades, bem como o domínio fundamental associado.

Na Seção 3, definimos as funções fracamente modulares e introduzimos formalmente as formas modulares para $SL_2(\mathbb{Z})$. Discutimos suas propriedades fundamentais, exploramos sua periodicidade e obtemos suas séries de Fourier, conhecidas como q -expansões, que desempenham um papel crucial na teoria.

Na Seção 4, aprofundamos o estudo das formas modulares por meio das séries de Eisenstein. Apresentamos suas propriedades e destacamos a relação entre os coeficientes da q -expansão e funções clássicas da Teoria dos Números, como a função zeta de Riemann e os números de Bernoulli. Além disso, veremos que essas séries atuam como funções geradoras das funções divisoras.

A Seção 5 é dedicada ao estudo da série de Eisenstein $E_2(\tau)$, que, embora não seja uma forma modular propriamente dita, compartilha diversas propriedades estruturais com formas modulares de peso 2, sendo de grande interesse na teoria.

Na Seção 6, demonstramos que a álgebra de formas modulares para o grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ é gerada pelas séries de Eisenstein E_4 e E_6 . Para simplificar a exposição e manter o foco no nível pretendido deste texto, aceitamos a Fórmula de Valência sem demonstração, evitando assim uma abordagem mais avançada baseada em Superfícies de Riemann.

Por fim, na Seção 7, apresentamos o sistema de equações diferenciais de Ramanujan, cuja solução envolve diretamente as séries de Eisenstein E_2, E_4 e E_6 . Esse resultado ilustra como as formas modulares emergem naturalmente no estudo de sistemas dinâmicos e equações diferenciais, demonstrando sua relevância além do escopo puramente teórico.

As principais referências utilizadas na elaboração deste texto foram [1, 2, 3].

O GRUPO MODULAR E SUA AÇÃO

Considere o semi-plano de Poincaré

$$\mathcal{H} := \tau \in \mathbb{C}: \text{Im}(\tau) > 0,$$

e seja $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ o grupo modular, definido por:

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}.$$

A ação de Γ sobre \mathcal{H} à esquerda é dada pela transformação de Möbius:

$$\gamma \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \text{onde } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \text{e } \tau \in \mathcal{H}.$$

É importante observarmos que o grupo Γ é gerado pelos seguintes elementos:

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \text{e} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Definição 1. *O domínio fundamental da ação de Γ sobre \mathcal{H} é uma região fechada $D \subset \mathcal{H}$ que satisfaz as seguintes propriedades*

1. $\forall \tau_1, \forall \tau_2 \in \text{int}(D)$, com $\tau_1 \neq \tau_2$, e $\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma \cdot \tau_1 \neq \tau_2$;
2. $\forall \tau \in \mathcal{H}$, $\exists \hat{\tau} \in D$ e $\exists \gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma \cdot \hat{\tau} = \tau$.

Pode-se observar que o domínio fundamental de Γ , considerando a ação definida acima, é dado por

$$D = \left\{ \tau \in \mathcal{H} : |Re(\tau)| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \right\}. \quad (1)$$

FORMAS MODULARES

Definição 2. *Sejam $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup 0$ e $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função meromorfa. Dizemos que a função f é uma função fracamente modular de peso k para Γ se f satisfaz a equação funcional*

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau),$$

para todo $\tau \in \mathcal{H}$ e toda matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

Assim, obtemos os seguintes resultados:

1. A função identicamente nula é fracamente modular de qualquer peso $k \in \mathbb{N}_0$.

2. As funções constantes em \mathcal{H} são fracamente modulares de peso 0.
3. Considere $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ e um $\tau \in \mathcal{H}$ arbitrário. Então, como $\gamma \cdot \tau = \tau$, pela equação funcional, temos que $(-1)^k f(\tau) = f(\gamma \cdot \tau) = f(\tau)$. Deste modo, se k for ímpar, então $f(\tau) = 0$ para todo $\tau \in \mathcal{H}$. Isso quer dizer que podemos restringir nosso estudo apenas aos inteiros k pares.
4. Em Γ , é suficiente verificar a equação funcional para os seus dois geradores S e T . Ou seja, f é uma função fracamente modular de peso $k \in \mathbb{N}_0$ se, e somente se, satisfaz $f\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau)$ e $f(\tau + 1) = f(\tau)$ para todo $\tau \in \mathcal{H}$.
5. Toda função fracamente modular em Γ é periódica de período 1. Isso pois, sabemos que $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ deve verificar $f(T\tau) = (1)^k f(\tau)$ para todo $\tau \in \mathcal{H}$. Logo, para todo $\tau \in \mathcal{H}$, vale que $f(\tau + 1) = f(\tau)$. Com efeito, f tem expansão em série de Fourier da seguinte forma:

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n,$$

onde $a_n \in \mathbb{C}$ são constantes e $q := e^{2\pi i \tau}$. Esta expressão se chama a q -expansão da f no infinito. De fato, $q: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{D}^* := \{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1\}$, dada por $q(\tau) = e^{2\pi i \tau}$, é uma função holomorfa tal que $e^{2\pi i \tau} = 0$. Logo, a expressão $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$, que é série de Laurent de $f(q)$ em torno de 0, chama-se a q -expansão de $f(\tau)$ em ∞ .

Definição 3. *Uma forma fracamente modular de peso $k \in \mathbb{N}_0$ para Γ é uma função fracamente modular $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ de peso k para Γ que é holomorfa em \mathcal{H} .*

Definição 4. *Seja $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função fracamente modular de peso $k \in \mathbb{N}_0$ e considere a sua q -expansão $f(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$. Dizemos que*

1. f é meromorfa no infinito se existe $M \in \mathbb{Z}$ tal que $a_m = 0$ para todo $m < M$.
2. f é holomorfa no infinito se $a_m = 0$ para todo $m < 0$. Nesse caso, a q -expansão é a série de Taylor de f .

Finalmente, definiremos as nossas protagonistas

Definição 5. Seja $k \in \mathbb{N}_0$. Uma forma modular de peso k para Γ é uma forma fracamente modular $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ de peso k para Γ que é holomorfa no infinito.

Podemos ver que se denotarmos o conjunto de todas as formas modulares de peso k para Γ por $M_k(\Gamma)$, então $M_k(\Gamma)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

Alguns exemplos e resultados:

1. Toda função constante é uma forma modular de peso $k = 0$.
2. Sejam f e g formas modulares de pesos k e l , respectivamente. Assim, o produto $f \cdot g$ é uma forma modular de peso $k + l$.

Para exibirmos um exemplo não trivial de formas modulares, recorreremos às *Séries de Eisenstein*, que serão apresentadas na próxima seção.

SÉRIES DE EISENSTEIN

Seja $k > 1$ um inteiro. Definimos $G_{2k}(\tau): \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}.$$

Esta série converge absolutamente e uniformemente em subconjuntos compactos de \mathcal{H} , logo $G_{2k}(\tau)$ é uma função holomorfa em \mathcal{H} . Assim,

Teorema 1. Para todo $k > 1$ inteiro, $G_{2k}(\tau): \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma modular de peso $2k$ para Γ .

Demonstração. Como já sabemos que $G_{2k}(\tau)$ é holomorfa em \mathcal{H} para todo $k > 1$ inteiro, basta provarmos que $G_{2k}(\tau)$ satisfaz a equação funcional das formas modulares de peso $2k$, e que é holomorfa no infinito. A primeira afirmação decorre dos seguintes fatos:

$$G_{2k}(T\tau) = G_{2k}(\tau + 1) = G_{2k}(\tau),$$

e

$$G_{2k}(S\tau) = G_{2k}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{2k}G_{2k}(\tau),$$

para todo $\tau \in \mathcal{H}$. Isso se dá, pois, as séries de Eisenstein para pesos maiores ou iguais a 4 convergem absolutamente e uniformemente, então podemos fazer uma reordenação delas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} G_{2k}\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{\left(-\frac{m}{\tau} + n\right)^{2k}} \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{\tau^{2k}}{(n\tau - m)^{2k}} \\ &= \tau^{2k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(n\tau - m)^{2k}} \\ &= \tau^{2k} \sum_{(m',n') \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m'\tau + n')^{2k}} \\ &= \tau^{2k}G_{2k}(\tau). \end{aligned}$$

Assim, G_{2k} é uma forma fracamente modular de peso $2k$, pois é holomorfa e satisfaz a equação funcional exigida. Agora, para mostrarmos que $G_{2k}(\tau): \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa no infinito, basta verificarmos que existe o limite $\lim_{\tau \rightarrow i\infty} G_{2k}(\tau)$. Para isso, tome $\tau \in D$. Pela convergência uniforme em D , podemos calcular o limite termo-a-termo:

1. Se $m \neq 0$, então $\lim_{\tau \rightarrow i\infty} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} = 0$.
2. Se $m = 0$, então $\lim_{\tau \rightarrow i\infty} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} = \frac{1}{n^{2k}}$.

Logo,

$$\lim_{\tau \rightarrow i\infty} G_{2k}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^{2k}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = 2\zeta(2k).$$

Onde $\zeta(z)$ é a função zeta de Riemann, que é uma função de variável complexa definida para $Re(z) > 1$ pela série $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$. Portanto, como $G_{2k}(\tau): \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz todas as condições da Definição 5, segue que G_{2k} é uma forma modular de peso $2k$ para Γ . ■

Agora, vamos obter as q -expansões destas formas modulares. Primeiro, veja as seguintes definições.

Definição 6. Os números de Bernoulli B_k são os números racionais definidos por

$$\frac{e^x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{30} \frac{x^4}{24} + \dots$$

Definição 7. Sejam k e n inteiros positivos. Definimos a função divisor por

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Com isso, podemos mostrar o seguinte resultado

Teorema 2. Seja k um inteiro positivo. Então

1. $\zeta(2k) = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}$;
2. Se $k \geq 2$, $G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) \left(1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n\right)$.

Demonstração. Inicialmente, considere a fórmula de produto de Euler para a função seno

$$\text{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{d=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{d^2}\right).$$

Tomando a derivada logarítmica nos dois lados, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\ln(\operatorname{sen}(\pi z))) &= \pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-d} + \frac{1}{z+d} \right) \\ &= \sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+d} \end{aligned}$$

Podemos trabalhar em $\sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-d} + \frac{1}{z+d} \right)$, expandindo seu termo geral numa série de potências, obtendo, para $x := 2\pi iz$,

$$\sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-d} + \frac{1}{z+d} \right) = 1 - 2 \sum_{l=1}^{\infty} \zeta(2l) \frac{x^{2l}}{(2\pi i)^{2l}}, \quad (3)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \pi \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \pi i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \\ &= \pi i + \frac{2\pi i}{e^{2i\pi z} - 1}, \end{aligned} \quad (4)$$

e ainda podemos escrever $\frac{2\pi i}{e^{2i\pi z} - 1} = -2\pi i \sum_{s=0}^{\infty} q^s$, onde $q = e^{2i\pi z}$. Multiplicando (4) por z e tomando o x definido anteriormente, obtemos

$$\pi z \cot(\pi z) = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}. \quad (5)$$

De (2), (3) e (4) segue a igualdade

$$1 - 2 \sum_{l=1}^{\infty} \zeta(2l) \frac{x^{2l}}{(2\pi i)^{2l}} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Logo,

$$-2 \sum_{l=1}^{\infty} \zeta(2l) \frac{x^{2l}}{(2\pi i)^{2l}} = \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Comparando os coeficientes das séries, temos

$$\zeta(2k) = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

E isto prova a primeira afirmação do teorema.

Agora, para mostrarmos a segunda afirmação, partiremos da seguinte igualdade, que segue de (2) e (4),

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+d} = \pi i + \frac{2\pi i}{e^{2i\pi z} - 1} = \pi i - 2\pi i \sum_{s=0}^{\infty} (e^{2i\pi z})^s.$$

Derivando sucessivamente ambos os lados, obtemos para $k \geq 2$

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+d)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} e^{2\pi i d z} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} q^d.$$

Portanto, tomando $z = m\tau$, temos

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} = \frac{(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} e^{2\pi i n m \tau}$$

e

$$\begin{aligned} G_{2k}(\tau) &= \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - (0,0)} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} \\ &= \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^{2k}} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} \\ &= 2\zeta(2k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} \\ &= 2\zeta(2k) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} q^{mn} \\ &= 2\zeta(2k) + 2 \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{2k-1} q^{md}. \end{aligned} \tag{6}$$

Com isso, agrupando os termos que contribuem para q^n , verificamos que consiste em todos os pares (m, d) tais que $m \cdot d = n$

n . Ou seja, para cada n , percorremos em d todos os divisores de n . Assim,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{2k-1} q^{md} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n.$$

Substituindo em (6)

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + 2 \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n,$$

Porém, como $\zeta(2k) = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}$, obtemos $\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k)!} = \frac{-2\zeta(2k)}{B_{2k}}$. Então, concluímos que

$$\begin{aligned} G_{2k}(\tau) &= 2\zeta(2k) - \frac{8k\zeta(2k)}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n \\ &= 2\zeta(2k) \left(1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n \right). \end{aligned}$$

■

Definição 8. Dada uma série de Eisenstein

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) \left(1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n \right),$$

podemos associar a ela uma série de Eisenstein normalizada, definida como

$$E_{2k}(\tau) := \frac{G_{2k}(\tau)}{2\zeta(2k)} = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n.$$

Em outras palavras, é uma Série de Eisenstein multiplicada por um fator de tal modo que ela obtém o valor 1 no ponto $q = 0$ ($\tau \rightarrow i\infty$).

Abaixo estão alguns casos particulares das séries de Eisenstein normalizadas

$$E_4(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n = 1 + 240q + 2160q^2 + \dots, \quad (7)$$

$$E_6(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n = 1 - 504q - 16632q^2 - \dots. \quad (8)$$

SÉRIE DE EISENSTEIN E_2

Quando apresentamos as séries de Eisenstein na seção anterior, mostramos que $E_{2k}(\tau)$ são formas modulares de peso $2k$ para $k \geq 2$ inteiro. Desse modo, desconsideramos o caso $2k = 2$, isso pois E_2 é dada por uma série que não é absolutamente convergente, o que não é o caso quando $k \geq 2$. Por esse motivo, E_2 não define uma forma modular. Porém, $E_2(\tau)$ converge condicionalmente, e conseguimos obter uma ordem para a sua soma tal que a função obtida tenha propriedades muito semelhantes à de uma forma modular de peso 2. Para ver isso, note que, para $\tau \in \mathcal{H}$

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n = 1 - 24q - 72q^2 - \dots.$$

Com efeito, a ordem que consideramos da soma para obtermos essa igualdade é a seguinte:

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &= \frac{1}{2\zeta(2)} \left(\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - (0,0)} \frac{1}{(m\tau + n)^2} \right) \\ &= 1 + \frac{6}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

E como foi mostrado acima,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau + n)^2} = -4\pi^2 \sum_{d=1}^{\infty} dq^n,$$

logo

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau + n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n,$$

onde $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$. Usando esses resultados para $m\tau$ em (9), conseguimos que

$$1 + \frac{6}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^2} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n.$$

Com essa definição, pode-se provar a seguinte proposição.

Proposição 1. *Dado $\tau \in \mathcal{H}$, vale a seguinte relação:*

$$E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 E_2(\tau) + \frac{12}{2\pi i} \tau. \quad (10)$$

De modo geral, para $\tau \in \mathcal{H}$ e $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, vale que

$$(c\tau + d)^{-2} E_2(\gamma \cdot \tau) = E_2(\tau) - \frac{6i}{\pi} \frac{c}{c\tau + d}, \quad (11)$$

onde (10) é um caso particular tomando $\gamma = S$.

Demonstração. Para demonstrar (10), definimos:

$$a_{m,n}(\tau) := \frac{1}{(m\tau + n)(m\tau + n + 1)} = \frac{1}{m\tau + n} - \frac{1}{m\tau + n + 1}.$$

Esta decomposição parcial nos permite, via soma telescópica, calcular a série

$$\sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(\tau) = 0.$$

Somando essa série com a definição de $E_2(\tau)$, obtemos que

$$E_2(\tau) = 1 + \frac{1}{2\zeta(2)} \sum_{m \neq 0, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^2 (m\tau + n + 1)}.$$

É importante notar que podemos fazer a soma termo a termo, pois isso só exige a convergência condicional. Agora, usaremos o seguinte fato

$$E_2\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \tau^2 \left(1 + \frac{1}{2\zeta(2)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{(m\tau + n)^2} \right).$$

Assim, podemos fazer

$$\begin{aligned} & \tau^{-2}E_2\left(\frac{-1}{\tau}\right) - E_2(\tau) \\ &= \frac{1}{2\zeta(2)} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{(m\tau + n)^2} - \sum_{m \neq 0, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^2(m\tau + n + 1)} \right). \end{aligned}$$

Subtraindo termo a termo, obtemos uma fórmula para $E_2(\tau)$

$$\begin{aligned} E_2(\tau) &= \tau^{-2}E_2\left(\frac{-1}{\tau}\right) - \frac{1}{2\zeta(2)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \neq 0} a_{m,n}(\tau) \\ &= \tau^{-2}E_2\left(\frac{-1}{\tau}\right) - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \neq 0} a_{m,n}(\tau). \end{aligned} \tag{12}$$

Finalmente, calculamos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{N-1} \sum_{m \neq 0} a_{m,n}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{N-1} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{1}{m\tau + n} - \frac{1}{m\tau + n + 1} \right).$$

Para cada N fixo, podemos trocar a ordem dos somatórios e calcular. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq 0} \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\frac{1}{m\tau + n} - \frac{1}{m\tau + n + 1} \right) &= \sum_{m \neq 0} \left(\frac{1}{m\tau - N} - \frac{1}{m\tau + N} \right) \\ &= \frac{-1}{\tau} \sum_{m \neq 0} \left(\frac{1}{\frac{N}{\tau} + m} - \frac{1}{\frac{N}{\tau} - m} \right) \\ &= \frac{-2\pi}{\tau} \cot\left(\pi \frac{N}{\tau}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Tomando $N \rightarrow \infty$, e usando que

$$\pi \cot\left(\pi \frac{N}{\tau}\right) = \pi i - 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} e^{\frac{2\pi i m N}{\tau}},$$

obtemos, por (13), que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{N-1} \sum_{m \neq 0} a_{m,n}(\tau) = \frac{-2\pi i}{\tau}.$$

Com isso, voltando a (12), mostramos que

$$E_2(\tau) = \tau^{-2}E_2\left(\frac{-1}{\tau}\right) + \frac{6\pi i}{\tau}.$$

Logo,

$$E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2E_2(\tau) + \frac{12}{2\pi i}\tau.$$

■

Com efeito, essa propriedade diz que E_2 não é uma forma modular, mas sim uma forma quase-modular de peso 2 e profundidade 1, cuja definição é dada a seguir.

Definição 9. Uma forma quase-modular de peso $k \in \mathbb{N}_0$ e profundidade $p \in \mathbb{N}$ em Γ é uma função holomorfa $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ de crescimento moderado tal que para todo $\tau \in \mathcal{H}$ e $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, vale:

$$(c\tau + d)^{-k}f(\gamma.\tau) = \sum_{j=0}^p f_j(\tau) \left(\frac{c}{c\tau + d}\right)^j, \quad (14)$$

onde f_1, f_2, \dots, f_p são funções holomorfas de crescimento moderado, $f_0 = f$ e $f_p \neq 0$.

Observação 1. Se considerarmos uma forma modular de peso k , podemos observar que a derivada dela é uma forma quase-modular de peso $k+2$ e profundidade 1. Para este fim, calculamos a derivada da equação funcional $f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$, onde $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e obtemos:

$$\begin{aligned} (\gamma\tau)'f'(\gamma\tau) &= (c\tau + d)^k f'(\tau) + ck(c\tau + d)^{k-1}f(\tau), \\ \Rightarrow \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)' f'(\gamma\tau) &= (c\tau + d)^k f'(\tau) + ck(c\tau + d)^{k-1}f(\tau), \\ \Rightarrow \frac{(act+ad-act-bc)}{(c\tau+d)^2} f'(\gamma\tau) &= (c\tau + d)^k f'(\tau) + ck(c\tau + d)^{k-1}f(\tau), \\ \Rightarrow \frac{1}{(c\tau + d)^2} f'(\gamma\tau) &= (c\tau + d)^k f'(\tau) + ck(c\tau + d)^{k-1}f(\tau), \\ \Rightarrow (c\tau + d)^{-(k+2)} f'(\gamma\tau) &= f'(\tau) + ck(c\tau + d)^{-1}f(\tau). \end{aligned} \quad (15)$$

Denotaremos o espaço das formas quase-modulares de peso k em Γ por $\tilde{M}_k(\Gamma)$, e o espaço das formas quase-modulares em Γ por $\tilde{M}(\Gamma) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tilde{M}_k(\Gamma)$.

ESPAÇO VETORIAL DAS FORMAS MODULARES

Como vimos na seção Formas Modulares, o espaço das formas modulares de peso $k \in \mathbb{N}_0$ é um \mathbb{C} -espaço vetorial. Assim, uma pergunta natural é acerca da dimensão e da base desses espaços vetoriais. Com efeito, se $k \in \mathbb{N}_0$ é ímpar, então $\dim M_k(\Gamma) = 0$, ou seja, $M_k(\Gamma) = 0$. Entretanto, a pergunta permanece para $k \in \mathbb{N}_0$ par, e é isso que veremos a seguir. Para este fim, consideremos uma forma modular $f \in M_k(\Gamma)$, e adotemos, sem demonstração, o seguinte resultado, conhecido como a Fórmula da Valência (Valence Formula):

$$\text{ord}_{\infty}(f) + \frac{1}{2}\text{ord}_i(f) + \frac{1}{3}\text{ord}_{\rho}(f) + \sum_{\tau \in \hat{D}} \text{ord}_{\tau}(f) = \frac{k}{12}, \quad (16)$$

onde $\text{ord}_x(f)$ denota a ordem de anulação de f no x , $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$, D representa o domínio fundamental dado em (1), e:

$$\hat{D} = D \setminus \left(i, \rho \cup \left\{ \tau \in D \mid \text{Re}(\tau) = \frac{1}{2} \right\} \cup \tau \in D \mid |\tau| = 1, \text{Re}(\tau) > 0 \right).$$

Note que para todo $x \in \hat{D} \cup i, \rho, \infty$, obtemos $\text{ord}_x(f) \geq 0$, e em particular se $f(x) \neq 0$, então $\text{ord}_x(f) = 0$. Utilizando a Fórmula da Valência (16), podemos demonstrar os seguintes resultados interessantes.

Proposição 2. *As seguintes afirmações são válidas.*

1. $M_2(\Gamma) = 0$.
2. Se $k = 4, 6, 8, 10$, ou 14 , então $\dim M_k(\Gamma) = 1$.
3. O único zero de E_4 ocorre em $\tau = \rho$, onde possui ordem 1; além disso, $M_4(\Gamma) = \langle E_4 \rangle$.
4. O único zero de E_6 ocorre em $\tau = i$, onde possui ordem 1; além disso, $M_6(\Gamma) = \langle E_6 \rangle$.

Demonstração.

1. Se existir uma forma modular não nula $f \in M_2(\Gamma)$, então deve haver algum $x \in \widehat{D} \cup i, \rho, \infty$ tal que $f(x) \neq 0$. Consequentemente, $\text{ord}_x f \neq 0$, o que leva a uma contradição com (16).
2. Demonstraremos o caso $k = 14$, sendo os demais casos análogos. Seja $f \in M_{14}(\Gamma)$ uma forma modular não nula. Pela equação (16), f deve satisfazer $\text{ord}_\infty(f) = \text{ord}_\tau(f) = 0$ para todo $\tau \in \widehat{D}$, além de $\text{ord}_i(f) = 1$ e $\text{ord}_\rho(f) = 2$. Se $g \in M_{14}(\Gamma)$ for outra forma modular não nula, então também deve satisfazer $\text{ord}_\infty(g) = 0$. Assim, a q -expansão de f e g é dada por $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)q^n$ e $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g)q^n$, com $a_0(f) \neq 0$ e $a_0(g) \neq 0$. Portanto, $f - \frac{a_0(f)}{a_0(g)}g \in M_{14}(\Gamma)$ e satisfaz $\text{ord}_\infty\left(f - \frac{a_0(f)}{a_0(g)}g\right) \geq 1$, o que implica que $f - \frac{a_0(f)}{a_0(g)}g \equiv 0$. Assim, f e g são linearmente dependentes.
3. Como $E_4 \in M_4(\Gamma)$, aplicando a equação (16), obtemos $\text{ord}_\infty(E_4) = \text{ord}_i(E_4) = \text{ord}_\tau(E_4) = 0, \forall \tau \in \widehat{D}$, e $\text{ord}_\rho(E_4) = 1$. Assim, ρ é o único zero de ordem 1 de E_4 . Pelo item 2 temos que $\dim M_4(\Gamma) = 1$, portanto $M_4(\Gamma)$ é gerada por E_4 .
4. A demonstração segue de forma análoga ao item 3. ■

O discriminante modular Δ é definido por:

$$\Delta := \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}.$$

A partir das equações (7) e (8), obtemos que $\Delta(\infty) = 0$, o que implica que Δ é uma forma modular (cuspidal) de peso 12 para Γ . Além disso, pela equação (16), concluímos que ∞ é o único zero de Δ , e que sua ordem de anulação é dada por $\text{ord}_\infty(\Delta) = 1$.

Proposição 3. Se $k \geq 0$ é um inteiro par, então:

$$\dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{12}; \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1, & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

Demonstração. Para qualquer $k \geq 4$, consideremos a sequência de homomorfismos:

$$0 \longrightarrow M_{k-12} \xrightarrow{\varphi} M_k \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \longrightarrow 0, \quad (17)$$

onde, para qualquer $f \in M_{k-12}$ e $g \in M_k$, definimos:

$$\varphi(f) = f\Delta \quad \text{e} \quad \psi(g) = g(\infty).$$

Note que se $k - 12 \leq 2$, então $M_{k-12} = 0$. É evidente que φ é injetora e, como $E_k(\infty) = 1$, concluímos que ψ é sobrejetora. Além disso, temos

$$\psi \circ \varphi(f) = \Delta(\infty)f(\infty) = 0,$$

o que implica $\text{Im}(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$. Por outro lado, se $g(\infty) = 0$, então $\text{ord}_x(g) - \text{ord}_x(\Delta) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H} \cup \infty$, pois ∞ é o único zero de Δ , e sabemos que $\text{ord}_{\infty}(\Delta) = 1$. Assim, $\frac{g}{\Delta}$ é holomorfa em $\mathcal{H} \cup \infty$, o que implica que $\frac{g}{\Delta} \in M_{k-12}(\Gamma)$. Logo, $\ker(\psi) \subseteq \text{Im}(\varphi)$. Portanto, a sequência de homomorfismos (17) é uma sequência exata, e concluímos que

$$\dim M_k(\Gamma) = \dim M_{k-12}(\Gamma) + 1.$$

Juntando isso com o item 2 da Proposição 2 e aplicando indução, obtemos o resultado desejado. ■

O espaço de formas modulares para Γ , denotado por $M(\Gamma)$, é a soma direta de $M_k(\Gamma)$'s, para todo $k \geq 0$, i.e., $M(\Gamma) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n(\Gamma)$.

Teorema 3. O espaço de formas modulares para Γ é gerado por E_4 e E_6 , ou seja, $M(\Gamma) = \mathbb{C}[E_4, E_6]$.

Demonstração. Para cada inteiro $k \geq 0$, consideremos o conjunto

$$B_k := \{E_4^m E_6^n \mid 4m + 6n = k, \text{ para } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Sejam $E_4^{m_1} E_6^{n_1} \in B_k$ e $E_4^{m_2} E_6^{n_2} \in B_k$ tais que $(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$. Isso implica que $m_1 \neq m_2$ ou $n_1 \neq n_2$, o que, em conjunto com os

itens 3 e 4 da Proposição 2, garante que as ordens de anulação de $E_4^{m_1}E_6^{n_1}$ e $E_4^{m_2}E_6^{n_2}$ são diferente em i ou ρ . Portanto, B_k é um subconjunto linearmente independente de $M_k(\Gamma)$. Além disso, percebemos que para inteiros ímpares, temos $\#B_k = 0$, e para inteiros pares,

$$\#B_k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor, & \text{se } k \equiv 2 \pmod{12}; \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1, & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

Assim, obtemos $\#B_k = \dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma)$. Como os elementos de B_k são linearmente independentes, concluímos que B_k é uma base para $M_k(\Gamma)$. ■

SISTEMA DE RAMANUJAN

Nessa seção iremos analisar o sistema de Ramanujan, um sistema de EDOs não-lineares que possui como uma solução a tripla ordenada (E_2, E_4, E_6) . Antes de partimos para esse resultado principal, devemos introduzir a seguinte proposição:

Proposição 4. (Efetividade das formas modulares) *Sejam f e g formas modulares para Γ de peso $k \in \mathbb{N}_0$, com q -expansões $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$ e $g(q) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)q^n$. Se $a(n) = b(n)$ para todo $0 \leq n \leq \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor$, então $f = g$.*

Demonstração. Seja $h := f - g$. Desse modo, h é uma forma modular para Γ de peso k . Sendo assim, por hipótese $\text{ord}_{\infty}(f) \geq \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1$, então a fórmula de valência implica que $h \equiv 0$. ■

Teorema 4. As séries de Eisenstein E_2 , E_4 e E_6 formam uma solução do sistema de Ramanujan:

$$\begin{cases} t'_1 = \frac{1}{12}(t_1^2 - t_2) \\ t'_2 = \frac{1}{3}(t_1 t_2 - t_3) \\ t'_3 = \frac{1}{2}(t_1 t_3 - t_2^2) \end{cases} \quad (18)$$

Aqui $*' = \frac{1}{2\pi i} \frac{d*}{d\tau} = q \frac{\partial *}{\partial q}$ é a derivada usual normalizada.

Demonstração. Podemos reescrever o sistema (18) como:

$$\begin{cases} t'_1 - \frac{1}{12}t_1^2 = -\frac{1}{12}t_2 \\ t'_2 - \frac{1}{3}t_1 t_2 = -\frac{1}{3}t_3 \\ t'_3 - \frac{1}{2}t_1 t_3 = -\frac{1}{2}t_2^2 \end{cases} \quad (19)$$

Aplicando a derivada à equação (11), obtemos:

$$\begin{aligned} (\gamma\tau)' E_2'(\gamma\tau) &= 2c\tau E_2(\tau) + (c\tau + d)^2 E_2'(\tau) - \frac{6c^2 i}{\pi}, \\ &\Rightarrow \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)' E_2'(\gamma\tau) = 2c\tau E_2(\tau) + (c\tau + d)^2 E_2'(\tau) - \frac{6c^2 i}{\pi}, \\ &\Rightarrow \frac{ac\tau + ad - ac\tau - bc}{(c\tau + d)^2} E_2'(\gamma\tau) = 2c\tau E_2(\tau) + (c\tau + d)^2 E_2'(\tau) - \frac{6c^2 i}{\pi}, \\ &\Rightarrow \frac{1}{(c\tau + d)^2} E_2'(\gamma\tau) = 2c\tau E_2(\tau) + (c\tau + d)^2 E_2'(\tau) - \frac{6c^2 i}{\pi}. \end{aligned}$$

Isolando $E_2'(\gamma\tau)$, temos:

$$E_2'(\gamma\tau) = 2c\tau(c\tau + d)^2 E_2(\tau) + (c\tau + d)^4 E_2'(\tau) - \frac{6c^2 i}{\pi} (c\tau + d)^2. \quad (20)$$

Além do mais, usando (15) para E_4 e E_6 , concluímos:

$$\begin{aligned} (c\tau + d)^{-6} E_4'(\gamma\tau) &= E_4'(\tau) + 4c(c\tau + d)^{-1} E_4(\tau), \\ &\Rightarrow E_4'(\gamma\tau) = 4c(c\tau + d)^5 E_4(\tau) + (c\tau + d)^6 E_4'(\tau). \end{aligned} \quad (21)$$

$$(c\tau + d)^{-8}E_6'(\gamma\tau) = E_6'(\tau) + 6c(c\tau + d)^{-1}E_6(\tau),$$

$$\Rightarrow E_6'(\gamma\tau) = 6c(c\tau + d)^7E_6(\tau) + (c\tau + d)^8E_6'(\tau). \quad (22)$$

Em (19), para usarmos a Proposição 4, precisamos mostrar primeiro que ao substituirmos $(t_1, t_2, t_3) = (E_2, E_4, E_6)$, ambos os lados são formas modulares do mesmo peso. Por se tratarem de derivadas de séries absolutamente convergentes e holomorfas no infinito, basta mostrar que os lados esquerdos satisfazem as equações funcionais para formas modulares de pesos 4, 6 e 8, respectivamente. O caso da matriz T sai diretamente da condição de modularidade. Assim, focaremos na matriz S .

Para o lado esquerdo da primeira EDO de (19), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} E_2' \left(-\frac{1}{\tau} \right) - \frac{1}{12} E_2^2 \left(-\frac{1}{\tau} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(2\tau^3 E_2(\tau) + \tau^4 E_2'(\tau) - \frac{6i}{\pi} \tau^2 \right) - \frac{1}{12} \left(\tau^2 E_2(\tau) - \frac{6i}{\pi} \tau \right)^2 \\ &= \frac{\tau^3}{\pi i} E_2(\tau) + \frac{\tau^4}{2\pi i} E_2'(\tau) - \frac{3}{\pi^2} \tau^2 - \frac{1}{12} \tau^4 E_2^2(\tau) + \frac{i}{\pi} \tau^3 E_2(\tau) + \frac{3}{\pi^2} \tau^2 \\ &= \tau^4 \left(\frac{E_2'(\tau)}{2\pi i} - \frac{1}{12} E_2^2(\tau) \right). \end{aligned}$$

De onde concluímos que ele é uma forma modular de peso 4. Já o lado direito da primeira equação é um múltiplo escalar de E_4 , então também é uma forma modular de peso 4.

Para o lado esquerdo da segunda EDO de (19), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} E_4' \left(-\frac{1}{\tau} \right) - \frac{1}{3} E_2 \left(-\frac{1}{\tau} \right) E_4 \left(-\frac{1}{\tau} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(4\tau^5 E_4(\tau) + \tau^6 E_4'(\tau) \right) - \frac{1}{3} \left(\tau^2 E_2(\tau) - \frac{6i}{\pi} \tau \right) \tau^4 E_4(\tau) \\ &= \frac{2\tau^5}{\pi i} E_4(\tau) + \frac{\tau^6}{2\pi i} E_4'(\tau) - \frac{1}{3} \tau^6 E_2(\tau) E_4(\tau) + \frac{2i}{\pi} \tau^5 E_4(\tau) \\ &= \tau^6 \left(\frac{1}{2\pi i} E_4'(\tau) - \frac{1}{3} E_2(\tau) E_4(\tau) \right) \end{aligned}$$

De onde concluímos que ele é uma forma modular de peso 6. Já o lado direito da equação é um múltiplo escalar de E_6 , então também é uma forma modular de peso 6.

Para o lado esquerdo da terceira equação de (19), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} E_6' \left(-\frac{1}{\tau} \right) - \frac{1}{2} E_2 \left(-\frac{1}{\tau} \right) E_6 \left(-\frac{1}{\tau} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} (6\tau^7 E_6(\tau) + \tau^8 E_6'(\tau)) - \frac{1}{2} \left(\tau^2 E_2(\tau) - \frac{6i}{\pi} \tau \right) \tau^6 E_6(\tau) \\ &= \frac{3\tau^7}{2\pi i} E_6(\tau) + \frac{\tau^8}{2\pi i} E_6'(\tau) - \frac{1}{2} \tau^8 E_2(\tau) E_6(\tau) + \frac{3i}{\pi} \tau^7 E_6(\tau) \\ &= \tau^8 \left(\frac{1}{2\pi i} E_6'(\tau) - \frac{1}{2} E_2(\tau) E_6(\tau) \right). \end{aligned}$$

Já o lado direito da equação é um múltiplo escalar do produto de duas formas modulares de peso 4, que como visto anteriormente, é uma forma modular de peso 8.

Uma vez que demonstramos que todos os lados esquerdos são formas modulares de pesos 4, 6 e 8, só nos resta comparar os coeficientes das q -expansões de ambos os lados. Em todas as equações, por se tratar de séries de Eisenstein normalizadas, o primeiro coeficiente de cada lado direito é igual à constante pelo qual ele está sendo multiplicado. Assim, obtemos o coeficiente constante de cada lado esquerdo:

$$\begin{aligned} qE_2' - \frac{1}{12} E_2^2 &= -\frac{1}{12} + \dots, \\ qE_4' - \frac{1}{3} E_2 E_4 &= -\frac{1}{3} + \dots, \\ qE_6' - \frac{1}{2} E_2 E_6 &= -\frac{1}{2} + \dots, \end{aligned}$$

que são os mesmos coeficientes constantes de $-\frac{1}{12} E_4(\tau)$, $-\frac{1}{3} E_6(\tau)$ e $-\frac{1}{2} E_4^2(\tau)$, respectivamente. Assim, o primeiro coeficiente de ambos os lados das EDOs dadas em (19) são iguais. Logo, pela efetividade das formas modulares, verificamos a igualdade de ambos os lados. Portanto, mostramos o resultado desejado, que as

formas modulares E_2, E_4, E_6 são soluções do sistema de Ramanujan. ■

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à UERJ pelo suporte acadêmico e institucional, bem como ao Departamento de Estágios e Bolsas/CETREINA da UERJ pelo apoio financeiro, por meio das bolsas do Projeto Prodocência, intitulado *Introdução às Formas Modulares*, que nos permitiu avançar nos estudos.

REFERÊNCIAS

- [1] GOUVÊA, F. Q. **Formas Modulares: Uma Introdução**. Monografias de Matemática N° 47, Rio de Janeiro: IMPA, 1990.
- [2] MASDEU, M. **Modular Forms**, University of Warwick, 2015. Disponível em: <https://mdave16.github.io/notes/Modular>. Acesso em: 10 mar. 2025.
- [3] NIKDELAN, Y. **Ramanujan-type systems of nonlinear ODEs for $\Gamma_0(2)$ and $\Gamma_0(3)$** . *Expositiones Mathematicae*, v. 40, n. 3, p. 409-431, 2022.

TRANSFORMANDO A EXPERIÊNCIA DO PACIENTE NO SUS COM O CHATBOT SUSI-CARIOCA

**Thalles Fontainha^{a,b,1}, Claudia Cappelli^b, Vera Maria
Benjamim Werneck^b**

^a CEFET-RJ, Rio de Janeiro, Brasil.

^b Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil.

Resumo: Este trabalho apresenta o desenvolvimento e a reavaliação do chatbot SUSi-Carioca, uma ferramenta baseada em Inteligência Artificial criada para facilitar o entendimento das informações de saúde pelos pacientes do Sistema Único de Saúde (SUS). O chatbot foi desenvolvido utilizando o Dialogflow, permitindo o Processamento de Linguagem Natural (NLP) para interpretar consultas realizadas via WhatsApp. O sistema não esteve integrado diretamente ao SUS, mas sim simulou interações para ajudar os pacientes a entenderem informações sobre suas consultas, medicamentos e exames.

Palavras-chave: Chatbot; linguagem simples; saúde digital.

INTRODUÇÃO

No Sistema Único de Saúde (SUS), diversos pacientes enfrentam desafios para entender informações sobre consultas, medicamentos e exames. Este trabalho discutiu o desenvolvimento do chatbot SUSi-Carioca no ano de 2022, uma solução implementada por 2 alunos da Graduação de Ciência da Computação que visou mitigar esses desafios por meio do uso de Inteligência Artificial e práticas de Linguagem Simples. Anos após a implementação do chatbot SUSi-Carioca, realizamos agora uma

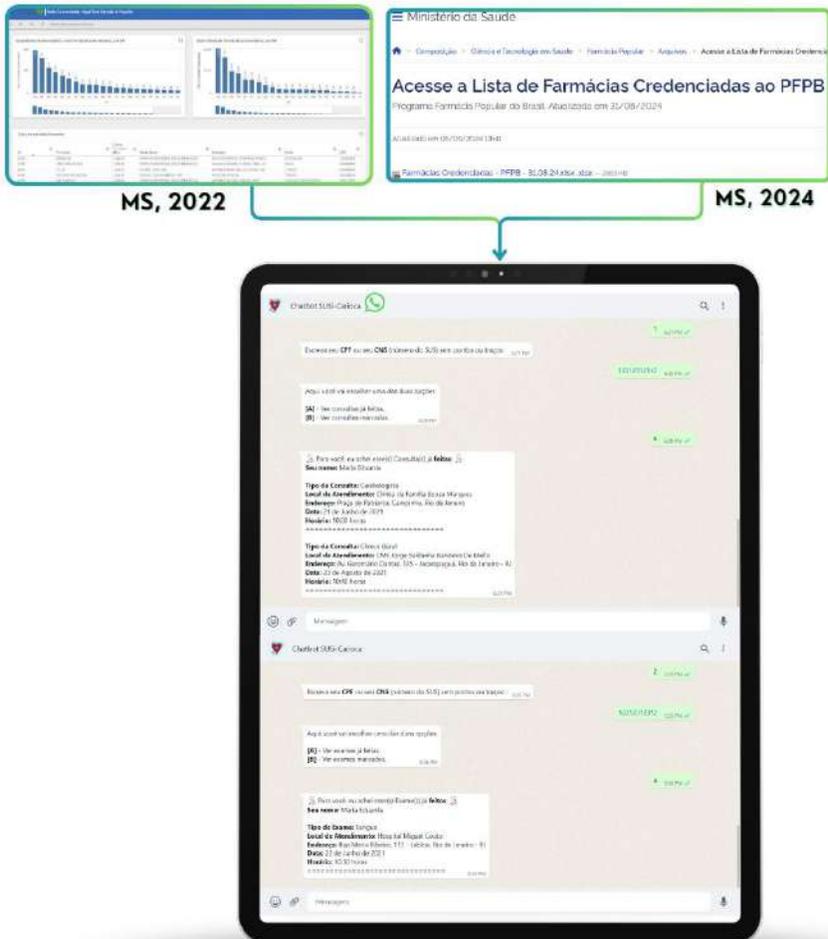
¹ cfthalles@gmail.com.

reavaliação abrangente para entender os impactos e benefícios a longo prazo dessa tecnologia. Esta reavaliação visa identificar as melhorias contínuas na experiência do paciente e na comunicação com o SUS, bem como analisar a evolução tecnológica de chatbots na área da saúde complementar.

Para reavaliar o projeto chatbot SUSi-Carioca, foi utilizado um estudo transversal retrospectivo. Esta abordagem envolveu a consulta às principais bases de dados através de busca eletrônica em fontes relevantes. O método científico retrospectivo é frequentemente utilizado para avaliar o desempenho de sistemas e tecnologias ao longo do tempo. Isto pode incluir a análise de logs de servidores para identificar padrões de falhas ou a revisão de dados de usuários para melhorar a interface de um software.

A Figura 1 compara o acesso aos dados do Ministério da Saúde (MS) em 2022 e 2024, evidenciando mudanças negativas na disponibilização das informações. Em 2024, os dados das farmácias credenciadas ao programa Farmácia Popular do Brasil (PFPPB) foram oferecidos como planilha em Excel para download, dificultando o acesso de quem não sabe utilizar o software Excel. Além disso, a falta de integração com o Departamento de Informação e Informática do Sistema Único de Saúde (DATASUS) impediu a realização de consultas personalizadas no chatbot. Nesse contexto, o chatbot SUS-Carioca foi desenvolvido então como um protótipo, demonstrando o potencial de soluções digitais para consultas de saúde. No entanto, a ausência de acesso aos dados dos cidadãos limitou significativamente sua funcionalidade, mas não impediu o estudo científico retrospectivo.

Figura 1. Comparativo de evolução no acesso a dados do Ministério da Saúde (MS) entre 2022 e 2024, integrando informações ao Chatbot SUS-Carioca.



Fonte: Os autores, 2025.

Figura 2. Etapas do método de avaliação do chatbot



Fonte: Os autores, 2025.

REVISÃO DA LITERATURA

Foi realizada uma revisão de literatura para contextualizar o projeto dentro das tendências de saúde digital e uso de chatbots. Foram analisados estudos anteriores que avaliaram o uso de tecnologias semelhantes para identificar padrões e comparar resultados recentes.

O estudo de Huang *et al.* (2023), intitulado “*Using a chatbot to reduce emergency department visits and unscheduled hospitalizations among patients with gynecologic malignancies during chemotherapy*”, avaliou a eficácia de um chatbot na coleta de sintomas relatados por pacientes durante o tratamento quimioterápico. Esse estudo retrospectivo comparou um grupo que utilizou o chatbot com um grupo que recebeu cuidados usuais, observando uma redução significativa nas visitas ao departamento de emergência e nas hospitalizações não programadas para o grupo que utilizou o chatbot.

Um estudo conduzido pela Universidade da Califórnia em Los Angeles (UCLA) explorou a viabilidade de utilizar processamento de linguagem natural (NLP) para categorizar dados de diálogos eletrônicos de pacientes com doenças inflamatórias intestinais (IBD). Os dados coletados entre 2013 e 2018 foram analisados para desenvolver um algoritmo que categorizou mensagens em várias categorias, como sintomas, medicamentos e consultas. O estudo de Zand *et al.* (2020) demonstrou que chatbots

podem ser eficazes na interação com pacientes e na coleta de dados, contribuindo para a eficiência clínica. Apesar dos benefícios amplamente reconhecidos dos chatbots no contexto da saúde, como suporte em tempo real e personalização, ainda existem limitações importantes a serem consideradas, principalmente em emergências, onde a intervenção humana é fundamental (Grabbe; Lamparth; Vasan, 2024).

No entanto, os autores destacam que os modelos atuais falham em alcançar o padrão de cuidado proporcionado por profissionais humanos, especialmente em emergências, onde respostas inadequadas podem acentuar os sintomas dos pacientes. Eles enfatizam a necessidade de um framework ético rigoroso que defina comportamentos padrões benéficos e níveis de autonomia para esses agentes de IA garantindo a detecção e gerenciamento seguros dos sintomas psiquiátricos comuns.

Este framework deve ser desenvolvido com base em avaliações conduzidas por clínicos de saúde mental e estar alinhado com requisitos éticos para prevenir danos aos usuários e garantir a segurança e eficácia no uso de fato dessas tecnologias.

ANÁLISE DE DADOS HISTÓRICOS

Nesta reavaliação, foram analisados novos dados que não estavam presentes no documento original do projeto Chatbot SUSi-Carioca. Esses dados incluíram métricas de usabilidade, feedback de usuários a longo prazo e análises detalhadas das interações dos pacientes com o chatbot ao longo dos anos (Fontainha *et al.*, 2023). Na Figura 3, utilizamos um infográfico que resume páginas do trabalho original por meio de técnicas gráficas e princípios da Gestalt para condensar e organizar dados complexos de forma visualmente acessível. Este infográfico foi projetado para facilitar a compreensão de dados, especialmente por usuários que têm dificuldade em interpretar grandes volumes de texto. (Oliveira; Cappelli, 2024).

A Linguagem Simples foi aplicada no Dialogflow por meio de regras de simplificação textual, tornando as respostas do chatbot mais acessíveis a diferentes níveis de letramento. Seus três pilares são:

- **Encontrar:** Facilitar a localização de informações.
- **Entender:** Tornar as informações compreensíveis.
- **Usar:** Facilitar o uso das informações.

Figura 3. Infográfico Condensado.



Fonte: Os autores, 2025.

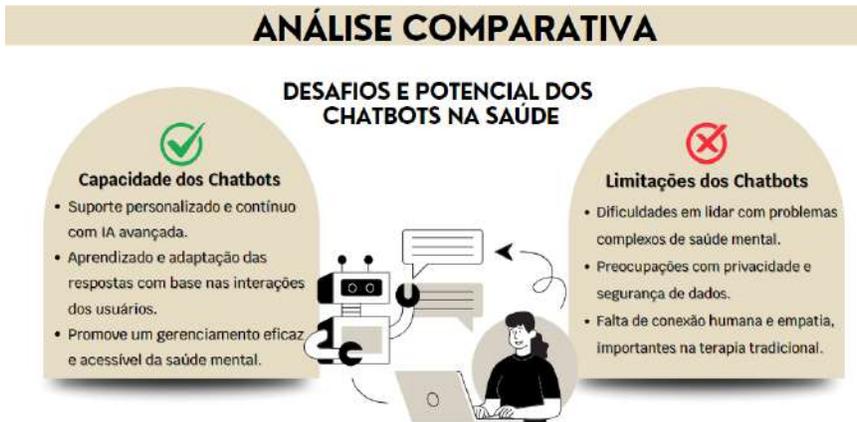
ANÁLISE COMPARATIVA

Os resultados foram comparados com estudos e projetos similares para identificar pontos fortes, fraquezas, oportunidades e ameaças por meio da análise SWOT (*Strengths, Weaknesses, Opportunities, Threats*). Segundo Hofrichter (2017), a classificação reflete a perspectiva sobre a estrutura do negócio.

A Figura 4 destaca as capacidades e limitações gerais dos chatbots na saúde, enfatizando tanto o suporte personalizado proporcionado por IA avançada quanto as dificuldades relacionadas à privacidade e à falta de conexão humana. Esses aspectos fornecem um contexto mais amplo para a análise comparativa do *Chatbot SUSi-Carioca*. Já na Figura 5, apresentamos

a análise SWOT do *Chatbot SUSi-Carioca*, comparando-o com concorrentes globais. Esse processo avaliou estudos anteriores e resultados relacionados, proporcionando uma visão sobre vantagens competitivas e desafios enfrentados, mesmo sendo um projeto de graduação.

Figura 4. Análise comparativa - Capacidade x Limitações dos Chatbots



Fonte: Os autores, 2025.

Figura 5. Matriz SWOT/FOFA - Análise dos pontos fortes, fracos, oportunidades e ameaças



Fonte: Os autores, 2025.

RESULTADOS

A análise completa dos dados históricos e feedback dos usuários testadores do Chatbot indicou que a SUSi-Carioca teve um impacto positivo na comunicação entre pacientes e unidades de saúde, como ilustrado na Figura 6. Comparações com outros estudos mostraram que a SUSi-Carioca se destacou pela simplicidade e eficácia, embora houvesse espaço para melhorias na personalização das respostas e integração com outros sistemas de saúde. A reavaliação do projeto SUSi-Carioca demonstrou que o uso de chatbots pode efetivamente melhorar a comunicação em sistemas de saúde públicos.

Figura 6. Resultados - Potenciais não explorados pelo SUS que a SUSi-Carioca possui



O sucesso do SUSi-Carioca residiu na sua capacidade de fornecer informações claras e acessíveis, alinhando-se às práticas de Linguagem Simples demonstrada no presente trabalho, e reforçada com novos infográficos presentes no presente trabalho.

REFERÊNCIAS

- FONTAINHA, T. C.; SILVA, N. J.; CAPPELLI, C. **SUSi-Carioca: Chatbot de pós-atendimento de consultas no SUS utilizando práticas de Linguagem Simples.** Anais Estendidos do XIX Simpósio Brasileiro de Sistemas de Informação, p. 38-47, 2023.
- GRABB, D.; LAMPARTH, M.; VASAN, N. **Risks from Language Models for Automated Mental Healthcare: Ethics and Structure for Implementation.** medRxiv, p. 2024.04. 07.24305462, 2024.
- HOFRICHTER, M. **Análise SWOT: Quando usar e como fazer.** Simplíssimo, 2017.
- HUANG, M-Y *et al.* **Using a chatbot to reduce emergency department visits and unscheduled hospitalizations among patients with gynecologic malignancies during chemotherapy: A retrospective cohort study.** Heliyon, v. 9, n. 5, 2023.

OLIVEIRA, R.; CAPPELLI, C. **UX e Linguagem Simples na Web:** Práticas para um Design de Interação mais Compreensível, 2024.

ZAND, A. *et al.* **An exploration into the use of a chatbot for patients with inflammatory bowel diseases:** retrospective cohort study. *Journal of medical Internet research*, v. 22, n. 5, p. e15589, 2020.

TRANSFORMANDO CONHECIMENTO EM AÇÃO: A LINHA DO TEMPO DO ELETROMAGNETISMO E O MOTOR ELÉTRICO

**Elizandra M. Silva^{a,1}, Deborah S. Freire^a, Andreson L.
C. Rêgo^a, Thiago D. Roberto^a**

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Neste trabalho, relatamos a experiência na aplicação da oficina *Construa seu motor elétrico!* vinculada ao projeto “Pontes entre a Universidade e a Escola Básica”, que visa aproximar o conhecimento acadêmico da realidade das escolas públicas do Rio de Janeiro. A atividade iniciou com uma jornada pela linha do tempo do eletromagnetismo, destacando as principais descobertas e cientistas que contribuíram para o entendimento desse fenômeno, como Hans Christian Oersted, Michael Faraday e James Clerk Maxwell. Após a introdução teórica, os estudantes foram convidados a montar seu próprio motor homopolar, um dispositivo simples que utiliza a interação entre um campo magnético e uma corrente elétrica para gerar movimento.

Palavras-chave: Oficinas didáticas; ensino de física; história da ciência; ciência e tecnologia;

INTRODUÇÃO

A busca por novas estratégias de ensino que promovam um desempenho positivo na trajetória acadêmica dos estudantes tem sido cada vez mais discutida nos últimos anos. Nesse contexto, as metodologias ativas se destacam como abordagens pedagógicas que têm como objetivo central a aprendizagem participativa dos alunos. De maneira diversificada, essas metodologias visam

¹ elizandra.silva@uerj.br.

estimular a participação dos estudantes, promovendo a construção ativa do conhecimento e o desenvolvimento de habilidades cognitivas e sociais. Segundo Olivier e Zampin (2024), esse tipo de abordagem pedagógica é amplamente utilizado no ambiente educacional com o intuito de tornar as aulas mais envolventes, relevantes e adaptadas às necessidades específicas dos alunos.

Para Konopka, Adaime e Mosele (2015), os elementos essenciais para a aprendizagem ativa envolvem a introdução de atividades na sala de aula e o estímulo ao engajamento dos alunos com essas tarefas. Não se trata apenas de incentivá-los a fazer perguntas durante a aula, mas de garantir que sua participação seja genuína. A simples inserção de uma atividade no ambiente escolar pode não gerar os resultados desejados, pois o sucesso dessa abordagem depende do envolvimento mental e físico dos estudantes.

A aprendizagem de tópicos de Física por meio de exposições e oficinas didáticas é uma abordagem educacional que valoriza a interação direta entre os estudantes. Essa metodologia proporciona experiências práticas e envolventes que, aliadas ao ensino em ambientes formais, contribuem para um aprendizado mais profundo e completo dos conteúdos. Dessa forma, prepara os alunos de maneira mais ampla para os desafios futuros.

Para Fernandes (2020), as oficinas temáticas consistem em um conjunto de atividades baseadas na realização de tarefas coletivas, por meio de investigação, ação e reflexão, que visam promover as mudanças desejadas, diferenciando-se do modelo tradicional de ensino. Essas oficinas são unidades de produção de conhecimento a partir de uma realidade concreta, com o objetivo de transferir esse conhecimento para a realidade e, assim, transformá-la.

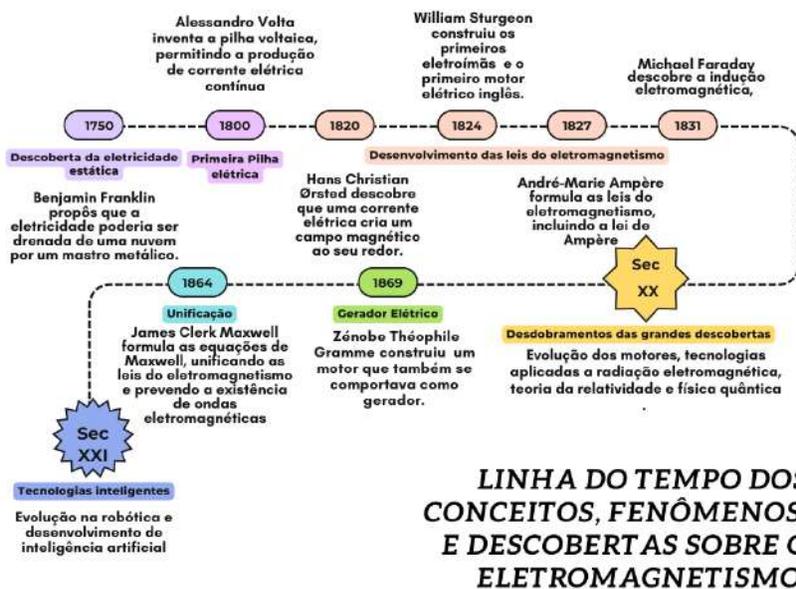
Neste relato de experiência descrevemos oficinas pedagógicas desenvolvidas do projeto de Iniciação Científica “Roteiros Experimentais de Baixo Custo para a Educação Básica”, que visa desenvolver e aplicar experimentos acessíveis, utilizando materiais e tecnologias disponíveis nas escolas. Em particular, a

proposta didática desenvolvida, intitulada, “Construa seu Motor elétrico!”, teve como objetivo abordar eletromagnetismo, história da ciência e as interfaces com as tecnologias do século XXI.

CONCEITOS INTRODUTÓRIOS UTILIZANDO A LINHA TEMPORAL

A oficina temática “Construa o seu motor elétrico!” explorou a evolução dos conceitos científicos envolvendo magnetismo através de uma linha temporal iniciada no famoso experimento de Benjamin Franklin. A Figura 1 ilustra a sequência de eventos envolvendo um intervalo de quase 300 anos.

Figura 1. Linha do tempo abordada na oficina.

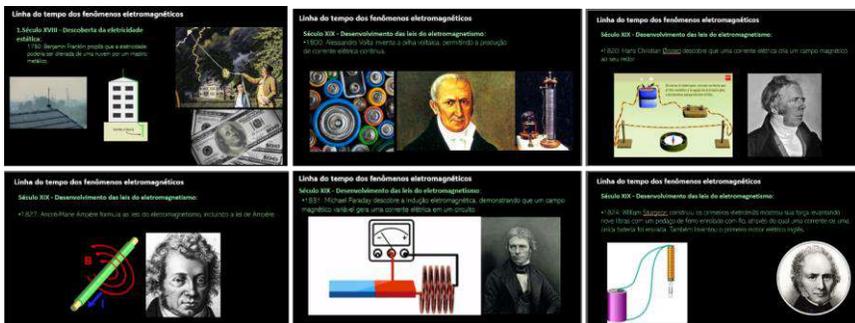


Fonte: Os Autores (2024) utilizando recursos do Canva educacional.

A abordagem a partir de uma linha temporal ajuda a organizar informações de maneira visual, o que favorece a memória e o aprendizado. Elas são úteis também para trabalhar

com conceitos como passado, presente e futuro, e para ajudar os alunos a estabelecerem conexões entre diferentes eventos ou períodos históricos. Cada cientista abordado foi apresentado como um marco na linha temporal, com fotografia, montagem experimental e/ou aplicação tecnológica mais popular. A Figura 2 apresenta alguns desses cientistas, relatando diferentes contextos do eletromagnetismo desenvolvido durante os séculos XVIII e XIX.

Figura 2. Slides utilizados na abordagem do eletromagnetismo nos séculos XVIII e XIX.



Fonte: Adaptadas de domínio público e *Creative Commons* (2024).

Recursos como animações e vídeos foram utilizados para ilustrar alguns experimentos. Certas imagens foram selecionadas para estabelecer efeitos de comparação em estruturas muito elevadas, como geradores eólicos com hélices de grandes dimensões, rotores de geradores de usinas hidroelétricas, como as apresentadas na Figura 3.

Figura 3. Alguns slides utilizados na abordagem do eletromagnetismo no século XX.



Fonte: Adaptadas de domínio público e *Creative Commons* (2024).

A análise do século XX nos permite explorar uma série de desdobramentos associados aos conceitos consolidados no século anterior. Permite espaço para as aplicações tecnológicas voltadas para formas de geração de energia renováveis, física moderna e contemporânea, telecomunicações e sobre questões de gênero na ciência.

A Figura 4, apresenta um slide, apresentado na oficina, citando cientistas envolvidos em grandes descobertas e invenções do século XX. Nicola Tesla, com suas inovações no campo da eletricidade e magnetismo, revolucionou o uso da corrente alternada, transformando a distribuição de energia elétrica. Max Planck, pai da teoria quântica, abriu portas para o entendimento das partículas subatômicas e das leis da física em escalas microscópicas. Marie Curie, pioneira na pesquisa sobre radiação, foi a primeira pessoa a ganhar dois Prêmios Nobel e sua descoberta do polônio e rádio teve enorme impacto na medicina e na física. Albert Einstein, com sua teoria da relatividade, desafiou as leis da física clássica e proporcionou uma nova visão sobre o espaço-tempo e a gravidade. Richard Feynman e Timothy John Berners-Lee foram fundamentais para moldar o mundo moderno. Feynman, com sua abordagem única e acessível, contribuiu enormemente para a mecânica quântica e a física de partículas, além de tornar a ciência mais próxima do público. Berners-Lee, criador da World Wide Web, transformou a maneira como nos conectamos e acessamos informações, moldando a era digital que

vivemos hoje. Cada um desses cientistas deixou um legado duradouro, sendo essenciais para os avanços tecnológicos, científicos e sociais que transformaram nossa compreensão do universo e a forma como interagimos com o mundo.

Figura 4. Grandes cientistas do século XX.



Fonte: Adaptadas de domínio público e *Creative Commons* (2024).

A presença de mais mulheres na ciência é fundamental não apenas para promover a igualdade de gênero, mas também para enriquecer o próprio avanço científico. A diversidade de perspectivas e experiências contribui para uma abordagem mais completa e inovadora na solução de problemas complexos. A equidade no campo científico não é apenas uma questão de justiça social, mas também um passo essencial para o progresso contínuo da humanidade.

Figura 5. Evolução da robótica e da inteligência artificial no século XXI.



Fonte: Adaptadas de domínio público e *Creative Commons* (2024).

Introduzimos o século XXI através um diálogo sobre o que os estudantes compreendem como descoberta ou invenção ocorrida neste primeiro quarto de século. Dentro de uma variedade de tópicos, nos concentramos na motivação experimental dessa atividade, que estabelece correlação com robótica, inteligência artificial (IA) e tecnologias da informação. A Figura 5, acima, ilustra esses temas.

A evolução da robótica e da IA tem transformado a medicina e a reabilitação física, proporcionando inovações significativas no tratamento e recuperação de pacientes. Robôs assistivos, como exoesqueletos, ajudam pessoas com paralisia a recuperar mobilidade, enquanto sistemas de IA analisam grandes volumes de dados para diagnosticar doenças com maior precisão. A robótica tem sido crucial em cirurgias minimamente invasivas, permitindo maior precisão e reduzindo os riscos.

PROPOSTA EXPERIMENTAL: O MOTOR HOMOPOLAR

O motor homopolar é um modelo didático de motor elétrico a corrente contínua. O nome “homopolar” é dado ao motor devido

à ausência de mudança de polaridade no campo magnético ou no sentido da corrente elétrica. A estrutura é composta por um fio de cobre modelado entorno de uma pilha alcalina e conectada a um ímã. Durante a exposição, compartilhamos um vídeo do motor em funcionamento seguido dos materiais utilizados, conforme ilustrado na Figura 6.

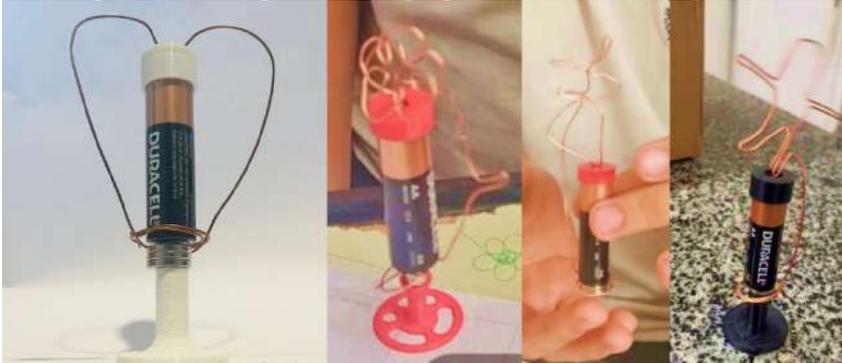
Figura 6. Slide com apresentação dos materiais utilizados na oficina.



Fonte: Os Autores, 2024.

Para que a montagem apresentasse estabilidade durante o movimento da espira do motor, foram produzidos suportes em uma impressora 3D e utilizados na base e topo dos motores. Alguns moldes, em formato de coração, também impressos em 3D, foram oferecidos aos estudantes, caso apresentassem alguma dificuldade na manipulação de uma forma livre. A Figura 7 ilustra diferentes modelos de motores homopolares apresentados aos participantes das oficinas.

Figura 7. Exemplo de design para o motor homopolar.



Fonte: Os Autores, 2024.

A Figura 8 apresenta um mosaico de fotos dos estudantes em ação na oficina. A realização do experimento proporciona ao estudante a oportunidade de elaborar e testar, de forma individual ou coletiva, diferentes designs de motores homopolares, levando em consideração diversos fatores cruciais. Durante o processo, os alunos podem investigar o equilíbrio da peça enquanto ela gira, ajustando variáveis como a intensidade do campo magnético por meio da combinação de ímãs, e avaliar como esses ajustes afetam a velocidade de rotação sob diferentes condições. Além disso, o experimento permite a análise da perda de energia na forma de calor, um fenômeno conhecido como efeito Joule, proporcionando uma compreensão prática dos princípios de física envolvidos, como a conversão de energia elétrica em energia mecânica e térmica.

Figura 8. Registros da atividade.



Fonte: Os Autores, 2024.

Em síntese, práticas pedagógicas mediadas por oficinas podem proporcionar aos estudantes a oportunidade de aplicar conceitos teóricos de maneira experimental, promovendo uma aprendizagem mais profunda e significativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência na oficina “Construa seu motor elétrico!” foi extremamente positiva, proporcionando aos participantes uma vivência prática e enriquecedora no universo da física e da engenharia. Ao construir e testar seus próprios motores, os alunos puderam aplicar conceitos teóricos de maneira tangível, explorando o funcionamento de um motor elétrico e compreendendo os princípios de eletricidade, magnetismo e energia. O ambiente de aprendizado colaborativo, onde os participantes trabalharam em grupos, estimulou a troca de ideias e o desenvolvimento de soluções criativas para desafios técnicos.

A utilização de uma linha do tempo para a introdução de conteúdos sobre eletromagnetismo se apresentou como uma abordagem pedagógica eficaz, pois permitiu aos estudantes visualizarem de maneira clara a evolução histórica dos principais

descobrimientos e avanços na área. Ao apresentar os marcos importantes, como as descobertas de André-Marie Ampère, Michael Faraday, James Clerk Maxwell e outros cientistas que contribuíram para o entendimento das interações entre eletricidade e magnetismo, a linha temporal auxiliou os alunos a perceberem como esses conceitos se desenvolveram e se conectaram ao longo do tempo.

AGRADECIMENTOS

O ponto de partida da experiência compartilhada neste trabalho só foi possível graças ao apoio financeiro adquirido em 2022, através dos projetos Pontes entre a universidade e a Escola Básica: promoção e construção do conhecimento científico (E-26/210.177/2022) fomentado pela FAPERJ, edital 45/2021 que oportunizou o projeto de iniciação científica e o trabalho em equipe desenvolvido pelos docentes.

REFERÊNCIAS

FERNANDES, M. *et al.* **Potencialidades do uso de oficinas no ensino de física: análise de uma estratégia para aulas iniciando por práticas experimentais.** Experiências em Ensino de Ciências V.15, No.1, 2020.

KONOPKA, C. L.; ADAIME, M. B.; MOSELE, P. H. **Active teaching and learning methodologies: some considerations.** Creative education, v. 6, n. 14, p. 1536-1545, 2015.

OLIVIER, C. E; ZAMPIN, I. C. **Importância das aplicações das metodologias ativas em sala de aula.** Revista Educação em Foco, v. 16, p. 1-19, 2024.

UMA ABORDAGEM DE APRENDIZADO PROFUNDO PARA ESTIMAR A POSIÇÃO RELATIVA DE FRAGMENTOS CERÂMICOS

Matheus Pinho^{a,1}, Guilherme Mota^a, Gilson Costa^a

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Brasil

Resumo: Cerâmica é um dos tipos mais comuns de vestígios humanos encontrados em contextos arqueológicos. A análise da cerâmica arqueológica tem grande potencial informativo, e sua reconstrução é uma tarefa demorada e repetitiva. Neste trabalho, investigamos uma abordagem baseada em aprendizado profundo para tornar esse processo mais eficiente, preciso e rápido. Dada uma nuvem de pontos de um fragmento em uma posição padronizada, denominada posição canônica, o método proposto prevê a transformação geométrica que move o fragmento para sua posição dentro do sistema de coordenadas do respectivo vaso. Entre os principais componentes deste método destacam-se duas redes neurais convolucionais profundas treinadas para prever os parâmetros da transformação euclidiana 3D. A primeira rede se dedica a prever os momentos de translação, e a outra infere os parâmetros de rotação. Em aplicações práticas, uma vez que a forma de um vaso é identificada, as redes podem ser treinadas para prever os parâmetros da transformação alvo. Dado um modelo 3D do vaso de interesse, ele é virtualmente quebrado inúmeras vezes para a produção de dados sintéticos de treinamento, que consistem em um grande conjunto de fragmentos virtuais. A arquitetura da rede neural convolucional 1D proposta aqui, chamada PotNet, foi projetada para realizar regressões não lineares.

Palavras-chave: Patrimônio cultural; artefatos cerâmicos; inteligência artificial; redes neurais artificiais.

¹ matheus.coelho@pos.ime.uerj.br.

INTRODUÇÃO

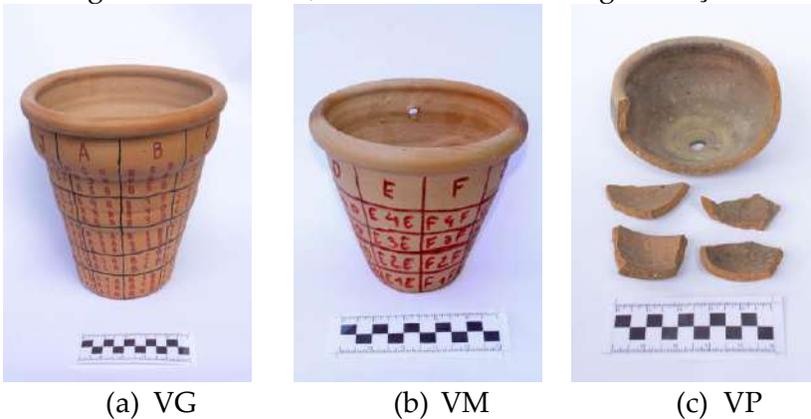
A importância da cerâmica na Arqueologia se dá pelo potencial informativo que ela agrega ao contexto arqueológico. A análise de cerâmica arqueológica permite que sejam extraídas informações relativas à datação daquele sítio, e são também uma forte evidência das tecnologias ali utilizadas. O reconhecimento das tradições cerâmicas é capaz de localizar o sítio arqueológico no tempo, bem como determinar sua distribuição espacial, evidenciando a tradição cultural daquela sociedade e os aspectos socioculturais envolvidos em sua utilização.

No processo de restauração da cerâmica arqueológica deve-se, primeiramente, agrupar os fragmentos que possivelmente pertençam a um mesmo vaso, baseando-se na classificação de tradições cerâmicas. Em seguida, compara-se os fragmentos um a um, visando seu encaixe até que todo o vaso seja reconstruído. Todo esse processo é lento, repetitivo e dependente da expertise do profissional encarregado.

O presente trabalho propõe um método para automatizar e acelerar o processo de reconstrução de cerâmica arqueológica a partir de seus fragmentos utilizando modelos 3D e redes neurais convolucionais. A abordagem envolve o treinamento de redes neurais artificiais para qualquer modelo específico de vaso. Nosso método explora duas redes para prever a respectiva matriz de transformação euclidiana. A primeira infere momentos de translação, enquanto a outra prevê os parâmetros de rotação. Mais especificamente, um modelo 3D de um fragmento cerâmico, representado como uma nuvem de pontos, é fornecido como entrada para o método. O resultado é uma matriz de transformação que posiciona o fragmento dentro do sistema de coordenadas do vaso. Para a reconstrução completa do vaso, seria necessário repetir a predição para todos os fragmentos, posicioná-los de acordo com as matrizes obtidas a partir das respostas das redes e uni-los em um único objeto.

A arquitetura de rede neural aqui proposta, chamada PotNet, é inspirada na arquitetura 3D POCO Net (Lee e Yang, 2021), por sua vez inspirada na PointNet (Qi *et al.*, 2017). Os dados usados no treinamento consistem em um conjunto de nuvens de pontos de fragmentos virtuais gerados pela quebra consecutiva de modelos 3D de vasos cerâmicos em ambiente virtual e são chamados de conjunto de dados sintéticos. O uso de dados sintéticos permite a produção de uma quantidade suficientemente grande de dados de treinamento. Além dos dados sintéticos, também avaliamos a performance das redes com fragmentos reais, obtidos a partir da quebra física de vasos reais.

Figura 1. Vasos VG, VM e VP antes da fragmentação.



Fonte: Os Autores, 2022.

MATERIAIS

A Figura 1 mostra os três vasos cerâmicos reais usados neste trabalho, denominados VG, VM e VP, acrônimos para Vaso Grande, Médio e Pequeno, respectivamente. A face externa de cada vaso foi dividida em setores, e marcações foram feitas em sua superfície. Dessa forma, ainda é possível reconhecer o encaixe correto de cada fragmento após a quebra. Para quebra, os vasos foram arremessados a uma altura de aproximadamente 1,5 m,

totalizando 57, 20 e 21 fragmentos para VG, VM e VP, respectivamente.

Os fragmentos resultantes foram digitalizados por um escâner 3D estereoscópico de luz estruturada, o escâner intraoral Virtuo Vivo™. Apesar de ter sido projetado para uso odontológico, ele se mostrou preciso o suficiente para gerar modelos 3D dos fragmentos.

Após a digitalização, os fragmentos correspondentes foram virtualmente encaixados usando o software de modelagem 3D Blender (Community, 2022b), até que todo o vaso fosse remontado de maneira não automatizada. Os vasos com os fragmentos encaixados são mostrados na Figura 2, na qual as bordas dos fragmentos podem ser percebidas. A partir desse processo, as malhas 3D dos fragmentos encaixados precisam ter seus vértices conectados, reproduzindo o procedimento de colagem de fragmentos no mundo real. Isso faz com que cada vaso seja restaurado em um único objeto sólido, e não mais um conjunto de fragmentos. Os vasos restaurados podem ser vistos na Figura 3, possuindo tamanhos de 22 cm (VG), 12 cm (VM) e 7cm (VP) de altura. Tais modelos 3D são a entrada para a geração dos dados sintéticos utilizados durante o treinamento.

Figura 2. Vasos com os fragmentos virtualmente encaixados.



Fonte: Os Autores, 2022.

Figura 3. Modelos 3D dos vasos reconstruídos.



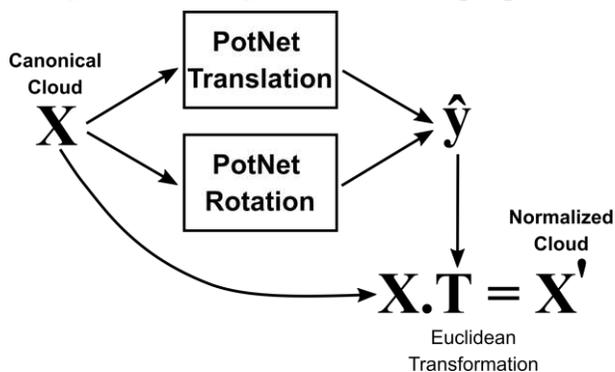
Fonte: Os Autores, 2022.

MÉTODO

A Figura 4 apresenta uma visão geral do método proposto. Dada uma nuvem de pontos X correspondente a um fragmento específico, expressa em seu sistema de coordenadas canônico (referido na Figura 4 como Canonical Cloud), o método produz X' , uma versão dessa nuvem de pontos expressa em termos do sistema de coordenadas (normalizado) do vaso. Matematicamente, esse processo consiste na aplicação de uma transformação euclidiana 3D no espaço afim, na forma de um operador linear T , onde $X' = X.T$. Aqui, X e X' são matrizes $p \times 4$, onde p representa o número de pontos em cada nuvem. A matriz T é obtida ao combinar a matriz de rotação 3×3 e o vetor de translação 3×1 em uma única matriz de transformação 4×4 . Assim, cada coluna destas matrizes denota um ponto 3D da nuvem, expresso em coordenadas homogêneas (obtidas pela concatenação do valor 1 após as respectivas coordenadas 3D).

Os coeficientes da matriz de transformação são obtidos por meio de uma rede neural com duas ramificações. Juntas, essas ramificações predizem os valores do vetor de parâmetros \hat{y} . Baseando-se exclusivamente em \hat{y} , um procedimento matemático determinístico gera a matriz de transformação T .

Figura 4. Visão geral do método proposto.



Fonte: Guilherme Mota, 2024.

Como pode ser observado na Figura 4, a parte fundamental do método consiste em uma arquitetura de rede neural com duas ramificações, ambas prevendo um resultado com base exatamente na mesma entrada X . As partes de rotação e translação da rede neural podem ser de qualquer arquitetura de rede neural que receba nuvens de pontos como entrada. No entanto, propomos que seja usado como *backbone* do método a arquitetura PotNet desenvolvida e apresentada neste trabalho. Rotação e translação são treinadas de maneira independente. A rede de translação produz um vetor de saída bidimensional, relativo aos valores de translação nos eixos y e z , enquanto a rede de rotação produz, na saída, um vetor de seis dimensões, correspondente às duas primeiras colunas da matriz de rotação que leva o fragmento ao espaço de referência.

Para modelar o problema, primeiramente, assumimos que os vasos são simétricos em relação ao eixo y , ou seja, um mesmo fragmento tem virtualmente infinitas posições ao redor desse eixo. Assim, por definição, a predição de orientação é um problema mal condicionado. Para superar o mal condicionamento, propomos simplificar o problema reduzindo o sistema do vaso em um grau de liberdade ao eliminar o ângulo relativo ao eixo de rotação. Isso

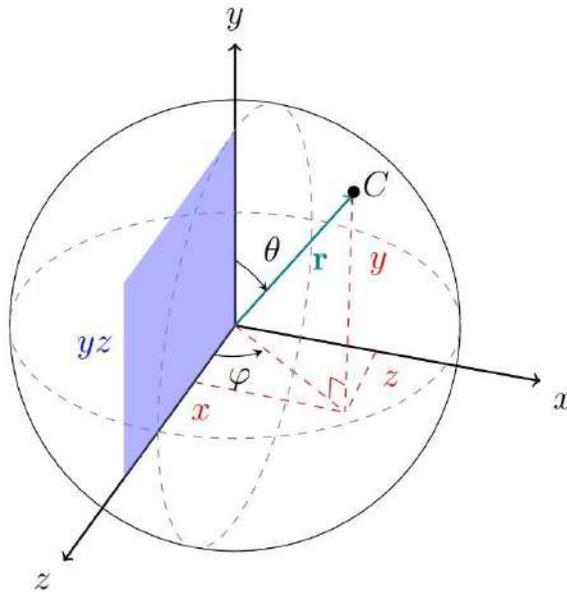
resulta no chamado “sistema normalizado”², que consiste em trazer o centroide do fragmento para o plano yz . Por outro lado, definimos um sistema interno absoluto e único para cada fragmento. Esse sistema, que depende apenas da forma do fragmento, foi denominado “sistema canônico”.

Sistema normalizado

As nuvens normalizadas são obtidas eliminando o ângulo de rotação em torno do eixo de revolução do vaso, movendo o centróide dos fragmentos para o plano yz . a nuvem de pontos original do fragmento. Isso cria uma posição padrão para cada fragmento em relação ao sistema do vaso. Os fragmentos em espaço normalizado representam as posições de referência (*ground truth*), que devem ser comparadas com as previsões da rede a fim de medir sua capacidade de posicionar corretamente um fragmento na posição esperada.

² Aqui, utilizamos o sistema de coordenadas de mão direita como nosso sistema de referência, com o eixo y apontando para cima, coincidente com o eixo de rotação.

Figura 5. Sistema de coordenadas esféricas, onde C é o centro de massa da nuvem de pontos de um fragmento no sistema original do vaso.



Fonte: Os Autores, 2022.

Mover o centróide para a posição desejada é facilitado pela definição de um sistema de coordenadas esféricas, conforme ilustrado na Figura 4. Dadas as coordenadas cartesianas (x, y, z) do centróide C , a equação (1) apresenta a matriz de rotação que leva a nuvem de pontos para sua posição normalizada.

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde $\varphi = (x/z)$. Assim, dado $x_o = x_o, y_o, z_o$, um vetor que expressa um ponto da nuvem de um fragmento no sistema físico do vaso, o vetor x' , que representa as coordenadas normalizadas desse ponto, é obtido multiplicando R_φ por x_o .

Sistema canônico

A nuvem canônica refere-se à forma em que os fragmentos são passados como entrada para o método. Seu respectivo sistema de coordenadas ajuda a controlar os graus de liberdade do processo de orientação dos fragmentos, criando um modelo canônico determinístico e exclusivo para qualquer fragmento. A origem do sistema de coordenadas canônico coincide com o centróide do fragmento, enquanto o maior comprimento do paralelepípedo envoltório mínimo do fragmento fica paralelo ao eixo x .

Trazer uma nuvem de pontos de seu sistema de coordenadas arbitrário para sua forma canônica envolve três etapas. Primeiramente, deve-se obter o paralelepípedo envoltório mínimo que envolve o fragmento. Em seguida, os pontos da nuvem são transladados, posicionando o centróide do fragmento na origem do sistema de coordenadas. Por fim, a Decomposição em Valores Singulares (*Singular Value Decomposition, SVD*) (Loan, 1976) fornece a matriz que projeta a nuvem no sistema de coordenadas canônico.

O cálculo do paralelepípedo envoltório mínimo é realizado com uma alternativa mais rápida ao método de O'Rourke (1985): o algoritmo de Jylänki (2015), implementado na API Trimesh (Dawson-Haggerty, 2019).

Com relação à SVD, ela consiste basicamente na fatoração de uma matriz retangular A pelo produto de três outras matrizes: uma matriz ortogonal $m \times m$, U , cujas colunas são os valores singulares à esquerda de A ; uma matriz diagonal retangular $m \times n$, Σ , contendo os valores singulares de A em ordem decrescente; e a transposta de uma matriz ortogonal $n \times n$, V , cujas colunas são os valores singulares à direita de A , conforme a forma:

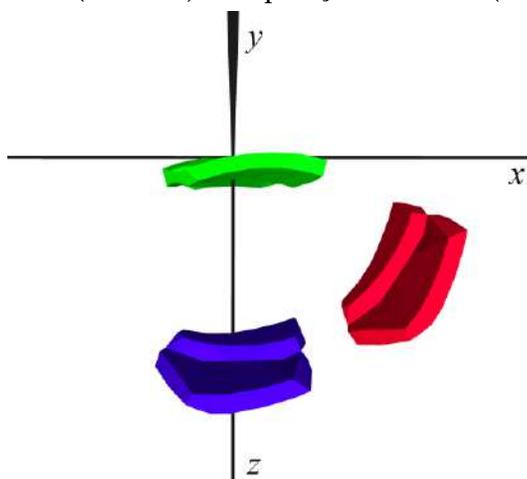
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

Neste trabalho, A é uma matriz de ordem 8 por 3 contendo as coordenadas dos vértices do paralelepípedo envoltório mínimo com centróide na origem. Σ possui as mesmas dimensões de A ,

enquanto U e V têm ordens 8 e 3, respectivamente. A multiplicação AV projeta os vértices do paralelepípedo para a posição canônica.

A Figura 6 apresenta um fragmento arbitrário em suas três diferentes posições: posição original em relação ao vaso (vermelho), na posição normalizada (azul) e na posição canônica (verde).

Figura 6. O mesmo fragmento em sua posição original, em relação ao sistema de coordenadas do vaso (em vermelho), na posição normalizada (em azul) e na posição canônica (em verde).



Fonte: Os Autores, 2023.

Transformação euclidiana alvo

Uma vez obtidas as nuvens de pontos normalizada e canônica de um fragmento, é necessário determinar a transformação que relaciona ambas as nuvens. A transformação da posição canônica para a normalizada é a utilizada para criar o *target* de treinamento y , que será posteriormente comparado com a predição da PotNet, \hat{y} . Aqui, o algoritmo de Kabsch (Arun *et al.*, 1987; Malischewski *et al.*, 2016) é empregado para calcular os componentes de rotação dos targets de treinamento y . O algoritmo

de Kabsch é um método para calcular a matriz de rotação ótima que minimiza o desvio quadrático médio entre dois conjuntos de pontos.

Propomos o uso de um vetor de seis dimensões para modelar a matriz de rotação. Esse vetor abrange os elementos t_{11} , t_{21} , t_{31} , t_{12} , t_{22} e t_{32} da matriz de rotação. A matriz de rotação 3 por 3 completa pode ser recuperada usando-se o processo de Gram-Schmidt (Zhou *et al.*, 2019).

PotNet

Apresentamos a PotNet, uma arquitetura de rede neural dedicada à regressão não linear, cujo design foi inspirado na rede 3D POCO Net (Lee e Yang, 2021). De maneira geral, a PotNet é composta por várias camadas convolucionais unidimensionais, seguidas por uma camada de *max pooling* unidimensional global, com o objetivo de gerar uma série de características para a nuvem de pontos de entrada. Essas características passam por uma rede *multi-layer perceptron* (MLP) construída sobre as camadas convolucionais. A maioria das camadas da PotNet tem funções de ativação ReLU, sendo a única exceção a camada de saída, que tem ativação linear. Neste trabalho são usadas cinco camadas convolucionais, contendo respectivamente 64, 64, 64, 128 e 1024 filtros. As camadas MLP ocultas, que utilizam *batch normalization*, tem 512 e 256 neurônios, enquanto a camada de saída contém N neurônios. O número de neurônios na camada de saída pode ser 2, caso seja a rede de translação, ou 6, se for de rotação. A arquitetura da PotNet está resumida na Tabela 1.

Procedimento de treinamento

Modelos de aprendizado profundo são conhecidos por demandarem grandes volumes de dados de treinamento. No entanto, o acesso a modelos 3D de vasos arqueológicos é limitado devido à incompletude dos registros arqueológicos, aos altos

custos associados ao processo de catalogação e à sua natureza demorada.

Uma alternativa para lidar com essa escassez de dados é utilizar modelos restaurados, como os apresentados na Figura 3, para produzir dados sintéticos de treinamento. Nossa abordagem se baseia em um procedimento virtual de fragmentação de vasos que pode ser instanciado com diferentes parâmetros para gerar uma quantidade arbitrária de fragmentos sintéticos para um vaso específico. Em seguida, as nuvens de pontos são colocadas nas posições normalizada e canônica. Por fim, a respectiva transformação Euclidiana alvo é calculada utilizando o algoritmo de Kabsch, conforme descrito anteriormente.

Tabela 1. Resumo da PotNet. M é número de pontos na nuvem de pontos e N denota a dimensão do vetor de saída. N assume o valor 6 para rotação e 2 para translação.

Layer type	Output Shape	Parameters
Input	$M \times 3$	0
Conv 1D $1 \times 3 / 64 + \text{ReLU}$	$M \times 64$	256
Conv 1D $1 \times 64 / 64 + \text{ReLU}$	$M \times 64$	4160
Conv 1D $1 \times 64 / 64 + \text{ReLU}$	$M \times 64$	4160
Conv 1D $1 \times 64 / 128 + \text{ReLU}$	$M \times 128$	8320
Conv 1D $1 \times 128 / 1024 + \text{ReLU}$	$M \times 1024$	132096
Global Max Pooling 1D	M	0
Dense 512	512	$(M + 1) \times 512$
Batch Normalization	512	2048
ReLU	512	0
Dense 256	256	131328
Batch Normalization	256	1024
ReLU	256	0
Dropout	256	0
Dense N	N	$257 \times N$
Linear	N	0

Fonte: Os Autores, 2023.

Rotação e translação são treinadas de forma independente através de um processo de otimização que minimiza uma função

de perda específica. Assim, o vetor de parâmetros y reúne os componentes de rotação y_R e os momentos de translação y_T . Como de costume, as perdas relacionam os vetores alvo (y) e previsto (\hat{y}). Portanto, as respectivas funções de perda $L_R = L2(y_R, \hat{y}_R)$ e $L_T = L2(y_T, \hat{y}_T)$ são utilizadas para o treinamento de cada rede. A norma L2 entre os vetores alvo e previsto é apresentada na equação (2).

$$L2(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \sqrt{(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y})^T (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y})} \quad (2)$$

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Em relação ao procedimento experimental, esta seção aborda detalhes da implementação do método e descrição dos conjuntos de dados.

Procedimento de quebra virtual

Para lidar com a necessidade de grandes volumes de dados no treinamento de redes neurais artificiais, desenvolvemos um método para produzir automaticamente fragmentos sintéticos. Para isso, utilizamos a ferramenta *Cell Fracture*, um recurso nativo do software Blender projetado para fragmentar modelos digitais em um número arbitrário de fragmentos. Essa ferramenta é baseada em uma implementação de Diagrama de Voronoi 3D para fragmentação de poliedros (Mark *et al.*, 2008; Ronnegren, 2020). O *Cell Fracture* implementa um método não determinístico, cujo resultado é influenciado por diversos parâmetros, incluindo o número máximo de fragmentos gerados e um *seed* aleatório para a geração de ruído, variando de 0 a 1. Para um objeto regular, como um cubo, o valor 0 gera fragmentos mais uniformes, enquanto o valor 1 gera fragmentos mais naturais. Para objetos irregulares, a distribuição dos pontos de Voronoi é sempre aleatória, resultando em fragmentos com formas desiguais e naturais. Assim, mesmo fixando o valor do parâmetro de ruído, a distribuição dos pontos

no processo de fragmentação ainda será aleatória. Neste trabalho, o valor do parâmetro de ruído foi fixado em 0,5. O número máximo de fragmentos em cada execução foi definido como o limite superior do número total de fragmentos reais para cada vaso.

Com o Cell Fracture, o modelo 3D do vaso restaurado VG (ver Figura 3a) foi fragmentado 2.000 vezes, com um máximo de 60 fragmentos sintéticos em cada quebra, sendo 1.800 quebras separadas para treinamento e 200 para teste. Os modelos 3D dos vasos restaurados VM e VP (ver Figuras 3b e 3c) foram fragmentados 3.300 vezes cada, com um máximo de 30 fragmentos por quebra, sendo 3.000 quebras para treinamento e 300 para teste.

Conjunto de dados sintético

Os fragmentos sintéticos são normalizados e posteriormente colocados na posição canônica. Em seguida, as respectivas matrizes de transformação alvo são calculadas. Após esse processo, é aplicado o filtro de *Poisson-disk sampling* (Corsini; Cignoni; Scopigno, 2012) do software Meshlab (Cignoni *et al.*, 2008) a cada fragmento virtual (já em posição canônica), com o objetivo de padronizar o número de pontos nas nuvens de pontos. As nuvens resultantes são então representadas por uma matriz de 1.024×3 .

Parte dos fragmentos sintéticos é descartada; apenas aqueles cujos respectivos paralelepípedos envoltórios canônicos excedem 10 cm^3 foram selecionados para compor os conjuntos de dados. A Tabela 2 apresenta o número de fragmentos sintéticos utilizados nas etapas de treino e teste da PotNet.

Tabela 2. Quantities of synthetic sherds in the training and testing sets.

Vessel	Train	Test	Total
LV	78,892	8,695	87,587
MV	76,664	7,816	84,480
SV	77,377	7,694	85,071

Fonte: Os Autores, 2023.

Lembramos que 57, 20 e 21 fragmentos do mundo real foram selecionados a partir da fragmentação física dos vasos reais VG, VM e VP, respectivamente. Esses fragmentos também foram utilizados para avaliar as instâncias da PotNet.

Treinamento

A PotNet foi treinada independentemente para cada vaso, resultando em três instâncias distintas das redes de rotação e translação. Foi usado um *batch size* de 128, otimizador Adam e taxa de aprendizado de 0,001. A rede de rotação foi treinada por 1.500 épocas, enquanto a de translação foi treinada por 1.000 épocas.

O treinamento foi realizado em um Intel Core i9-12900F de 12ª geração, hexacore de 5,1GHz, GPU NVIDIA GeForce RTX 4090, 128GB RAM, com o sistema operacional Ubuntu 22.04.3 LTS, kernel Linux 6.2.0-37-generic, Python 3.10.12 e Tensorflow 2.10. A PotNet levou cerca de 6 horas sem *early stopping*.

O código com os modelos da PotNet, incluindo os *scripts* de treinamento e testes, está disponível em <https://github.com/matfcp/PotNet>. Esse repositório também contém os modelos 3D dos vasos utilizados nos experimentos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise desta seção diz respeito à qualidade das previsões ao gerar as matrizes de transformação T que levam as nuvens de pontos canônicas dos fragmentos para o espaço normalizado — a posição esperada.

Após a predição, cada ponto x_i na nuvem canônica é multiplicado pela matriz T correspondente, resultando em \hat{x}_i' , um ponto previsto que deveria coincidir com x_i' , seu homólogo na nuvem normalizada de referência. As posições preditas dos pontos são comparadas às respectivas posições normalizadas de referência para calcular os erros relativos. Como as nuvens de pontos predita e normalizada de um fragmento possuem

exatamente os mesmos pontos, o erro exato entre essas duas nuvens pode ser determinado.

Os erros são calculados considerando cada ponto e cada eixo de coordenadas. A partir das diferenças nas posições de cada ponto, foi computado o Erro Quadrático Médio (RMSE), conforme definido na equação (3).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\hat{\mathbf{x}}'_i - \mathbf{x}'_i\|_2^2} \quad (3)$$

As distâncias ponto a ponto, coordenada a coordenada são armazenadas em único vetor, com o cálculo de um único RMSE sendo feito em seguida. Tais resultados compõem a coluna “RMSE” das tabelas. A coluna “RMSE (x, y, z)” apresenta o cálculo dos erros ponto a ponto relativos a cada coordenada. O desvio padrão dos erros da coluna “RMSE” são apresentados na coluna “STD”.

Considerando a forma como foi calculado, o valor do RMSE é mais penalizado pelo erro de translação, visto que posicionar incorretamente um fragmento no espaço aumenta as distâncias entre os pontos das nuvens predita e normalizada, mesmo que elas estejam perfeitamente alinhadas. Futuramente, pretendemos avaliar os erros de rotação e translação separadamente, de maneira a obter duas diferentes métricas comparativas.

Resultados para o conjunto de testes sintético

A Tabela 3 apresenta os valores de RMSE, RMSE vetorial e desvio padrão obtidos para o conjunto de testes sintético. Em média, o erro de posicionamento entre as nuvens predita e normalizada dos fragmentos sintéticos é inferior a 1,8 cm para todos os vasos (coluna “RMSE”), o que consideramos pequeno em relação aos tamanhos dos vasos. O desvio padrão dos erros para todos os vasos é inferior a 1 mm, indicando estabilidade dos erros

nas predições. Em relação à coluna “RMSE (x, y, z)”, o eixo com maior variação é o vertical (y), que representa a altura do vaso.

Tabela 3. Métricas de avaliação da PotNet para todo o conjunto sintético de testes de VG, VM e VP (valores em metros).

	RMSE	RMSE (x,y,z)	STD
LV	0.025	(0.01, 0.021, 0.009)	0.001
MV	0.017	(0.008, 0.014, 0.007)	0.0004
SV	0.013	(0.008, 0.009, 0.006)	0.0002

Fonte: Os Autores, 2023.

Resultados para o conjunto de testes real

Nesses experimentos utilizamos as redes de rotação e translação, treinadas com os conjuntos sintéticos de fragmentos, para validar o método proposto com objetos reais para demonstrar sua aplicabilidade a problemas do mundo real. É importante ressaltar que os fragmentos reais não foram utilizados no treinamento das redes.

O conjunto de testes do mundo real é composto por 57, 20 e 21 fragmentos reais obtidos a partir da quebra física dos vasos reais VG, VM e VP, respectivamente. Esses fragmentos foram escaneados em 3D e decimados por um fator de 3.000. Após a decimação, cada fragmento foi reamostrado em 1.024 pontos utilizando o filtro Poisson-disk sampling do Meshlab, resultando em uma representação em forma de nuvem de pontos. Cada nuvem de pontos foi posicionada em sua posição canônica e utilizada como entrada para as redes treinadas.

Tabela 4. Métricas de avaliação da PotNet para todo o conjunto de testes real de VG, VM e VP (valores em metros).

	RMSE	RMSE (x,y,z)	STD
LV	0.034	(0.009, 0.026, 0.017)	0.0006
MV	0.019	(0.007, 0.01, 0.012)	0.0002
SV	0.023	(0.01, 0.012, 0.013)	0.0003

Fonte: Os Autores, 2023.

A Tabela 4 apresenta os erros obtidos para os fragmentos reais dos vasos VG, VM e VP, que são consistentes com os resultados obtidos para o conjunto sintético de testes (mostrados na Tabela 3). Acreditamos que os resultados ligeiramente piores para os fragmentos reais ocorrem pois estes têm superfícies mais irregulares se comparados àqueles gerados por computador, que possuem superfícies mais suaves e regulares. Isso resulta em uma distribuição de vértices mais complexa nos fragmentos reais, o que torna o aprendizado mais desafiador para a rede.

Para fins de visualização, é suficiente multiplicar a nuvem de pontos do fragmento na posição predita em espaço normalizado pela inversa da matriz \mathbf{R}_ϕ , realizando uma rotação da nuvem ao redor do eixo y no sentido anti-horário, trazendo o fragmento do espaço normalizado para o espaço do vaso. Isso fará com que o fragmento retorne à sua posição verdadeira dentro do sistema de coordenadas do vaso, garantindo que as predições de rotação e translação sejam mantidas.

Apesar das variações entre os fragmentos individuais, de forma geral, os resultados qualitativos apresentados na Figura 7 estão próximos do esperado, mostrando que os modelos de rotação e translação aproximam-se de maneira eficaz dos resultados esperados em um processo de reconstrução de vasos de cerâmica a partir de seus fragmentos.

Figura 7. Fragmentos do conjunto de testes do mundo real colocados nas posições previstas e rotacionados em sentido anti-horário pelo inverso da matriz R_φ .



Fonte: Os Autores, 2023.

CONCLUSÃO

No presente trabalho, propomos e avaliamos uma abordagem baseada em aprendizado profundo para auxiliar na reconstrução de artefatos cerâmicos a partir de seus fragmentos. O método proposto funciona inferindo a transformação geométrica que move um modelo 3D de um fragmento em uma posição padrão (posição canônica) para sua posição relativa ao sistema de coordenadas do respectivo vaso (posição normalizada).

O método foi avaliado utilizando três vasos reais distintos. Os vasos foram primeiramente quebrados fisicamente em fragmentos reais. Os fragmentos de cada vaso foram digitalmente escaneados e uma nuvem de pontos 3D de cada fragmento foi produzida. Os vasos foram então reconstituídos em modelos 3D, que posteriormente foram quebrados digitalmente várias vezes para produzir fragmentos virtuais. Os fragmentos virtuais foram então usados para treinar redes neurais convolucionais com a arquitetura PotNet aqui proposta. Dois modelos da PotNet foram treinados para cada tipo de vaso: um era responsável por prever os momentos de translação e o outro por prever os parâmetros de rotação da transformação geométrica associada a um único fragmento.

Nos experimentos, as nuvens de pontos dos fragmentos reais foram submetidas às redes, que previram a transformação que

as moveria para suas posições relativas no espaço normalizado. Os resultados foram considerados satisfatórios, já que os erros médios para todos os vasos ficaram na faixa de poucos centímetros. Os resultados também foram muito estáveis, com desvios padrão na faixa milimétrica. Os resultados qualitativos, obtidos por meio da comparação visual dos fragmentos em suas posições reais e preditas, também foram satisfatórios.

Na continuidade deste trabalho, planejamos investigar melhorias na arquitetura PotNet proposta em busca de maiores precisões de posicionamento. Também planejamos estender o método propondo uma arquitetura mais geral, que não apenas preveja a posição de um fragmento, mas também forneça uma probabilidade de o fragmento pertencer a uma forma de vaso específica. Isso ajudaria os pesquisadores a separar fragmentos de diferentes vasos encontrados em um mesmo sítio arqueológico. Finalmente, planejamos explorar texturas e padrões decorativos para, de forma automática, unir os fragmentos de um mesmo vaso.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de expressar nossa gratidão à Neodent e ao Grupo Straumann por fornecerem o scanner intraoral Virtuo Vivo™, que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho. Este trabalho foi parcialmente apoiado pela Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

REFERÊNCIAS

ARUN, K. S.; HUANG, T. S.; BLOSTEIN, S. D. **Least-squares fitting of two 3-d point sets**. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, IEEE, PAMI-9, n. 5, p. 698-700, 1987.

CIGNONI, P. *et al.* **MeshLab: an Open-Source Mesh Processing Tool**. In: SCARANO, V.; CHIARA, R. D.; ERRA, U. (Eds.). Eurographics Italian Chapter Conference. [S.l.]: The Eurographics Association, 2008.

COMMUNITY, B. O. **Blender**. **Stichting Blender Foundation**, Amsterdam, 2022b. Disponível em: <http://www.blender.org>. Acesso em: 15 de jul. 2022.

CORSINI, M.; CIGNONI, P.; SCOPIGNO, R. **Efficient and flexible sampling with blue noise properties of triangular meshes**. IEEE transactions on visualization and computer graphics, IEEE, v. 18, n. 6, p. 914-924, 2012.

DAWSON-HAGGERTY, M. **Trimesh**. 2019. Disponível em: <https://trimsh.org/>. Acesso em: 21 jul. 2022.

JYLÄNKI, J. **An exact algorithm for finding minimum oriented bounding boxes**. Semantic Scholar., 2015. Disponível em: <https://wiki.replimat.org/images/4/44/291498143-minobb-jylanki-2015-06-01-pdf.pdf>. Acesso em: 15 de jul. 2022.

LEE, S.; YANG, Y. **Progressive deep learning framework for recognizing 3d orientations and object class based on point cloud representation**. Sensors, MDPI, v. 21, n. 18, p. 6108, 2021.

LOAN, C. F. V. **Generalizing the singular value decomposition**. SIAM Journal on numerical Analysis, SIAM, v. 13, n. 1, p. 76-83, 1976.

MALISCHEWSKI, S.; SCHUMANN, H.; HOFFMANN, D. **Kabsch Algorithm**. 2016. Disponível em: <https://biomolecularstructures.readthedocs.io/en/latest/kabsch/>. Acesso em: 25 de jul. 2022.

MARK, d. B. *et al.* **Computational geometry algorithms and applications**. [S.l.]: Spinger, 2008.

O'ROURKE, J. **Finding minimal enclosing boxes**. International journal of computer & information sciences, Springer, v. 14, p. 183-199, 1985.

QI, C. R. *et al.* **Pointnet: Deep learning on point sets for 3d classification and segmentation**. Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition, p. 652-660, 2017.

RONNEGREN, J. **Real Time Mesh Fracturing Using 2D Voronoi Diagrams**. 2020.

ZHOU, Y. *et al.* **On the continuity of rotation representations in neural networks**. Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, p. 5745-5753, 2019.

VI MARATONA DE MATEMÁTICA DO IME-UERJ

Raphael Constant da Costa^{a,1}

^aUniversidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), RJ, Brasil

Resumo: A Maratona de Matemática do IME-UERJ é uma competição matemática que ocorre anualmente durante a Semana do IME-UERJ. Neste capítulo, apresentamos a edição do ano de 2024 e fazemos uma análise do desempenho geral das equipes participantes.

Palavras-chave: Maratona de matemática; olimpíadas de conhecimento.

INTRODUÇÃO

As olimpíadas de conhecimento, sendo bem elaboradas e desenvolvidas, podem servir como um dos meios de aprimoramento da qualidade da educação, da popularização da ciência e da divulgação científica em um país. Além de democratizar o conhecimento e de elevar a qualidade da educação nas escolas, estimulam o surgimento de novos talentos nas diversas áreas do conhecimento. Em [1], aborda-se o caráter incentivador das olimpíadas de conhecimento, estudando a visão dos alunos sobre a Olimpíada Brasileira de Astronomia. Em [2], avalia-se a importância das olimpíadas do conhecimento no desenvolvimento da educação brasileira.

Neste contexto, a Maratona de Matemática do IME-UERJ é uma competição de conhecimento que ocorre anualmente durante a Semana do IME-UERJ. Diferente da maioria das competições matemáticas, ela ocorre em equipes, tendo até hoje sempre ocorrido em duplas. No ano de 2024 tivemos a sexta edição. A proposta é que os estudantes exercitem a habilidade de resolver problemas matemáticos, ao mesmo tempo desafiadores e divertidos, bem

¹ raphaelconstant@ime.uerj.br.

como de trabalhar em equipes. Através da Maratona de Matemática, esperamos despertar nos estudantes não somente o interesse pela Matemática em geral, mas também encorajá-los a participarem de outras competições Matemáticas em nível universitário, como a Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Universitário (OBM-U) e a Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro (OMERJ).

A seleção dos problemas que aparecem é sempre feita tendo em mente esses objetivos. Embora seja uma competição de nível superior, tentamos na medida do possível escolhê-los de forma que envolvam o mínimo de pré-requisitos. Com isso procuramos não desencorajar aqueles estudantes sem tanto conhecimento prévio, fazendo que boa parte dos estudantes consiga pensar efetivamente na maioria das questões. Buscamos também através dos problemas reforçar junto aos participantes que a Matemática é bela e cativante.

A edição de 2024 constou de sete problemas discursivos, todos valendo 10 pontos, onde cada equipe teve que entregar uma solução para cada um deles. As equipes tiveram quatro horas para resolverem todas as questões. A classificação das equipes é dada através da pontuação total considerando todos os problemas. São distribuídos certificados de participação e premiação, onde os prêmios podem ser Menção Honrosa, Medalha de Bronze, Medalha de Prata e Medalha de Ouro. Quanto ao resultado, as equipes são agrupadas em blocos de pontuações semelhantes, de modo que para cada prêmio pode haver mais de uma equipe vencedora. Tentamos na medida do possível colocar os problemas em ordem crescente de dificuldade, mas em várias edições essa ordem não reflete necessariamente a percepção que os estudantes tiveram da competição. Neste texto apresentamos a edição de 2024, e depois fazemos uma avaliação do desempenho dos alunos.

A EDIÇÃO DE 2024

A seguir apresentamos a prova da edição de 2024, juntamente com seu gabarito.

- 1) Liz, Maria, Nair e Olívia são quatro amigas que se encontram sentadas numa mesa quadrada, cada uma ocupando um lado da mesa. Uma das quatro mora no Amazonas, outra na Bahia, outra no Ceará e a quarta no Distrito Federal. Sabe-se que valem as condições a seguir:
- i) À direita de Liz está quem mora no Amazonas.
 - ii) Em frente à Nair está a pessoa que mora na Bahia.
 - iii) Maria e Olívia estão uma ao lado da outra.
 - iv) A pessoa que está à esquerda de quem mora no Ceará não é Maria.

Quais são as possibilidades para a pessoa que mora no Distrito Federal?

Solução. Por i) e ii), temos que Nair não pode estar à esquerda de Liz, pois a pessoa em frente à Nair seria a mesma pessoa à direita de Liz, morando no Amazonas e na Bahia, o que não é possível. Por iii), temos que Nair não pode estar em frente à Liz, uma vez que Maria e Olívia estão lado a lado. Logo temos que Nair está à direita de Liz e, portanto, mora no Amazonas, e a pessoa à esquerda de Liz mora na Bahia, já que está em frente à Nair. Daí a pessoa que mora na Bahia ou é Olívia ou Maria. Podemos ter Olívia morando na Bahia, Maria morando no Ceará e Liz no Distrito Federal, ou Olívia morando na Bahia, Maria morando no Distrito Federal e Liz no Ceará. Para Maria morando na Bahia, não podemos ter Olívia morando no Distrito Federal, uma vez que Liz moraria no Ceará e a pessoa à esquerda de Liz seria Maria, contrariando iv). No entanto, podemos ter Maria morando na Bahia, Olívia no Ceará e Liz no Distrito Federal. Logo a pessoa que mora no Distrito Federal ou é Liz ou é Maria.

Comentário: Embora não tenha aparecido na solução da questão, para se chegar a solução usou-se vários diagramas constando de um quadrado representando a mesa e as letras L, M, N, O, A, B, C e D representando as pessoas e os

lugares, onde foram analisadas as implicações de i), ii), iii) e iv). ■

- 2) [Quadrado Mágico - O Retorno] Um tabuleiro 3×3 é chamado *quadrado mágico* se é preenchido por números inteiros positivos e a soma dos elementos de cada uma das 3 linhas, das 3 colunas e das 2 diagonais são iguais. Por exemplo, a seguir temos um quadrado mágico onde todas as 8 somas citadas valem 15:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

É possível mostrar que, a menos de simetrias e rotações, esse é o único quadrado mágico existente utilizando-se os algarismos de 1 a 9.

- a) Preencha o tabuleiro seguinte com os números 5, 7, 8, 9 e 12 de forma que ele seja um quadrado mágico.

10	2	
6		
		4

- b) Crie um quadrado mágico de forma que todos os elementos que aparecem sejam inteiros positivos distintos dois a dois e cada uma das 8 somas seja 18.
- c) Mostre que não é possível preencher o tabuleiro seguinte de forma que ele seja um quadrado mágico.

	5	
6		

Solução.

- a) Observe que a soma de todos os elementos aparecendo no quadrado mágico é $2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 12 = 63$. Essa soma corresponde a três vezes a soma dos elementos de cada linha.

Concluimos que esta última vale 21. Portanto, o elemento do canto superior direito do quadrado mágico é $21 - 10 - 2 = 9$. O elemento mais à direita na linha do meio é $21 - 9 - 4 = 8$. O elemento no centro do quadrado é $21 - 6 - 8 = 7$. O elemento do canto inferior esquerdo é $21 - 10 - 6 = 5$ e finalmente o elemento central da última linha é $21 - 2 - 7 = 12$. Obtemos o quadrado mágico

10	2	9
6	7	8
5	12	4

- b) Seja S a soma de cada uma das linhas/colunas/diagonais do quadrado mágico. Utilizando-se que a soma das linhas e das colunas vale S , temos que um quadrado mágico deve ter a forma:

a	b	$S - a - b$
c	d	$S - c - d$
$S - a - c$	$S - b - d$	$a + b + c + d - S$

para alguns inteiros positivos a , b , c e d . Utilizando-se que a soma das duas diagonais também é S , temos mais duas equações

$$(S - a - c) + d + (S - a - b) = S \Leftrightarrow 2a + b + c - d = S$$

e

$$a + d + (a + b + c + d - S) = S \Leftrightarrow 2a + 2d + b + c = 2S.$$

Isolando-se $2a + b + c$ nas duas igualdades do lado direito acima, temos que $S + d = 2S - 2d \Leftrightarrow S = 3d$. Da primeira equação do lado direito acima, temos $2a + b + c = S + d = 4d$, logo devemos ter que $b + c$ é par e $a = 2d - \frac{b+c}{2}$. No nosso caso, $S = 18$, assim $d = 6$. Escolhendo-se, por exemplo, $b = 3$ e $c = 1$, temos $a = 2 \cdot 6 -$

$\frac{1+3}{2} = 10$, e obtemos o seguinte quadrado mágico que satisfaz as propriedades exigidas:

10	3	5
1	6	11
7	9	2

- c) Pelo que concluímos no item anterior, para tal quadrado ser mágico deveríamos ter $6 + 5 = 11$ par, que não é o caso. Logo não é possível se completar o tabuleiro de modo que ele se torne um quadrado mágico. ■

3) Uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfaz as três propriedades seguintes:

- $f(1) = 3$.
- $f(2n) = (f(n))^2$ para todo natural n .
- $f(2m + 1) = 3f(2m)$ para todo natural m .

a) Encontre $f(2) + f(3) + f(4)$.

b) Encontre todas as possíveis tais funções f .

Solução.

a) Fazendo-se $n = 1$ na segunda propriedade temos $f(2) = (f(1))^2 = 3^2 = 9$. Fazendo-se $m = 1$ na terceira propriedade, temos $f(3) = 3f(2) = 3 \cdot 9 = 27$. Finalmente, fazendo-se $n = 2$ na segunda propriedade temos que $f(4) = (f(2))^2 = 9^2 = 81$. Logo $f(2) + f(3) + f(4) = 9 + 27 + 81 = 117$.

b) Analisando os valores encontrados no item anterior, observamos que $f(2) = 9 = 3^2$, $f(3) = 27 = 3^3$ e $f(4) = 81 = 3^4$. Além disso, $f(1) = 3 = 3^1$. Desconfiamos assim que $f(n) = 3^n$, $\forall n \geq 1$. Vamos mostrar isso utilizando indução forte em n . Para $n = 1$ já sabemos que $f(1) = 3^1$. Suponhamos agora que para $k = 1, 2, \dots, n - 1$ vale que $f(k) = 3^k$. Vamos mostrar que $f(n) = 3^n$, o que completa a demonstração.

De fato, se n for par, podemos escrever $n = 2n_1$, onde n_1 é um inteiro positivo. Pela segunda propriedade, temos

$$f(n) = f(2n_1) = (f(n_1))^2 = (3^{n_1})^2 = 3^{2n_1} = 3^n,$$

já que $n_1 \in 1, 2, \dots, n-1$.

Por outro lado, se n for ímpar, temos $n = 2m + 1$, onde m é um inteiro positivo. Daí, pela terceira propriedade temos

$$f(n) = f(2m + 1) = 3f(2m) = 3 \cdot 3^{2m} = 3^{2m+1} = 3^n,$$

já que $2m \in 1, 2, \dots, n-1$. ■

- 4) Existe algum número real x que seja solução da equação $\text{sen}(x)\text{sen}(2x)\text{sen}(3x) \cdots \text{sen}(2024x) = 1$?

Justifique.

Solução. Afirmamos que não existe tal número real x . De fato, suponha por absurdo que exista tal número real x solução da equação. Em particular, temos que

$$\begin{aligned} |\text{sen}(x)| |\text{sen}(2x)| \cdots |\text{sen}(2024x)| &= \\ &= |\text{sen}(x)\text{sen}(2x) \cdots \text{sen}(2024x)| = 1. \end{aligned}$$

Como $0 \leq \text{sen } t \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$, devemos ter

$$|\text{sen}(x)| = |\text{sen}(2x)| = \cdots = |\text{sen}(2024x)| = 1.$$

De $|\text{sen}(x)| = 1$, concluímos que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para algum inteiro k , e de $|\text{sen}(2x)| = 1$, concluímos que $2x = \frac{\pi}{2} + l\pi$ para algum inteiro l . Eliminando-se x , temos $\pi + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + l\pi$, ou de maneira equivalente, $l - 2k = \frac{1}{2}$, o que é uma contradição. ■

- 5) Denote por $\mathcal{P}(n) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0: a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e grau no máximo n .

a) Sejam $p_1(x), \dots, p_9(x)$ nove polinômios em $\mathcal{P}(2)$ tais que

$$|p_1(k)| = |p_2(k)| = \dots = |p_9(k)|, \text{ para } k = 0, 1, 2.$$

Mostre que dois desses polinômios coincidem, ou seja, existem $i, j \in 1, \dots, 9$, $i \neq j$, tais que $p_i(x) = p_j(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

- b) Dado um natural $n \geq 2$, encontre o menor natural m tal que podemos garantir que se $p_1(x), \dots, p_m(x)$ são polinômios em $\mathcal{P}(n)$ satisfazendo

$$|p_1(k)| = |p_2(k)| = \dots = |p_m(k)|, \text{ para } k = 0, 1, \dots, n,$$

então existem $i, j \in 1, \dots, m$, $i \neq j$, tais que $p_i(x) = p_j(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Solução.

- a) Para $k = 0, 1, 2$, seja $a(k) = |p_1(k)| = \dots = |p_9(k)|$. Temos duas possibilidades: ou $a(k) = 0$, o que implica $p_1(k) = \dots = p_9(k) = 0$, ou $a(k) \neq 0$, o que implica $p_i(k) = a(k)$ ou $p_i(k) = -a(k)$, para cada $i = 1, 2, \dots, 9$. Logo o conjunto

$$(p_i(0), p_i(1), p_i(2)): i = 1, \dots, 9$$

tem no máximo $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ elementos. Como temos 9 polinômios satisfazendo a propriedade do item a), pelo Princípio das gavetas existirão dois índices $i, j \in 1, \dots, 9$, com $i \neq j$, tais que

$$p_i(0) = p_j(0), p_i(1) = p_j(1), p_i(2) = p_j(2).$$

Mas então o polinômio $p(x) = p_i(x) - p_j(x)$ terá grau no máximo 2 e pelo menos três raízes, a saber, 0, 1 e 2. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, daí $p_i(x)$ e $p_j(x)$ coincidem.

- b) Afirmamos que $m = 2^{n+1} + 1$. Vamos mostrar primeiramente que dados $m = 2^{n+1} + 1$ polinômios $p_1(x), \dots, p_m(x)$ satisfazendo a propriedade do item b), então dois deles coincidem. Com efeito, por uma razão similar ao item anterior, o conjunto

$$(p_i(0), p_i(1), \dots, p_i(n)): i = 1, \dots, 2^{n+1} + 1$$

tem no máximo $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n+1 \text{ vezes}} = 2^{n+1}$ elementos. Como $m = 2^{n+1} + 1 > 2^{n+1}$, pelo Princípio das Gavetas existirão dois índices $i, j \in 1, \dots, 2^{n+1} + 1$, com $i \neq j$, tais que

$$p_i(0) = p_j(0), p_i(1) = p_j(1), \dots, p_i(n) = p_j(n).$$

Mas então o polinômio $p(x) = p_i(x) - p_j(x)$ terá grau no máximo n e pelo menos $n + 1$ raízes, a saber, $0, 1, \dots, n$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, daí $p_i(x)$ e $p_j(x)$ coincidem.

Em seguida, para mostrarmos que de fato o valor $2^{n+1} + 1$ é o menor possível, basta exibirmos 2^{n+1} polinômios satisfazendo as propriedades do item b) e de forma que todos eles sejam diferentes dois a dois. Vamos utilizar o seguinte resultado, que é conhecido, mas de qualquer forma forneceremos uma demonstração.

Lema (Polinômio Interpolador de Lagrange). Sejam x_1, \dots, x_{n+1} números reais dois a dois distintos e y_1, \dots, y_{n+1} números reais. Então existe um único polinômio $p(x)$ com coeficientes reais e de grau no máximo n tal que $p(x_1) = y_1, \dots, p(x_{n+1}) = y_{n+1}$. Tal polinômio é dado por

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(y_k \prod_{\substack{1 \leq m \leq n+1 \\ m \neq k}} \frac{x - x_m}{x_k - x_m} \right).$$

Demonstração. De fato, observe que tal polinômio $p(x)$ tem grau no máximo n e satisfaz $p(x_1) = y_1, \dots, p(x_{n+1}) = y_{n+1}$. Se $q(x)$ é um outro polinômio com as mesmas propriedades, então $r(x) = p(x) - q(x)$ é um polinômio de grau no máximo n com pelo menos $n + 1$ raízes x_1, \dots, x_{n+1} . Daí pelo Teorema Fundamental da Álgebra $r(x)$ é o polinômio identicamente nulo e, portanto, $p(x)$ e $q(x)$ coincidem. ■

Como o conjunto

$$\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n): a_i \in \{0, 1\}, i = 0, \dots, n$$

tem 2^{n+1} elementos, seja $\phi: \{1, \dots, 2^{n+1}\} \rightarrow \mathcal{S}$ uma bijeção qualquer (uma bijeção possível é para cada elemento de $k \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}$ associarmos os algarismos da representação de $k - 1$ na base 2). Considere $n + 1$ reais não-nulos e dois a dois distintos y_0, \dots, y_n . Para cada $i = 1, \dots, 2^{n+1}$, pelo lema acima existe um único polinômio $p_i(x)$ de grau no máximo n tal que $p_i(k) = (-1)^{a_k} y_k, k = 0, \dots, n$, onde $\phi(i) = (a_0, \dots, a_n)$. Por construção $p_1(x), \dots, p_{2^{n+1}}(x)$ são 2^{n+1} polinômios em $\mathcal{P}(n)$ distintos dois a dois satisfazendo

$$|p_1(k)| = |p_2(k)| = \dots = |p_{2^{n+1}}(k)|, \text{ para } k = 0, 1, \dots, n.$$

■

- 6) Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de ordem n , definimos o traço de A (denotamos $\text{Tr}(A)$) como a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja,

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}.$$

Seja $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ uma outra matriz quadrada de ordem n .

- Se $n = 2$, mostre que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, para quaisquer matrizes quadradas A e B de ordem 2. Obs: Sinta-se à vontade para resolver esse item diretamente no item seguinte.
- Mostre que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, para quaisquer matrizes quadradas A e B de ordem $n \geq 2$.
- Dado um número natural $n \geq 2$, existem matrizes quadradas A e B de ordem n tais que $AB - BA = I_n$, onde I_n representa a matriz identidade de ordem n ? Justifique.

Solução.

- e b) Sejam $C = AB$ e $D = BA$. Representemos $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ e $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Sabemos que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{e} \quad d_{ij} = \sum_{l=1}^n b_{il} a_{lj}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{l=1}^n c_{ll} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{lk} b_{kl} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kl} a_{lk} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} a_{lk} \\ &= \sum_{k=1}^n d_{kk} = \text{Tr}(BA). \end{aligned}$$

Comentário: A seguir esboçamos uma possível segunda solução. Os autovalores (possivelmente complexos) de uma matriz C com coeficientes reais de ordem n são as raízes do polinômio característico $p(x) = \det(C - xI_n)$. Pelas Relações de Girard, observa-se que o traço de C é a soma das raízes do polinômio característico, ou seja, os autovalores, contados com multiplicidade. A ideia então é mostrar que AB e BA possuem o mesmo polinômio característico. Se A é invertível, isso segue do fato que AB e BA são matrizes semelhantes, já que podemos escrever $AB = A(BA)A^{-1}$, e daí teremos $AB - xI_n = A(BA - xI_n)A^{-1} \Rightarrow \det(AB - xI_n) = \det(BA - xI_n)$. Se A é não invertível, existe um número real $c > 0$ tal que $A - \varepsilon I_n$ é invertível, para $0 < \varepsilon < c$. Então $(A - \varepsilon I_n)B$ e $B(A - \varepsilon I_n)$ possuem o mesmo polinômio característico. Por um argumento de continuidade, fazendo-se $\varepsilon \rightarrow 0$, mostra-se que AB e BA possuem o mesmo polinômio característico também nesse caso.

- c) Dada duas matrizes quadradas E e F de ordem n , é fácil ver que $\text{Tr}(E - F) = \text{Tr}(E) - \text{Tr}(F)$. Logo

$\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$ (pelo item b)) e $\text{Tr}(I_n) = \sum_{k=1}^n 1 = n \neq 0$. Portanto não existem matrizes quadradas A e B de ordem n tais que $AB - BA = I_n$. ■

7)

- a) Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros. Mostre que $p(b) - p(a)$ é múltiplo de $b - a$ para todo par de inteiros a e b .
- b) Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função tal que $f(b) - f(a)$ é múltiplo de $b - a$ para todo par de inteiros a e b . Suponha que $q(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros tal que $f(n) = q(n)$ para uma quantidade infinita de inteiros n . Mostre que $f(x) = q(x)$ para todo inteiro x .

Solução.

- a) Vamos mostrar primeiramente que o resultado é verdadeiro para um monômio da forma $u(x) = cx^n$, com $c \in \mathbb{Z}$. De fato, como

$$\begin{aligned} u(b) - u(a) &= c(b^n - a^n) \\ &= c(b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1}), \end{aligned}$$

segue que $u(b) - u(a)$ é múltiplo de $b - a$. De maneira geral, podemos escrever $p(x) = u_0(x) + \dots + u_m(x)$, onde $u_i(x) = c_i x^i$ e $c_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \dots, m$. Como para cada um dos $u_i(x)$ temos que $u_i(b) - u_i(a)$ é múltiplo de $b - a$, segue que

$$p(b) - p(a) = \sum_{i=0}^m (u_i(b) - u_i(a))$$

é também múltiplo de $b - a$.

- b) Defina $g(x) = f(x) - q(x)$. Por hipótese, existe um subconjunto infinito $I \subset \mathbb{Z}$ tal que $g(m) = 0$ para todo $m \in I$. Além disso, para todo par de inteiros a

e b , temos por hipótese que $f(b) - f(a)$ é múltiplo de $b - a$, e também que $q(b) - q(a)$ é múltiplo de $b - a$, pelo item a). Assim, segue que $g(b) - g(a) = (f(b) - f(a)) - (q(b) - q(a))$ é também múltiplo de $b - a$.

Seja agora n um inteiro qualquer e $m \in I$. Temos que $g(n) = g(n) - g(m)$ é múltiplo de $n - m$. Portanto $g(n) = 0$ ou $|g(n)| \geq |n - m|$ para todo inteiro $m \in I$, o que não é possível já que I é infinito. Daí $g(n) = 0$ para todo inteiro n , ou de maneira equivalente, $f(n) = q(n)$ para todo inteiro n .

■

AVALIAÇÃO DA EDIÇÃO E DO DESEMPENHO DAS EQUIPES

Na edição de 2024, tivemos um total 28 participantes, sendo 13 duplas e duas participações solas. Embora ordenemos as questões no que acreditamos estarem em ordem crescente de dificuldade, podemos ver que o desempenho geral dos estudantes não reflete este fato. Na Tabela 1 encontramos a soma da pontuação total de todas as equipes por questão.

Tabela 1. Pontuações das equipes nas questões

Questão	Pontuação total das equipes na questão
1	78
2	90
3	89
4	51
5	5
6	40
7	14

Fonte: O Autor, 2025.

Se utilizarmos como critério para ranquearmos as dificuldades das questões a soma total da pontuação das equipes por cada questão, da maior soma total para a menor soma total, teríamos a seguinte ordem crescente de dificuldade segundo a Tabela 1: questão 2, questão 3, questão 1, questão 4, questão 6, questão 7 e questão 5. Um fato, porém, deve ser levado em consideração: se uma determinada questão é considerada mais complicada do que uma outra, no sentido de ser mais difícil de se encontrar uma solução completa para a primeira, não necessariamente é esperado que a pontuação das equipes na questão mais complicada seja maior do que na outra considerada mais fácil, visto que há questões com vários itens e os alunos podem pontuar parcialmente. Por exemplo, isto pode ser o motivo da soma total das pontuações das equipes na questão 7 ser maior do que na questão 5. A seguir analisemos o desempenho das equipes em algumas questões.

Tomamos como exemplo a questão 1. Ela foi considerada previamente a mais simples da prova, pois ao se fazer uma análise cuidadosa de um número não tão grande de casos chega-se às duas possibilidades da resposta. Na prática, até mesmo por falta de maturidade possivelmente, nem todas as duplas tiveram essa atitude para se chegar a solução correta.

Um outro exemplo é a questão 5. A solução baseia-se principalmente no uso do Teorema Fundamental da Álgebra, um dos resultados mais importantes envolvendo polinômios. Contudo, sabemos que muitas vezes os estudantes não têm tal conhecimento. Juntamente com o fato de seu enunciado ser um pouco longo, possivelmente fez com que muitas equipes ficassem desencorajadas em resolvê-lo. Uma dica muito útil para participantes de competições de conhecimento é que todos os problemas sejam lidos e entendidos no início da prova, para que seja planejado inicialmente um plano de ação para a abordagem dos problemas.

Quanto à questão 4, muitas equipes perceberam de alguma forma que se a resposta à pergunta fosse afirmativa, então os

valores de cada um dos senos que aparecem deveriam ser 1 ou -1 . No entanto, muitas equipes tiveram dificuldade em explicar tal fato. Trabalhar com a função módulo conforme faz o gabarito pode facilitar a elaboração da solução, e ocorreu que somente uma das duplas procedeu dessa maneira, novamente possivelmente pela falta de experiência dos participantes.

CONCLUSÃO

Podemos dizer que a Maratona de Matemática cumpriu com seu papel de despertar nos participantes o interesse maior pela Matemática e também em olimpíadas de conhecimento, visto também o retorno que alguns estudantes nos deram após a prova. Contudo, uma análise do desempenho geral das equipes em anos anteriores sugere que a competição desse ano estava num nível maior de dificuldade comparada a outros anos, o que será levado em consideração para a elaboração de futuras edições.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao IME-UERJ e aos organizadores da Semana do IME-UERJ por todo apoio e suporte para a realização do evento. Agradecemos também à Biblioteca do CTC-A e aos centros acadêmicos da Matemática, da Engenharia e da Física pela divulgação da competição.

REFERÊNCIAS

- [1] **CAMPAGNOLO, J. C. N. O caráter incentivador das olimpíadas de conhecimento: uma análise sobre a visão dos alunos da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica sobre a olimpíada.** Monografia (Licenciatura em Física) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011.

- [2] ROCHA, T. O.; CARVALHO, E. V.; CARVALHO, L. O.; AMARAL, C. E. S.; SANTOS, P. A. **As olimpíadas científicas no desenvolvimento da educação brasileira**. Anais III CONEDU. Campina Grande: Realize Editora, 2016



A Semana do IME compõe e testemunha a história do Instituto de Matemática e Estatística da UERJ. A cada edição, ela se fortalece e traduz o caráter multifacetado da produção do Instituto, nossas parcerias internas e externas, nossa vocação para o diálogo com a comunidade acadêmica e com a sociedade, e nosso compromisso com a educação básica e superior. Neste primeiro e-book, reunimos autores, parceiros e pesquisadores para compor um mosaico que expressa um pouco do que somos. Esperamos que esta leitura inspire você a construir, junto conosco, as próximas edições da Semana do IME.

