

A Utilização de Tecnologias e Metodologias como Subsídio para o Ensino da Matemática

Gustavo Nogueira Dias
Vanessa Mayara Souza Pamplona
(Organizadores)



Pedro & João
editores

**Gustavo Nogueira Dias
Vanessa Mayara Souza Pamplona
(Organizadores)**

**A Utilização de Tecnologias e
Metodologias como Subsídio para o
Ensino da Matemática**

Copyright © Autoras e autores

Todos os direitos garantidos. Qualquer parte desta obra pode ser reproduzida, transmitida ou arquivada desde que levados em conta os direitos das autoras e dos autores.

Gustavo Nogueira Dias; Vanessa Mayara Souza Pamplona [Orgs.]

A utilização de tecnologias e metodologias como subsídio para o ensino da Matemática. São Carlos: Pedro & João Editores, 2022. 177p. 16 x 23 cm.

**ISBN: 978-65-5869-785-5 [Impresso]
978-65-5869-786-2 [Digital]**

DOI: 10.51795/9786558697862

1. Tecnologias digitais. 2. Metodologias. 3. Educação Matemática. 4. Cálculo. I. Título.

CDD – 370

Capa: Petricor Design

Ficha Catalográfica: Hélio Márcio Pajeú – CRB - 8-8828

Diagramação: Diany Akiko Lee

Editores: Pedro Amaro de Moura Brito & João Rodrigo de Moura Brito

Conselho Científico da Pedro & João Editores:

Augusto Ponzio (Bari/Itália); João Wanderley Geraldi (Unicamp/ Brasil); Hélio Márcio Pajeú (UFPE/Brasil); Maria Isabel de Moura (UFSCar/Brasil); Maria da Piedade Resende da Costa (UFSCar/Brasil); Valdemir Miotello (UFSCar/Brasil); Ana Cláudia Bortolozzi (UNESP/Bauru/Brasil); Mariangela Lima de Almeida (UFES/ Brasil); José Kuiava (UNIOESTE/Brasil); Marisol Barenco de Mello (UFF/Brasil); Camila Caracelli Scherma (UFFS/Brasil); Luis Fernando Soares Zuin (USP/Brasil).



Pedro & João Editores

www.pedroejoaoeditores.com.br

13568-878 – São Carlos – SP

2022

APRESENTAÇÃO

Este livro pode ser considerado o resultado de várias aplicações, metodologias e discussões realizadas pelos autores, durante as suas aulas, nos últimos anos, sendo dirigido especialmente aos professores da área de ciências exatas e aos alunos que costumam fazer as seguintes perguntas durante as aulas de cálculo: *“Professor(a), onde irei usar conteúdo?”*, *“Professor(a), para que serve este conteúdo?”*.

É crescente a necessidade da utilização de tecnologias para o ensino do cálculo, pois tem se tornado uma experiência cada vez mais fértil e promissora, uma vez que os alunos muitas vezes não conseguem entender a importância do conhecimento em cálculo somente a partir da teoria. Neste contexto, o objetivo deste livro é mostrar algumas aplicações que podem ser utilizadas no ensino de disciplinas que envolvem cálculo, frente aos inúmeros problemas que encontramos no cotidiano, e nem imaginamos que a utilização do cálculo nos permite resolver vários questionamentos que a atualidade nos proporciona.

O livro está estruturado em 10 capítulos, e a divisão dos capítulos obedece a seguinte ordem:

O Capítulo 1 apresenta a proposta de uma metodologia prática, em que se utiliza a média obtida em função do desvio padrão de notas dos alunos de uma determinada classe, de modo a oferecer um sistema mais justo de calcular a média final do aluno.

O Capítulo 2 trata da utilização das tecnologias de informação a fim de investigar e oferecer resultados mais ágeis e rápidos para a solução de diversos problemas. A leitura desse texto abre precedentes do que muitas vezes podemos utilizar ao ensinar conteúdos que envolvem cálculo de forma prática.

O Capítulo 3 trata da questão do cálculo de uma área desconhecida utilizando a função quadrática como elemento básico

para a descoberta da função a ser obtida a área onde se utilizará a integral para conhecermos o resultado, elegendo para isso no mínimo de três coordenadas geográficas a ser inserida na função do 2º grau.

O Capítulo 4 oferece a incrível interrelação da obtenção das coordenadas geográficas dos pontos de uma determinada região e a utilização do Microsoft Excel para o aproveitamento destas coordenadas a fim de obter a curva já interpolada por ele de uma forma rápida, e a utilização desta curva na integral obtendo assim a área aproximada de uma forma mais rápida e eficiente.

O Capítulo 5 descreve a obtenção de uma determinada área de uma região qualquer utilizando a interpolação de Newton a fim de obter uma curva aproximada, e a partir daí calcular a área por meio da integral.

O Capítulo 6 apresenta uma aplicação do programa "MAXIMA" a fim de se obter a melhor aproximação para a área de uma determinada região. Este capítulo explica como utilizar os procedimentos deste aplicativo demonstrando a simplicidade e facilidade de seu uso.

O ensino da Geometria tem adquirido, nos últimos anos, grande importância no cenário das reformas educacionais do país, tem sido proposto como fator fundamental para o desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas nos diferentes níveis de ensino. O Capítulo 7 mostra como identificar a partir de um estudo de caso, em qual nível de pensamento geométrico encontram-se os alunos ao final do ensino fundamental, utilizando como ferramenta, o teste de Van Hiele (Geometria Plana). Com os resultados obtidos será possível detectar se a geometria está sendo trabalhada de forma adequada nas escolas ou não.

O Capítulo 8 trata a respeito de simetria de um ponto em relação a uma reta previamente conhecida. O objetivo é mostrar um processo que se traduz em uma forma de algoritmo simplificador dos cálculos, pois em poucas linhas de trabalho obtém-se o ponto refletido. A extensão do conceito é criada quando o ponto que se

quer fazer a reflexão faz parte de uma figura, circunferência, hipérbole, elipse, parábola ou até outras curvas polinomiais.

O Capítulo 9 mostra o processo geométrico de resolução de problemas trigonométricos quando são fornecidos os valores de uma função trigonométrica, e se deseja encontra o valor das demais. A literatura pertinente traz o uso da relação trigonométrica fundamental $\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1$ como única alternativa. Este processo é apenas uma aplicação geométrica da origem da relação trigonométrica fundamental, simplificando, otimizando a resolução dos problemas que envolvem este conteúdo e diminuindo o tempo de resolução.

O Capítulo 10 apresenta alguns resultados de uma pesquisa bibliográfica sobre o Princípio da Casa dos Pombos que teve como objetivo elaborar um conjunto de questões resolvidas sobre o assunto. As etapas da metodologia do trabalho foram as seguintes: levantamento, seleção e estudo do material, além da elaboração do texto.

Aos leitores deste livro, desejamos que surjam novas visões e possibilidades sobre a utilização de tecnologias e metodologias como subsídio para o ensino da Matemática. Por fim, destacamos que sugestões, contribuições e críticas serão bem recebidas pelos organizadores e autores, a fim de melhorar o nosso aprendizado.

Gustavo Nogueira Dias
Vanessa Mayara Souza Pamplona

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 **13**

A Avaliação de Turmas do Ensino Médio Utilizando Testes com Base na Padronização do Exame Nacional do Ensino Médio

Gustavo Nogueira Dias
Gilberto Emanuel Reis Vogado
Wagner Davy Lucas Barreto
Eldilene da Silva Barbosa
Vanessa Mayara Souza Pamplona
José Carlos Barros de Souza Júnior
Alessandra Epifanio Rodrigues

CAPÍTULO 2 **25**

Utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC'S) nas Aulas de Disciplina Cálculo

Ravila Beatriz Costa Furtado
Edilson Santos Melo
Eldilene da Silva Barbosa
Wagner Davy Lucas Barreto
Gustavo Nogueira Dias
Vanessa Mayara Souza Pamplona
Jamille Carla Oliveira Araújo

CAPÍTULO 3

41

A Utilização de Tecnologias Móveis para Cálculo de Área Utilizando a Função Quadrática e Integral

Alessandra Costa

Marcio Frank

Renata Carolina Freitas dos Santos Bentes

Valdenor Cunha

Gustavo Nogueira Dias

Vanessa Mayara Souza Pamplona

Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior

CAPÍTULO 4

53

Área de Regiões Através do Google Maps Utilizando Microsoft Excel e Cálculo Integral

Gustavo Nogueira Dias

Gilberto Emanuel Reis Vogado

Pedro Roberto Sousa da Silva

Vanessa Mayara Souza Pamplona

Cássio Pinho dos Reis

Edson Junior Ferreira de Azevedo

Carlos Alberto Nobre da Silva

CAPÍTULO 5

69

Área de Regiões através do Google Maps Utilizando Polinômio de Newton e Cálculo integral

Gilberto Emanuel Reis Vogado

Pedro Roberto Sousa da Silva

Gustavo Nogueira Dias;

Vanessa Mayara Souza Pamplona

Nazaré Doriene de Melo Reis

Alessandra Epifanio Rodrigues

Waljucy Furtado Cardoso

CAPÍTULO 6 **81**

Áreas de Intersecções de Curvas com o MAXIMA

Jéssica Adriane Oliveira de Castro

Luiz Otávio Alves Ribeiro

Mauro do Socorro Botelho Feio

Wellington de Jesus Sousa

Gustavo Nogueira Dias

Vanessa Mayara Souza Pamplona

Victor Hugo Chacon Britto

CAPÍTULO 7 **93**

Geometria Plana Segundo a Teoria de Van Hiele:
Uma Análise do Nível de Conhecimento Geométrico
dos Alunos ao Final do Ensino Fundamental de Uma
Escola Estadual da Cidade de Benevides, Pará, Brasil

Luciana Raiol Bahia

Gustavo Nogueira Dias

Gilberto Emanuel Reis Vogado

Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior

Ivamilton Nonato Lobato dos Santos

José Edimilson de Lima Fialho

Vanessa Mayara Souza Pamplona

CAPÍTULO 8 **111**

Obtenção do Ponto Simétrico em Relação a Uma Reta
Utilizando Método Simplificado

Pedro Roberto Sousa da Silva

Gustavo Nogueira Dias

Vanessa Mayara Souza Pamplona

Antonio Thiago Madeira Beirão

Katiane Pereira da Silva

Edson Junior Ferreira de Azevedo

Fabrcio da Silva Lobato
Nelba Tania Gomes Pinheiro

CAPÍTULO 9 **121**

Determinações das Funções Circulares Empregando
o Triângulo Retângulo – Processo Geométrico

Gustavo Nogueira Dias
Wagner Davy Lucas Barreto
Gilberto Emanuel Reis Vogado
Vanessa Mayara Souza Pamplona
Antonio Thiago Madeira Beirão
Katiane Pereira da Silva
Ricardo Daniel Soares Santos

CAPÍTULO 10 **137**

Princípio da Casa dos Pombos

Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior
Gustavo Nogueira Dias
Wagner Davy Lucas Barreto
Pedro Franco de Sá
José Carlos Barros de Souza Junior
Vanessa Mayara Pamplona
Carlos Alberto Nobre da Silva

ORGANIZADORES **159**

SOBRE AS AUTORAS E OS AUTORES **161**

CAPÍTULO 1

A avaliação de Turmas do Ensino Médio Utilizando Testes com Base na Padronização do Exame Nacional do Ensino Médio

Gustavo Nogueira Dias
Gilberto Emanuel Reis Vogado
Wagner Davy Lucas Barreto
Eldilene da Silva Barbosa
Vanessa Mayara Souza Pamplona
José Carlos Barros de Souza Júnior
Alessandra Epifanio Rodrigues

INTRODUÇÃO

O trabalho apresenta uma metodologia de avaliação realizada em uma escola do ensino básico federal, onde as avaliações das turmas do 2º ano do ensino médio foram realizadas por meio da média da turma, levando uma escala de valores com base no desvio-padrão das turmas.

Inicialmente, pensou-se em uma forma de não prejudicar nenhum aluno participante da turma. Evidentemente, aos que não tivessem se preparado teriam o prejuízo na nota.

Esta metodologia foi adotada com a finalidade de aproximar as avaliações da escola ao formato utilizado no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), em que pesa a forma das questões objetivas, com uma única alternativa correta e ao quantitativo de questões, principalmente ao que se referem a área de matemática, com 45 (quarenta e cinco) questões de um total de 180 (cento e oitenta),

oferecendo a disciplina de matemática uma importância maior, pois representa 25% da nota obtida no exame.

Esta metodologia foi adotada na escola, com o objetivo de habituar os alunos a responderem esse quantitativo de uma forma mais trivial que o normal, de forma a diminuir no momento do exame o desgaste emocional e cognitivo, oriundo do quantitativo exacerbado de questões propostas para resolução.

Com relação a proposta de avaliação, observa-se que na atualidade ainda resiste uma forte divisão de classes onde pode-se afirmar: “avaliar é também privilegiar um modo de estar em aula e no mundo, valorizar formas e normas de Excelência, definir um aluno modelo, aplicado e dócil para uns, imaginativo e autônomo para outros”. (PERRENOUD, 1999, p. 09).

Na concepção de Sakamoto e Verástegui (2010):

A educação já se manifesta como uma ordem que estabelece hierarquias, e a avaliação serve para este fim. Dado que “conhecer é poder”, temos que avaliar para saber quem tem mais conhecimentos e por consequência, saber quem tem mais poder. Nesta classificação obteremos uma hierárquica que vai crescendo durante toda a vida, conforme o desenvolvimento do aluno. Este vai adquirindo mais poder e subindo na escala hierárquica e obtendo maior poder, mais conhecimentos

Há de considerar os casos em que a maturidade interfere nesta progressão de conhecimento *versus* poder. Existem as situações, em que os alunos despertam o interesse pelo estudo tardiamente, pois em até aquele momento não sentiu nenhuma necessidade de melhorar seu desempenho. Desta forma, há inúmeros episódios que só após a conclusão do ensino médio, já na universidade, este aluno desperta o interesse e o gosto pelos estudos, neste caso já associado à sua escolha profissional.

MATERIAL E MÉTODOS

Para realizar a avaliação das turmas selecionadas, utilizou-se os seguintes critérios: realização de provas em grupo de 5 alunos, podendo consultar os seus materiais com valor 10,0 pontos; e prova individual com valor 10,0 pontos, tendo como parâmetro a média global da série e a prova individual, com valor 10,0 pontos, tendo como parâmetro apenas a seu desempenho. Cada prova teve seu conteúdo previamente selecionado em uma escala temporal, sendo cumulativa.

O estudo foi realizado no Colégio Tenente Rêgo Barros, no ano de 2019, nas turmas do 2º ano do Ensino Médio, totalizando o total de 5 turmas com 30 alunos em cada, em média.

Vamos tomar um exemplo a turma 2º ano B, tiveram os seguintes desempenhos, de acordo com a Tabela 1:

Tabela 1. Tabela de distribuição de frequência de questão certas.

| Questões (30) - acertos (x_i) | Quantidade de alunos (f_i) | $x_i \cdot f_i$ | $d_i = x_i - \bar{x}$ | $(d_i)^2$ | $(d_i)^2 \cdot f_i$ |
|--------------------------------------|-----------------------------------|-----------------|-----------------------|-----------|---------------------|
| 23 | -1 | 23 | 23-14,5 = 8,5 | 72,25 | 72,25 |
| 22 | -1 | 22 | 22-14,5 = 7,5 | 56,25 | 56,25 |
| 21 | 1 | 21 | 21-14,5 = 6,5 | 42,25 | 42,25 |
| 20 | 2 | 40 | 20-14,5 = 5,5 | 30,25 | 60,50 |
| 19 | 1 | 19 | 19-14,5 = 4,5 | 20,25 | 20,25 |
| 18 | 1 | 18 | 18-14,5 = 3,5 | 12,25 | 12,25 |
| 17 | 2 | 34 | 17-14,5 = 2,5 | 6,25 | 12,50 |
| 16 | 3 | 48 | 16-14,5 = 1,5 | 2,25 | 6,75 |
| 15 | 3 | 45 | 15-14,5 = 0,5 | 0,25 | 0,75 |
| 14 | 4 | 56 | 14-14,5 = -0,5 | 0,25 | 1,00 |
| 13 | 6 | 78 | 13-14,5 = -1,5 | 2,25 | 13,5 |
| 12 | 4 | 48 | 12-14,5 = -2,5 | 6,25 | 25,00 |
| 11 | 3 | 33 | 11-14,5 = -3,5 | 12,25 | 36,75 |
| 10 | 2 | 20 | 10-14,5 = -4,5 | 20,25 | 40,50 |
| 09 | 1 | 9 | 9-14,5 = -5,5 | 20,25 | 20,25 |
| 08 | 1 | 8 | 8-14,5 = -6,5 | 42,25 | 42,25 |
| Total | 36 | 522 | | | 463 |

O cálculo da média e do desvio padrão são apresentados a seguir:

$$\text{Média de acertos} = \bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{522}{36} = 14,50$$

$$\text{Variância} = \frac{\sum(d_i)^2 \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{463}{36} = 12,86$$

$$\text{Desvio padrão} = \sqrt{\text{Variância}} = \sqrt{12,86} \cong 3,60$$

Fazendo uma regra de Três, temos:

$$\begin{array}{l} 30 \text{ questões} \text{ ----- nota } 10,00 \\ 3,60 \text{ questões} \text{ ----- } x \text{ (Pontuação à reduzir)} \\ 30 x = 3,60 \times 10 \rightarrow x = 1,20 \text{ (Pontuação à reduzir)} \end{array}$$

Desta forma, quem acertou acima de 14 questões recebeu a nota 10,00, e quem acertou abaixo de 14 questões tem a pontuação reduzida em 1,20 por questão errada. Segue a tabela final de notas propostas (Tabela 2).

Tabela 2: Tabela de distribuição de frequência de questão certas.

| Questões (30) - acertos (xi) | Quantidade de alunos(fi) | Nota final proposta |
|---------------------------------|-----------------------------|------------------------|
| 23 | 1 | 10,00 |
| 22 | 1 | 10,00 |
| 21 | 1 | 10,00 |
| 20 | 2 | 10,00 |
| 19 | 1 | 10,00 |
| 18 | 1 | 10,00 |
| 17 | 2 | 10,00 |
| 16 | 3 | 10,00 |
| 15 | 3 | 10,00 |
| 14 | 4 | 10,00 |
| 13 | 6 | 10-1,20=8,80 |
| 12 | 4 | 10-2,40=7,60 |
| 11 | 3 | 10-3,60=6,40 |
| 10 | 2 | 10-4,80=5,20 |
| 9 | 1 | 10-6,00=4,00 |
| 8 | 1 | 10-7,20=2,80 |
| Total | 36 | |

A proposta visa a reflexão aos alunos com baixo desempenho, ou seja, considerando uma prova com 30 questões, com o tempo de resolução de 90 minutos, equivalente ao tempo de duas aulas,

gastando em média 03 minutos por questão, o aluno que acertar acima da metade de questões, neste caso, fica com a nota máxima. No Colégio Tenente Rêgo Barros, nas turmas do 2º ano do Ensino Médio, foi adotado o tempo de três de minutos, a fim de se aproximar do tempo médio de resolução das questões propostas pelo Enem, sendo 90 questões para serem resolvidas em 4 horas e 30 minutos, totalizando 270 minutos. No segundo dia de avaliação, também tem-se 90 questões, além da redação, com o tempo de 5 horas e 30 minutos de prova, onde permanece o total de 4 horas e 30 minutos para responder as questões objetivas e 1 hora para elaborar a redação.

De modo geral, se estabeleceu uma média global das turmas e quem acertar acima da média terá a nota máxima, e a nota de quem acertar abaixo da média vai depender do cálculo do desvio-padrão das turmas relacionadas.

Esta metodologia mostrou-se totalmente democrática e global, sem ferir qualquer direito dos envolvidos e não estabelece qualquer tipo de privilégio, apenas estabelece uma média global de acertos originada dentro do grupo dos alunos que estão sendo avaliados.

Ou seja, tirar abaixo da média já se subentende que o aluno não estudou devidamente igual ao seus pares como deveria ser, isso já atribui uma grande responsabilidade aos participantes e retira do professor a onipotência de dar a nota, mesmo que use a média de acertos normal.

Além disso, se o teste for difícil, o desempenho da turma pouco mudará, pois a média global irá reduzir e assim mesmo teremos os mesmos rendimentos, com algumas pequenas variações oriundas do desvio-padrão.

O modelo abriu discussões e posicionamentos com relação a proposta em trabalhar com testes, obedecendo ao estilo proposto pelo Enem, e quais as vantagens e desvantagens do uso do método.

Segundo Perrenoud (1999, p.51), não há orientação escolar sem avaliação. O Enem, principal porta de entrada para o ensino superior no Brasil, deveria ser uma importante fonte de orientação e reorientação, tanto para o docente quanto ao discente, uma vez

que este deve sempre melhorar seus métodos para tornar aquele capaz de superar os desafios trazidos pelo exame.

Logo surge alguns questionamento: - Os professores devem focar no Enem, como o principal instrumento e as aulas se tornarem um curso preparatório para fazer a prova do Enem?

- Deve-se reduzir todo tipo de avaliação ao modelo proposto pelo Ministério da Educação (MEC)?

- Estamos realmente avaliando e construindo uma educação melhor?

Na concepção de Demo (2007), a educação não é só ensinar, instruir, treinar e domesticar é, sobretudo, formar autonomia crítica e criativa do sujeito histórico e competente. Mas, não adianta uma pesquisa para copiar como uma receita de bolo. É preciso procurar vários materiais, fomentar a iniciativa, estimular a interpretação própria, compreender a elaborar textos próprios.

Não podemos apenas domesticar nossos alunos a fazer provas estilo Enem. Na atual sociedade esse estilo de avaliação virou regra para todo professor e toda escola, seja pública ou privada. Nas escolas públicas, talvez o professor tenha mais autonomia para avaliar e ensinar de outra forma que não seja somente testes com alternativas, marque a correta e outros do tipo. Nas escolas privadas, talvez os pais exijam e cobram dos gestores das escolas de uma forma impositiva, tendo em vista que em algumas escolas particulares todo final de semana tem um simulado estilo Enem, o que pode caracterizar uma satisfação aos pais, que exigem um bom desempenho nesta prova.

Para Luckesi (2008), o processo de ensino aprendizagem constitui entre seus componentes a avaliação, a qual deve ser adotada e trabalhada da melhor forma possível com o objetivo de verificar se o aluno está adquirindo o conhecimento necessário e proposto, além de servir para o professor verificar se seus objetivos estão sendo alcançados. A aferição da aprendizagem por meio da avaliação não busca a aprovação ou reprovação, e sim, o direcionamento da aprendizagem e seu consequente desenvolvimento. Neste caso, seria um mecanismo no qual o

professor iria utilizar diariamente para detectar os níveis de aprendizagem atingidos pelos educandos e trabalhar para atingir o ideal mínimo necessário, que seria determinado previamente, e só passar para outro conteúdo quando todos educandos atingirem o nível mínimo.

Se trata da percepção e da criatividade do professor em diversas situações. Além disso, é comprovado que o aluno aprende mais com o seu colega do que com o professor, talvez seja pela linguagem entre eles, o afeto, o fato de se olhar de igual para igual, permite que o conhecimento ocorra de uma forma mais linear e acabada.

Mas o que deve-se fazer? Trabalhar a avaliação de forma que todos ao final entendam o conceito e progredir nos assuntos, sem levar em consideração a metodologia utilizada pelo MEC?

Talvez, o ideal seja encontrar uma forma de trabalhar as duas formas de avaliação, considerando que é totalmente impróprio, ministrar todo o conteúdo, com resoluções de exercícios simples, e posteriormente elaborar uma prova com questões do Enem sem ter trabalhado este modelo de proposta de questões.

Há de se pensar que obviamente este modelo de trabalho exige do professor maior preparo e habilidade para desenvolver seu conteúdo. Cada item exigirá um modelo de questão deste exame a ser trabalhado com os alunos, exigindo do professor mais tempo, tanto para procurar o estilo e conteúdo proposto nas questões quanto para explicar estes assuntos.

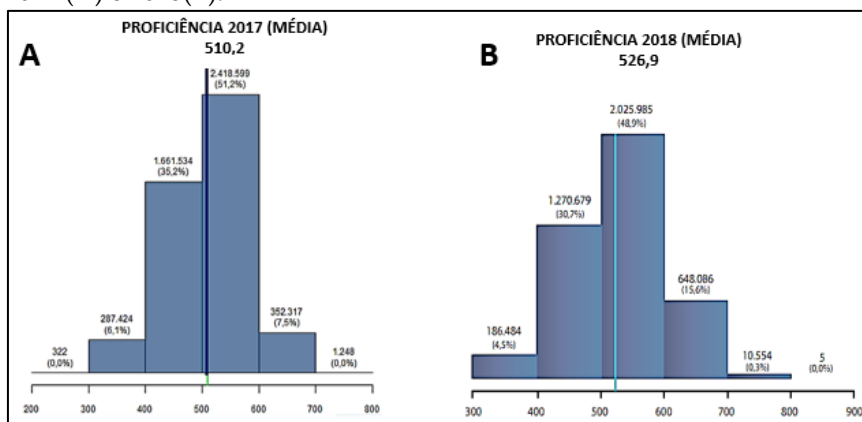
RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com relação aos resultados finais obtidos pelos alunos ao final do ano letivo de 2019, considerou-se satisfatório o desempenho dos alunos e provou-se ser uma nota extremamente justa, nos modelos delineados e acordados na disciplina de Matemática.

Considere os resultados dos Exames nos anos de 2017 e 2018. Considerando que a média de acertos da prova de 2017(A) foi 510 pontos observa-se que 41% ficaram abaixo e 59% acima ou igual a

média dos participantes. Já com relação a prova de 2018, observa-se que a quantidade abaixo da média foi de 35% e essa quantidade diminuiu em relação a prova do ano de 2017, notando-se uma melhora no desempenho, mesmo a média maior, em relação ao ano anterior. Com a prova de 2018, também observa-se que 65% dos participantes estão igual ou acima da média.

Figura 1: Desempenho na área linguagens e códigos, nos anos de 2017 (A) e 2018(B).



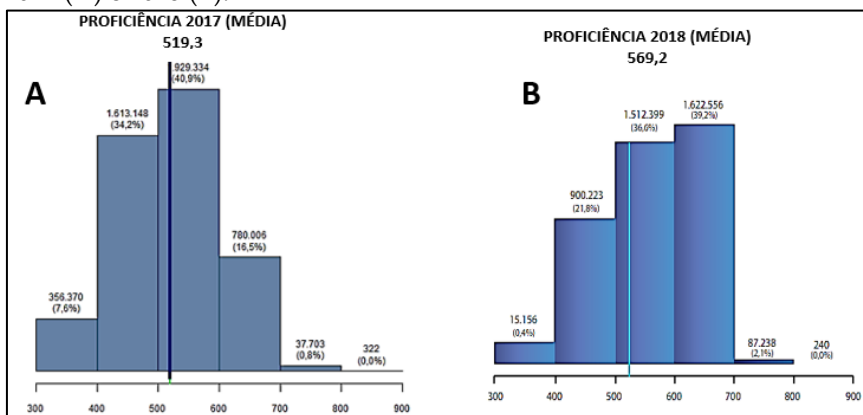
Fonte: INEP.

Nota-se também que o quantitativo dos candidatos que obtiveram a média em 2018, foi menor em relação ao período de 2017, porém a quantidade de candidatos com pontuação no intervalo de 600 a 700 pontos apresentou um acréscimo de 8% em relação a prova anterior (Figura 1).

Na Figura 2, percebe-se que houve uma melhora significativa em 2018 mesmo com o aumento da média em 8% em relação a prova anterior. Pode-se observar que 40% dos participantes estão com nota acima da média geral, com acertos de 600 a 700 pontos e apenas 22% dos participantes estão com nota abaixo da média, resultado diferente ocorreu em 2017, com 42% abaixo da média geral e apenas 58% acima ou igual a média. Além disso, em 2018 os acertos de 600 a 700 representam um quantitativo de 40%, o que

não ocorreu em 2017 com apenas 16,5% dos participantes atingiram a pontuação de 600 a 700.

Figura 2: Desempenho na área de Ciências Humanas, nos anos de 2017 (A) e 2018 (B).

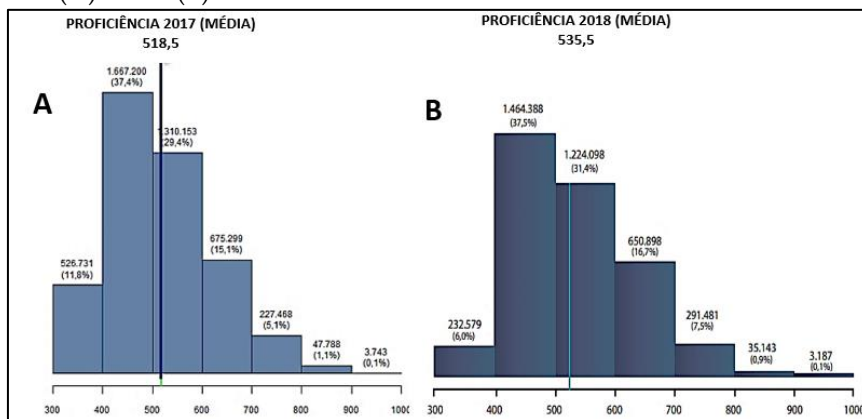


Fonte: INEP.

Na Figura 3, percebe-se que houve um aumento de 4% da média da prova do ano anterior e um leve aumento de acertos das faixas de 600 a 700 pontos e de 700 a 800 pontos. O quantitativo de candidatos que acertaram entre 400 a 500 pontos permaneceu constante e uma queda de 5% do quantitativo da faixa de 300 a 400, embora a prova de matemática de 2018, tenha apresentado um grau de dificuldade maior.

Nota-se pelo desempenho, que provavelmente a preparação nas escolas de base tem melhorado e provavelmente estão dando mais atenção ao exame do Enem, o que implica na considerável melhora das notas.

Figura 3: Desempenho na área de Matemática no Enem, nos anos de 2017(A) e 2018(B).



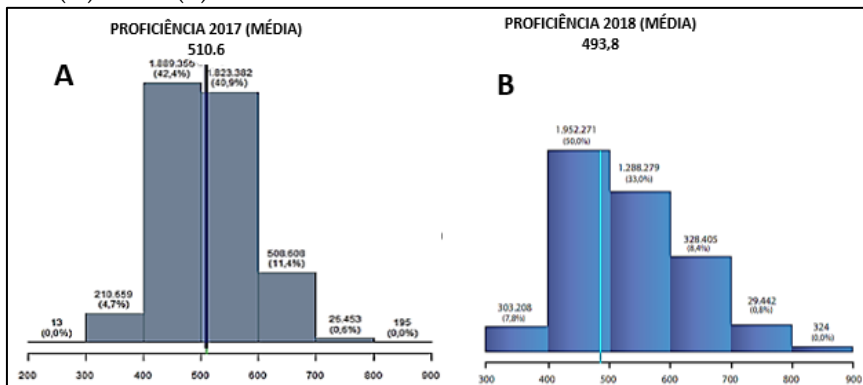
Fonte: INEP.

Na Figura 4, pode-se observar que o desempenho da prova de 2017 ficou bem próximo da média. Dentre os 83% dos participantes, ficaram em torno da média de 40% a 60% de acertos da prova e uma minoria de 5% abaixo dos 400 pontos e menos de 1% acima de 700 pontos. Isso representa que foi uma prova bem elaborada que conseguiu representar em parte todo o conhecimento ministrado e teve um grau de dificuldade maior que o ano anterior.

Com relação ao desempenho da prova de 2018, o desempenho ficou mais distribuído, em que 50% dos participantes conseguiram alcançar a média, já um percentual menor de 7% em relação a prova do ano anterior em relação a pontuação de 500 a 600 e também uma queda de rendimento na faixa de 700 a 800 pontos.

Pelos gráficos indicativos de ciência da Natureza percebe-se que houve mudanças na prova, e que talvez o grau de dificuldade tenha aumentado em relação ao ano anterior. Como os professores das escolas do ensino básico já estão mais conscientes da importância e significado no Enem na vida do aluno, há indícios de uma maior dificuldade na exposição das questões com itens que há necessidade uma maior preparação do candidato.

Figura 4: Desempenho na área de Ciências da Natureza, nos anos de 2017(A) e 2018(B).



Fonte: INEP.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo foi adotado pela escola a fim de melhorar o desempenho dos alunos nos exames do Enem e aproximar as avaliações rotineiras da escola a um modelo próximo a este exame, dada a relevância do mesmo nas opções de cursos superiores escolhidos por estes estudantes. Dada a importância deste exame no desempenho e futuro do aluno, optou-se por esta modalidade, priorizando a quantidade de questões e a rapidez do raciocínio a fim de conseguir responder a maioria das questões propostas.

O questionamento final é como devemos trabalhar e educar nossos alunos defronte aos exames nacionais de Massa, como o Enem. Como melhorar o desempenho deste aluno nestes exames e ao mesmo tempo dar uma educação global, completa e contemporânea a estes alunos, de forma a contemplar sua educação e seu desenvolvimento pessoal e emocional, encaminhando o seu futuro profissional.

REFERÊNCIAS

DEMO, P. **Educar pela pesquisa**. 8. ed. Campinas-SP: Autores associados, 2007.

DIAS, G. N.; VOGADO, G. E. R. & SILVA, P. R.: **Matemática Interativa e Descritiva**, p. 153 e 154. Ed: Gustavo Dias, Belém, 2019.

LUCKESI, C. C. **Verificação ou avaliação: o que pratica a escola?**
In: LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições**. 19. ed. São Paulo: p. 85-101. Cortez, 2008.

MEC - INEP: **Resultados dos Participantes do Enem 2017**. Maria Inês Fini, Ministério da Educação, 2018.

MEC - INEP: **Resultados dos Participantes do Enem 2018**. Press Kit – Atendimento à Imprensa, Ministério da Educação, 2019.

PERRENOUD, Philippe. **Avaliação: Da Excelência à regulação das aprendizagens**. Porto Alegre: Artmed, p. 51, 1999.

SAKAMOTO, B. A. M.; VERÁSTEGUI, R. L. A. **Avaliação Como Ato de Amor e Não de Exclusão**. II Simpósio Nacional de Educação. ISSN 2178-8669, 2010.

CAPÍTULO 2

Utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC'S) nas Aulas de Disciplinas que Envolvem Cálculo

Ravila Beatriz Costa Furtado

Edilson Santos Melo

Eldilene da Silva Barbosa

Wagner Davy Lucas Barreto

Gustavo Nogueira Dias

Vanessa Mayara Souza Pamplona

Jamille Carla Oliveira Araújo

INTRODUÇÃO

O desejo do homem em desenvolver ferramentas que lhe poupe tempo, esforços físicos e mentais sempre fez parte de seus sonhos até chegar aos dias atuais. No setor educacional o desenvolvimento e uso de aplicativos tem facilitado o trabalho duro na execução de cálculos.

Com o avanço das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) nos últimos anos e da presença desta em vários campos de atividade social é sábio lembrar que a necessidade à inserção desta tecnologia no cenário acadêmico tem se tornado cada vez mais relevante, porém devido às dificuldades enfrentadas pelos educandos, há uma precisão da utilização de tal recurso nas aulas de Cálculo dentro da área de Ciências Exatas. Sendo que quando se fala de Cálculo é possível perceber uma grande dificuldade de

aprendizagem dos educandos em relação a essa disciplina, causando assim uma insatisfação e com isso uma evasão deles.

Dandolini, Vanini e Souza (2004) discutem a necessidade de se buscar fontes alternativas de ação pedagógica que juntamente com outros meios possam vir a afastar esse problema que a tempo persistem nas universidades.

Com a popularização das tecnologias digitais nos mais diferentes ramos da sociedade, seja nas grandes organizações ou na integração sistemática e instantânea da comunicação, não podemos negar que o uso das tecnologias digitais faz parte do atual contexto mundial, gerando fatores de impacto na atual cultura como nos fala Flores (2018) “Atualmente, as tecnologias digitais fazem-se presentes nas mais distintas esferas da sociedade, seja na organização e na sistematização de informações”.

Seguindo este contexto pode ser observado que o principal desafio é encontrar recursos didáticos existentes que venham ajudar a sanar as dificuldades enfrentadas pelos educandos dos cursos de ciências exatas, é nesse cenário e com a finalidade de diminuir tais dificuldades que entra o uso das TIC's. Sendo assim na atualidade têm surgido métodos e estratégias para facilitar o ensino de cálculo e conseqüentemente reduzir as taxas de reprovação em tal disciplina. As principais ferramentas que vem sendo utilizadas são as ferramentas computacionais como é o caso dos *softwares* de Matemática. No entanto para o uso de tais aplicativos ouve em primeiro lugar a necessidade de criar ferramentas com os smartphones, tablets, notebooks é entre outros, tudo isso com um único objetivo o de ajudar os usuários a desempenhar certas tarefas com mais facilidade e velocidade. É nesse cenário que surge para o professor múltiplas possibilidades para que ele possa proporcionar diversas situações possibilitando que o educando desenvolva uma conexão entre aquilo que ele vai aprender e a ferramenta facilitadora.

O uso de tais ferramentas surge a partir do momento em que o desenvolvimento tecnológico tem efeitos positivos, haja vista que em todas as áreas da ciência houve um aumento na procura dos

Ensinos Tecnológicos dentro dos Centros Acadêmicos. Se verificarmos até meado de 2010 esses profissionais saíam com seus diplomas para o mercado de trabalho sem experiência nenhuma na área tecnológica, e se olharmos com mais peculiaridade isso ainda ocorre em algumas Universidades, por isso se faz necessário à criação de projetos que torne obrigatório ter o uso das TIC's como disciplina nos Currículos acadêmicos nos cursos de ciências exatas.

Douglas e Miriam (2011), descrevem que as tecnologias de informação e comunicação (TIC's) incorporada às práticas sociais, transforma a forma de vida do homem, pois essa oferece outras maneiras de comunicação, produção e comercialização de bens e mercadorias, divertimento e educação. Sendo assim as tecnologias são fundamentais para a sobrevivência de nossa sociedade, elas podem trazer hoje dados, imagens, resumos de forma rápida e atraente.

Dessa forma, se volta para a discussão da importância do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's) no processo de ensino e aprendizagem de cálculo.

O objetivo deste trabalho é fazermos uma análise da importância do uso das TICs para o ensino e aprendizagem de cálculo nos cursos de ciências exatas.

SOBRE PHOTOMATH

O PHOTOMATH é um aplicativo com uma calculadora conectada a câmera do smartphone com o objetivo de escanear as equações matemáticas e solucioná-las, sendo assim uma ferramenta de apoio ideal na hora de resolver cálculos. Ele é gratuito e está disponível para *iOS* e *Windows Phone*. A primeira versão para *Android* surgiu 2015.

O PHOTOMATH é uma ferramenta extremamente simples, mas cumpre com o seu objetivo e vai além, pois além dele mostrar o resultado dos cálculos matemáticos ele ainda nos dar os passos de como foi possível chegar a tal resposta, o que é algo de grande importância para quem não gosta de perder tempo.

METODOLOGIA

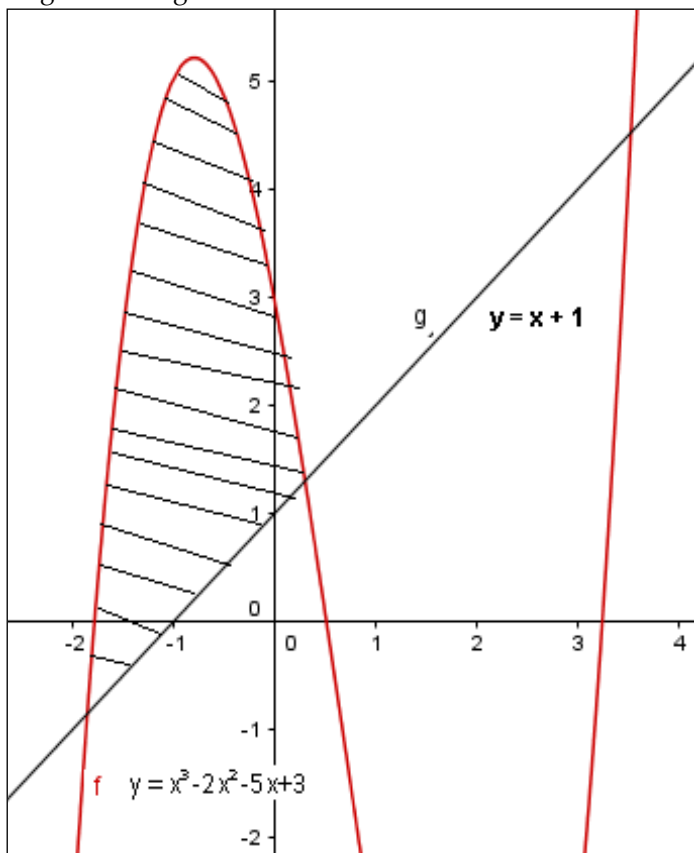
No intuito de atingirmos os nossos objetivos, optamos por uma pesquisa de abordagem qualitativa.

Com base na aplicação de cálculos envolvendo integrais analisamos as contribuições que o uso dos *softwares* em particular o PHOTOMATH pode trazer aos processos de ensino e aprendizagem do conceito de Cálculo. Sendo que este aplicativo trás com sigo uma característica que o distingue dos demais que é o fato de não haver a necessidade de digitar as operações ainda que ele também disponha dessa possibilidade, onde ele traduz matematicamente a imagem escaneada pela câmera do aparelho celular e expõe a solução do exercício proposto, como também demonstra como ele chegou aquele resultado. Desta forma demonstraremos a importância do uso das *Tecnologias da Informação e comunicação* (TICs) tem na disciplina de cálculo dos cursos de Ciências Exatas, usando como exemplo a aplicação das integrais no cálculo de área.

Demonstraremos o uso de tal ferramenta no cálculo de área da região limitada no gráfico abaixo, que foi fornecido pelo professor em uma aula no curso de pós-graduação em ensino da Matemática na cidade de Belém do Pará no dia 28 de abril de 2019 no Bairro Batista campos às 15:00h, no campus da ESAMAZ, sendo que a disciplina é a de tópicos de cálculos.

Podemos citar como exemplo a Figura 1, conde foi fornecido dados e gerado o gráfico a seguir:

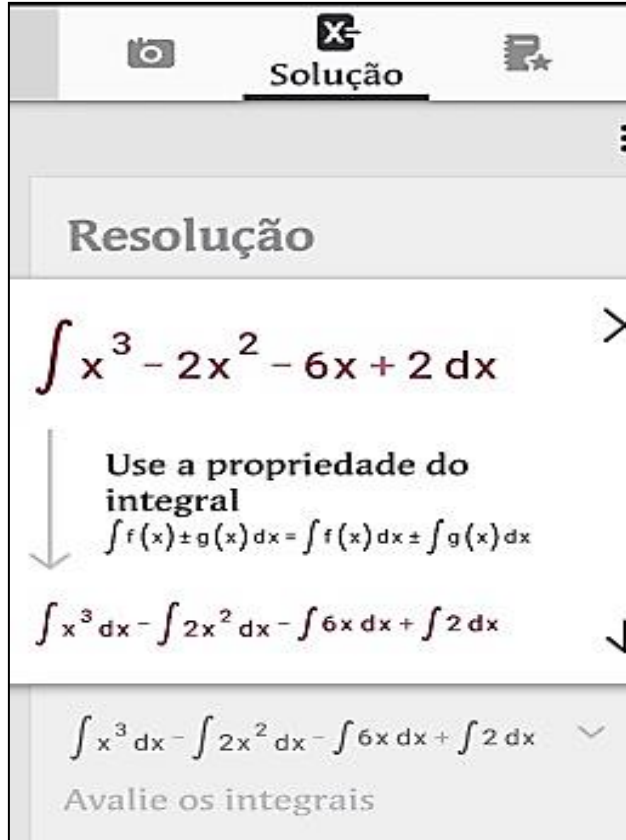
Figura 1: imagem utilizada em sala.



Fonte: Os autores.

Podemos analisar a seguinte Figura 2 onde já está sendo trabalhado no aplicativo PHOTOMATH uma integral que foi trabalhada durante a execução da aula.

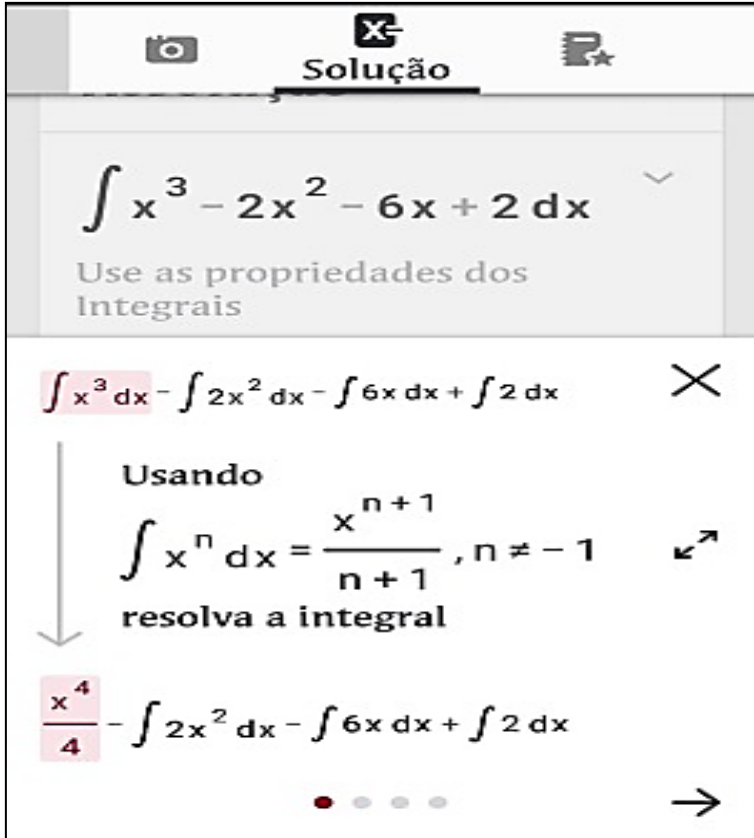
Figura 2: Tela do PHOTOMATH ilustrando a integral.



Fonte: Os autores.

O desenvolvimento da integral como mostra as Figuras 3 e 4 é exibido passo a passo na tela do aplicativo. Dessa forma o aluno pode estar tirando suas dúvidas pois o software explica todos seus passos.

Figura 3: Tela do PHOTOMATH ilustrando a resolução integral.



Fonte: Os autores.

O aplicativo consegue desmembrar e amostrar passo a passo o que está sendo realizado, e apresentando a fórmula geral de aplicação da integral. Não apresenta apenas o resultado e sim tudo de forma discriminada.

Figura 4: Tela do PHOTOMATH ilustrando a resolução integral.

The screenshot shows the PHOTOMATH app interface with the word "Solução" (Solution) at the top. The main content is divided into three sections, each with a dropdown arrow on the right:

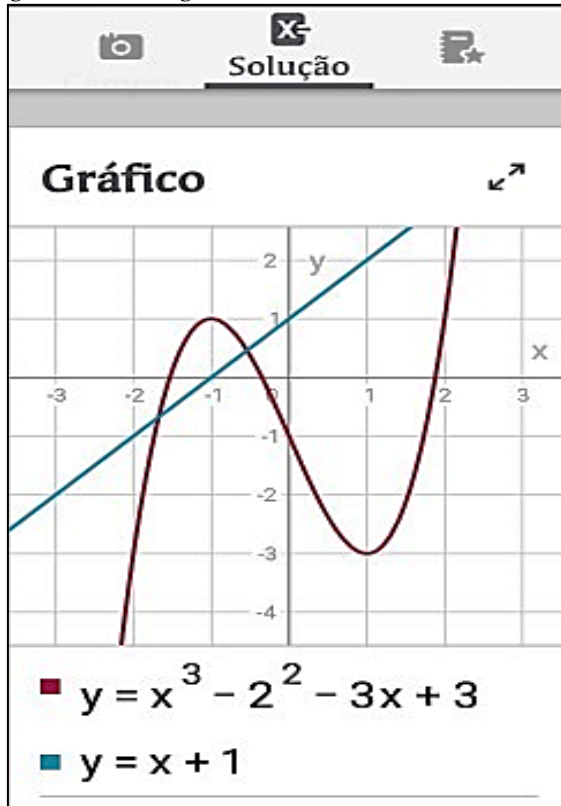
- Section 1:** The integral $\int x^3 - 2x^2 - 6x + 2 dx$ is shown. Below it, the instruction "Use as propriedades dos Integrais" (Use the properties of Integrals) is displayed.
- Section 2:** The integral is decomposed into $\int x^3 dx - \int 2x^2 dx - \int 6x dx + \int 2 dx$. Below it, the instruction "Avalie os integrais" (Evaluate the integrals) is displayed.
- Section 3:** The result of the integration is shown as $\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 2x$. Below it, the instruction "Some a constante de integração $C \in \mathbb{R}$ " (Add the integration constant $C \in \mathbb{R}$) is displayed.

At the bottom of the screen, the final result is displayed on a dark red background: $\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 2x + C, C \in \mathbb{R}$.

Fonte: Os autores.

Além do aplicativo resolver a integral ele ainda disponibilizar outras maneiras de analisar os resultados, como por exemplo o gráfico da integral da Figura 5, e para obtenção do gráfico será apenas necessário digitar ou fotografar a mesma no software.

Figura 5: Tela do PHOTOMATH ilustrando o gráfico da integral.



Fonte: Os autores.

Após o cálculo envolvendo as integrais ter sido executado no PHOTOMATH foi possível constatar a eficácia de tal ferramenta, onde ela nos forneceu a resposta corretamente e junto da resposta se quisermos ela também nos fornece o gráfico, como é possível constatar na imagem acima.

PRELÚDIO

Com muita reprovação nas disciplinas de cálculo, isso vem indicar que é preciso renovar urgentemente a metodologia de ensino que se mostra ultrapassada e desgastada. Levando em conta

esse fato e o grande crescimento tecnológico surge a necessidade de adaptar às novas metodologias de ensino e aprendizagem ao uso das tecnologias.

Isso mostra que as grandes transformações científicas e tecnológicas da sociedade passaram a exigir uma nova forma de ensino e aprendizagem fazendo com que o uso um software nas aulas de cálculo como ferramenta de apoio seja necessário auxiliando os acadêmicos a construírem os conceitos matemáticos que deverão ser base para eles aplicarem tais conceitos.

Lemos et al. (2002) *apud* Flores (2018, p. 24) nos fala que vivemos em um momento de cultura digital que podemos definir como:

Um ecossistema complexo onde reina a interdependência entre o macro sistema tecnológico (a rede de máquinas interligadas) e o microsistema social (a dinâmica dos usuários), construindo-se pela disseminação de informação, pelo fluxo de dados e pelas relações sociais aí criadas (LEMOS, 2002).

Ainda é possível prever diferentes relações dessa cultura entre o sujeito e as informações, onde essas circulam de uma forma tanto dinâmica quanto democrática.

Desta forma é possível afirmar que o homem influencia a tecnologia e está por sua vez influencia o homem em uma relação de forma mútua e integrada.

Isso nos leva ao fato de que existe várias maneiras de abordar a resolução de cálculo, em particular a resolução das integrais, fazendo com que o processo de ensino e aprendizagem se torne mais interessante e atraente para os acadêmicos. Uma delas é o caso de uso dos aplicativos disponíveis para dispositivos móveis.

De acordo com Flores et al. (2018) com uso das TIC's o acadêmico pode deixar de ser apenas um ouvinte e assim passar a explorar, manipular e navegar hiper textualmente.

Na visão de Lévy, um fluxo hipertextual está relacionado:

Lemos et al. (1993) *apud* Flores (2018, p. 24-25), na visão de Lévy, um fluxo hipertextual está relacionado:

A reação ao clique sobre o botão (lugar da tela de onde é possível chamar um outro nó) leva menos de um segundo. A quase instantaneidade da passagem de um nó a outro, permite generalizar e utilizar toda sua extensão o princípio da não linearidade. Isto se torna a norma, um novo sistema de escrita, uma metamorfose da leitura, batizada navegação (LÉVY; COSTA, 1993).

Por causa disso a educação não pode ficar isenta a essas influências tecnológicas, uma vez que esta é composta por sujeitos oriundos de uma sociedade influenciada pela cultura digital. Esse fato tem levado diversos pesquisadores a sugerir, há tempos, a utilização das tecnologias digitais como agente catalisador de mudanças e aprimoramento do conhecimento.

O USO DAS TIC'S NO ENSINO DE CÁLCULO

As contribuições das *Tecnologias da Informação e comunicação* (TIC's) para a prática de resolução de cálculo provém de o uso da tecnologia poder promover a automatização das tarefas matemáticas, além de ser um mediador pedagógico no processo de aprendizagem.

Douglas e Miriam (2011) nos falam que o uso das TIC's no ensino e aprendizagem de matemática é algo recomendado pelos especialistas, por motivo de tais ferramentas favorecer os acadêmicos mostrando que esses podem trabalhar com diferentes representações, tais como exemplo uma tabela, gráficos e expressões algébricas sendo de forma rápida e articulada. Isso faz com que tais ferramentas sejam especialmente recomendadas para a disciplina de Cálculo.

Sobre a utilização das TIC's e suas potencialidades na resolução de cálculos, em particular dos o PHOTOMATH essas tecnologias não podem mais serem vistas apenas como complementos para ensino e

aprendizagem. Sendo assim é possível observar que as possibilidades e as potencialidades das interações humanas com tais ferramentas vêm de forma inquestionável ganhado espaço no conjunto das práticas junto à sociedade, estabelecendo neste contexto, as mais variadas formas de influência no ensino e aprendizagem. Portanto, “essas variedades de formas demonstram uma vantagem ao ensino e aprendizagem de Cálculo por meio dessas novas mídias, desenvolvendo máquinas que poderão auxiliar em atividades procedimentais” (PIRES, 2016, p. 35).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

De acordo com a metodologia utilizada percebemos que foi possível possibilitar a melhor compreensão e visualização do conteúdo estudado em sala de aula que foi o cálculo. Nesse sentido o PHOTOMATH pode estabelecer a proximidade dos alunos com os professores, pois a aceitação por parte deles de uma ferramenta de ensino moderna e de fácil acesso pode ser facilitada, pois qualquer aluno, portador de um celular compatível com as características e particularidades do aplicativo pode tê-lo ao seu alcance, haja vista que os smartphones estão cada vez mais presentes no convívio das pessoas de um modo geral.

O PHOTOMATH ainda é uma ferramenta pouco conhecida tanto por parte dos professores quanto pelos alunos, apesar de ser de livre acesso.

Evidentemente que o aplicativo ainda precisa de ajustes, pois ele está em processo de evolução, e trabalhos como este que buscam apresentar essas novas formas da tecnologia digital auxiliadoras no processo de ensino, vêm, com o propósito de alertar à comunidade docente sobre esse avanço constante dos métodos de ensino. Por isso a prática docente deve ser orientada hoje a partir de uma nova lógica de ensino, que é a redefinição do papel do professor. Ensinar utilizando-se das redes de informação, trazendo o professor para o meio do grupo de alunos. O professor passa a encarar a si mesmo e a seus alunos como uma “equipe de trabalho”, com desafios

novos e diferenciados a vencer, e com responsabilidades individuais e coletivas a cumprir. Uma lógica fundamentada na exploração de novos tipos de relacionamentos não excludentes que enfatize várias possibilidades de encaminhamento das reflexões, estimulando a possibilidade de outras relações entre áreas de conhecimento aparentemente distintas. Nessa nova abordagem é preciso que o professor se aproxime do aluno e se posicione como aliado, um parceiro no sentido de encaminhar e orientar o aluno diante das possibilidades e formas de se relacionar com o “novo”

RESULTADOS SOBRE O USO DAS TIC'S

Desta forma foi possível chegarmos a um resultado que o uso das tecnologias de informação e comunicação na aprendizagem de cálculo junto à disciplina Tópicos de cálculo foi de grande relevância, pois facilitou uma melhor compreensão da mesma como um todo. E em particular no cálculo de área, como demonstrou este trabalho.

O uso do aplicativo PHOTOMATH possibilitou uma visualização mais precisa do gráfico com seus principais pontos, bem como uma maior interação com esses elementos através da manipulação deles gerando resultados imediatos. É importante destacarmos que o uso do aplicativo se deu como forma de uma ferramenta facilitadora, pois ela não substituiu o nosso ensino aprendido, sendo que com ela foi possível chegarmos a um resultado preciso e com menos tempo como seria da maneira tradicional, onde tal tarefa seria mais trabalhosa e por consequência levaria muito mais tempo para se obter os mesmos resultados. Então o uso das TICs com foi o caso do aplicativo PHOTOMATH tornou o aprendizado da disciplina Tópicos de Cálculo muito mais significativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É possível concluirmos que o uso das tecnologias de informação e comunicação na aprendizagem de cálculo junto à

disciplina Tópicos de cálculo foi de grande relevância, pois facilitou uma melhor compreensão da mesma como um todo. E em particular no cálculo de área, como demonstrou este trabalho.

O uso do aplicativo PHOTOMATH possibilitou uma visualização mais precisa do gráfico com seus pontos, suas interseções e delimitações das funções que formam sua área, bem como uma maior interação com esses elementos através de manipulação dos mesmos e obtendo resultados imediatos. É importante destacarmos que o uso do aplicativo PHOTOMATH se deu como forma de uma ferramenta facilitadora, pois ela não substituiu o nosso ensino aprendido, sendo que com ela foi possível chegarmos a um resultado preciso e com menos tempo como seria da maneira tradicional, onde tal tarefa seria mais trabalhosa e por consequência levaria muito mais tempo para se obter os mesmos resultados.

REFERÊNCIAS

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. **A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades.** 2014. Disponível em <www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/download/729/328> Acesso em 13/05/2019.

DANDOLINI, G. A.; VANINI, L.; SOUZA, J. A. **A utilização de Software no Ensino de Cálculo.** 2004. Disponível em: <www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/15/artigos/01_463.pdf>. Acesso em 03/05/2019.

FLORES, J. B.; LIMA, V. M.; MÜLLER, T. J. **O uso das Tecnologias da Informação e Comunicação no ensino de Cálculo Diferencial e Integral: reflexões a partir de uma metanálise.** 2018. Disponível em: <periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/download/16238/13196>. Acesso em 02/05/2019.

MARIN, D.; PENTEADO, M. G. **Professores que utilizam tecnologia de informação e comunicação para ensinar Cálculo.** 2011. Disponível em: <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/ticprofessores/5998.pdf> Acesso em 07/05/2019.

PIRES, L. F. R. **As Influências das Tecnologias da Informação e Comunicação nas Estratégias de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.** 2016. Disponível em: <www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/Dissertação-Luiz-Fernando.pdf> Acesso em 15/05/2019.

SANTANA, B. M.; SILVA, M. A. A. **Ensino e Aprendizagem de Cálculo: A partir do Uso de Softwares Matemáticos.** 2016. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV056_MD1_SA8_ID6862_18082016222926.pdf> Acesso em 07/05/2019.

<https://www.techtudo.com.br/listas/2019/02/aplicativo-de-matematica-conheca-melhores-apps-para-fazer-contas.ghtml> Acesso em 02/05/2019

CAPÍTULO 3

A Utilização de Tecnologias Móveis para Cálculo de Área Utilizando a Função Quadrática e Integral

Alessandra Costa

Marcio Frank

Renata Carolina Freitas dos Santos Bentes

Valdenor Cunha

Gustavo Nogueira Dias

Vanessa Mayara Souza Pamplona

Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior

INTRODUÇÃO

Hoje nosso mundo está cada vez mais competitivo no mercado de trabalho e o aprendizado da matemática é muito importante, assim como se habituar a utilizar as diversas ferramentas tecnológicas atuais fazem muita diferença para o profissional da educação assim como em outras áreas. Em alguns casos a aversão apresentada a disciplina de matemática é ocasionada devido à falta de hábito do aluno em desenvolver seu pensamento matemático. No dia a dia com os alunos, percebe-se explicitamente essa rejeição bem acentuada na afirmação de que não gostam da disciplina ou que ela é muito difícil. Para ajudar a minimizar essa realidade, e ajudar os educadores nessa missão, foram criados alguns aplicativos que tem como intuito facilitar a compreensão dos conteúdos. Sendo corretamente empregados eles podem desmistificar a matemática para todos os níveis de ensino, servindo como fortes aliados aos estudos.

O presente artigo refere-se ao cálculo de uma área que possui regiões de difícil medição, pois tem trajetória curvilínea, onde a melhor aplicação encontrada foi utilizar a integral definida, porém, com o suporte de tecnologias móveis para o cálculo de área.

A área em questão é parte da área da Universidade federal do Pará, pois vista de cima através do Google Maps, como mostra a Figura 12, apresenta as características mencionadas, onde seus limites são curvilíneos, e possui os elementos necessários com as metodologias propostas.

As dificuldades em calcular áreas desse tipo são diversas, pois não representam figuras planas e sim curvas, onde o estudo de cálculo de Integral propõe uma resposta satisfatória. Primeiramente, é necessário entender os conceitos de função quadrática e integral definida para que se alcance o objetivo proposto pelo presente artigo.

- Função Quadrática

Dante (2008), diz que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a , b , c , com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2+bx+c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

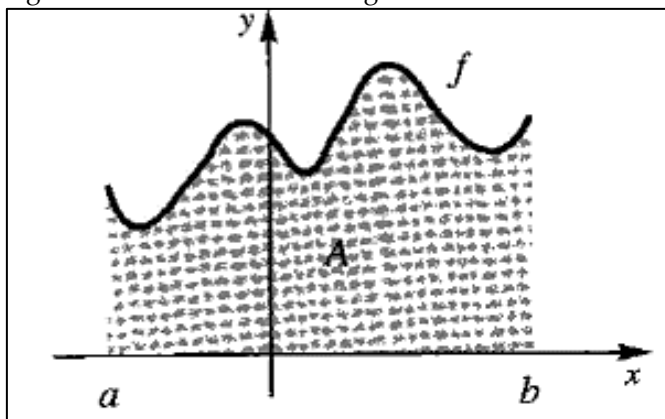
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow ax^2+bx+c$

- Integral definida- Cálculo de Área

Segundo Guidorizzi (2001), seja f continua em $[a,b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x=a$, $x=b$, $y=0$ e pelo gráfico na Figura 1,

Figura 1: Cálculo da área da região abaixo da curva.

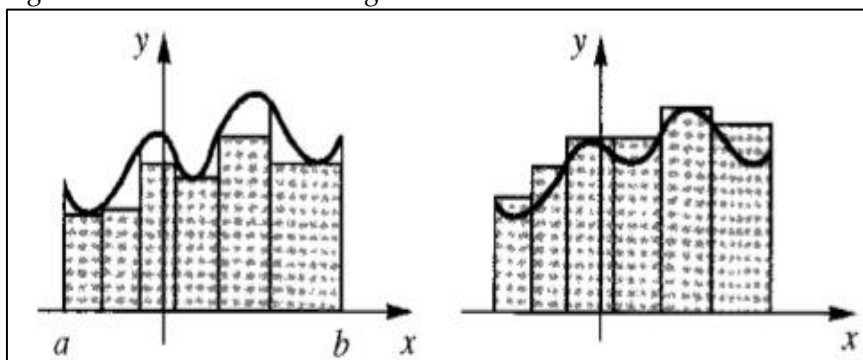


Fonte: Guidorizzi (2001).

Seja, então, $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam \underline{c}_i e \bar{c}_i em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que (\underline{c}_i) é o valor mínimo e (\bar{c}_i) o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, uma boa definição de área A deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n (\underline{c}_i) \Delta X_i$ seja uma aproximação por falta de área A e que $\sum_{i=1}^n (\bar{c}_i) \Delta X_i$ seja uma aproximação por excesso, isto é:

$$\sum_{i=1}^n (\underline{c}_i) \Delta X_i \leq \text{a área } A \leq \sum_{i=1}^n (\bar{c}_i) \Delta X_i, \text{ considere a Figura 2, a seguir}$$

Figura 2: Cálculo da área da região abaixo da curva.



Fonte: Guidorizzi (2001).

Como a soma de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x)dx$, quando $\max \Delta X_i \rightarrow 0$, e a área será definida por:

$$\text{Área} = A = \int_a^b f(x)dx$$

METODOLOGIA

A presente pesquisa foi realizada em um curso de pós-graduação em ensino de matemática de uma faculdade particular do município de Belém, em 2019. Foi proposto aos alunos realizar o cálculo da área da parte de um terreno da Universidade Federal do Pará, Figura 3.

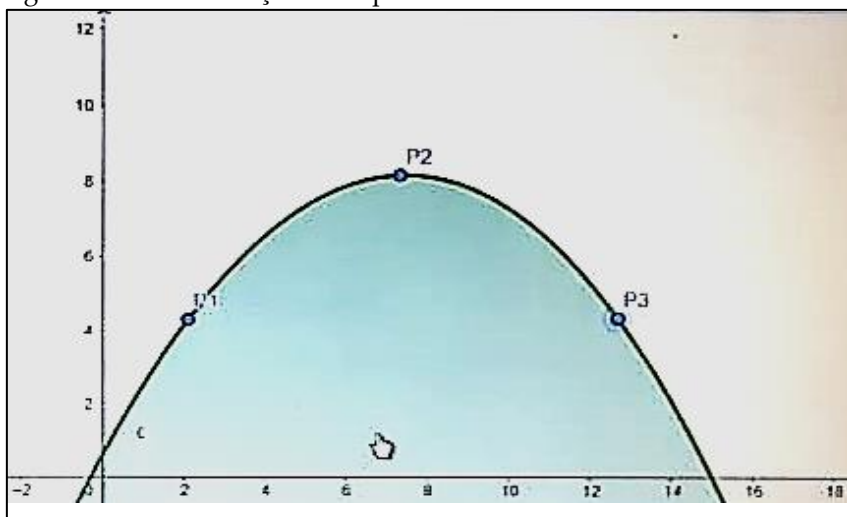
Figura 3: Área da universidade Federal do Pará.



Fonte: Google Maps.

Foram distribuídas folhas impressas com a imagem, para facilitar a visualização também foi apresentado o esboço do gráfico no aplicativo “GEOGEBRA”, como mostra a Figura 4.

Figura 4: Gráfico esboçado no aplicativo GEOGEBRA.



Fonte: dados da pesquisa.

Utilizou-se os aplicativos “EASY EQUATIONS” e “CALCULUS TOOLS” para realização dos cálculos.

METODOLOGIA

A utilização dos dispositivos móveis na educação tem sido estudada em um campo de pesquisa chamado Mobile Learning ou m-learning. Onde busca-se entender, com as pesquisas realizadas dessa área, como as tecnologias móveis podem favorecer a aprendizagem, contribuindo para que a mesma ocorra em qualquer tempo e lugar (SILVA; BATISTA, 2015).

Nessa perspectiva, o impacto das transformações de nosso tempo impulsiona a sociedade, e mais especificamente os educadores, a repensarem a temporalidade de suas práticas pedagógicas no que cerne as tecnologias. Nesse sentido, precisamos estar atentos para reconhecer que a expansão das vias do saber não obedece mais a lógica vetorial, fazendo-se necessário refletirmos sobre o uso de dispositivos tecnológico no processo de ensino, e perceber as múltiplas possibilidades que ele pode nos apresentar.

As tecnologias móveis tornaram-se parte integrante da sociedade contemporânea, que está cada vez mais digital. Segundo uma pesquisa, divulgada em 2014 pela Datafolha, mostrou que, em apenas um ano, 20,5 milhões de brasileiros passaram a acessar a Internet por celular ou tablet. O acesso pelo celular, no Brasil, quase dobrou em dois anos, segundo essa pesquisa. Essa nova sociedade requer uma educação formal que reconsidere a forma de entender o ensino, valorizando práticas e aprendizagens que ocorrem dentro e fora do ambiente escolar, e que amplie os seus horizontes em termos dos recursos que podem contribuir para os desafios atuais.

Os dispositivos móveis podem contribuir para mudar o paradigma da sala de aula tradicional, favorecendo uma aprendizagem mais personalizada (SILVA; BATISTA, 2015). Portanto, é essencial que o professor se aproprie da gama de saberes advindos com o surgimento das tecnologias digitais da informação e da comunicação, para que estes possam ser sistematizados em sua prática pedagógica.

As Tecnologias da Informação e Comunicação Móveis e sem fio (TIMS) aumentaram os desafios dentro da sala de aula. Sendo necessário que os educadores se adequem a essa nova realidade. Entre as TIMS, temos o celular, um aparelho popular entre os jovens, que apesar da proibição da utilização pelos alunos em sala de aula, utilizando-se as ferramentas certas pode tornar-se um aliado no ensino (BENTO; CAVALCANTE, 2013).

A inserção das (TIMS) no processo de aprendizagem, se integrada à capacitação constante e presença atuante dos educadores nesta proposta de ensino, nos leva a evidenciar influências positivas na vida da comunidade escolar, na medida em que os agentes do processo de ensino e aprendizagem são capazes de gerar a dinamização, a ampliação de habilidade cognitivas, a possibilidade de extensão da memória e atividades interativas junto a capacidade de atuação em rede.

Em suma, com a ampliação da utilização dos dispositivos móveis no mundo todo, houve mudanças no modo de produção e compartilhamento do conhecimento. Através das múltiplas

possibilidades para a aprendizagem, baseadas na mobilidade de dispositivos, em que os conteúdos e acesso ao conhecimento acontecem a qualquer hora e em qualquer lugar, surgem novos desafios para a escolarização. Com os dispositivos móveis chegando às escolas brasileiras, seja através de programas governamentais e dos próprios alunos ou por solicitação das escolas, as pesquisas, estudos e discussões sobre as possibilidades educacionais dessas ferramentas se renovam (MELO; CARVALHO, 2014). Por conseguinte, a promoção das habilidades e desenvolvimento cognitivo do aluno junto a eficiência de softwares, os possibilitam a aquisição de novos conhecimentos e ampliam sua criatividade.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Utilizamos o plano cartesiano x e y , na curvatura que se assemelha a uma parábola, plotamos três pontos P_1 (221,05; 452,63), P_2 (631,57; 831,57) e P_3 (1326,36; 452,63) em pontos aleatórios. Encontramos os pares ordenados já na escala real, com esses valores utilizamos o aplicativo “EASY EQUATIONS” para encontrar os coeficientes da função quadrática a , b e c , como mostra a Figura 5.

Figura 5: Aplicando os valores no aplicativo “EASY EQUATIONS”.

| x_1 | x_2 | x_3 | y |
|-------------|---------|-------|--------|
| 221.05^2 | 221.05 | 1 | 452.63 |
| 631.57^2 | 631.57 | 1 | 831.57 |
| 1326.36^2 | 1326.36 | 1 | 452.63 |

Fonte: dados da pesquisa.

Em seguida o aplicativo nos fornece os valores dos coeficientes, como mostra a Figura 6.

Figura 6. Valores dos coeficientes encontrados utilizando o “EASY EQUATIONS”.

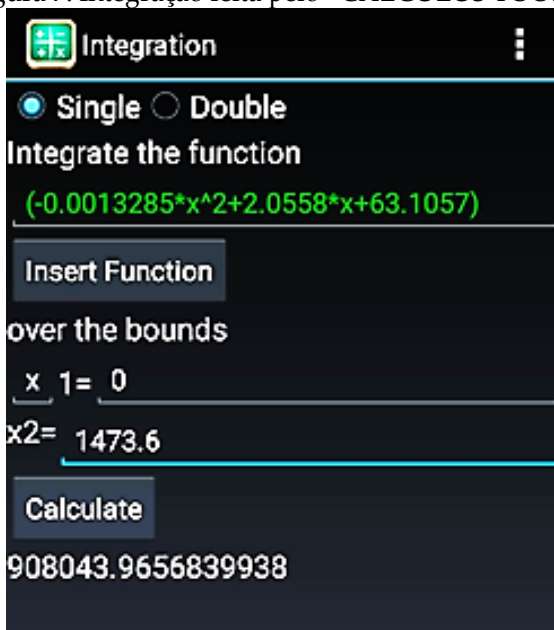
The screenshot displays the 'EASY EQUATIONS' app interface. It is divided into three main sections, each with a blue header and an upward-pointing arrow:

- Solutions:** Shows the values for three variables: $x_1 = -1.3285 \times 10^{-3}$, $x_2 = 2.0558$, and $x_3 = 63.1057$. Below these is a checkbox labeled 'Display as fractions' which is currently unchecked.
- Row echelon form:** Shows three equations in a simplified form:
$$1.0x_1 + 4.5238 \times 10^{-3}x_2 + 2.0465x_3 = 9.2632 \times 10^{-3}$$
$$1.0x_2 + 6.1072 \times 10^{-3}x_3 = 2.4412$$
$$1.0x_3 = 63.1057$$
- Initial equations:** Shows the original equation: $48863.1025x_1 + 221.05x_2 + 1.0x_3 = 452.63$. Below this is a hint: 'Hint: Pinch to zoom text on the equations or answers.'

Fonte: dados da pesquisa.

Por fim, utilizou-se o aplicativo “CALCULUS TOOLS” para calcular a integral definida, Figura 7.

Figura 7: Integração feita pelo “CALCULUS TOOLS”.



Fonte: dados da pesquisa.

Na concepção de Barcelos e Batista (2013), o uso de dispositivos móveis como tablet contribui para o desenvolvimento de atividades, permitindo a exploração de abordagens variadas e diferentes formas de representação de soluções dos alunos para um determinado problema. A relação dos alunos com o tablet, pode ser mais íntima do que com outros artefatos que são utilizados apenas para a aprendizagem de tarefas matemáticas, como a calculadora, por exemplo, por se tratar de um dispositivo que o usuário pode configurá-lo ao seu modo, para uso educacional ou não.

Percebemos que o uso dos aplicativos além de despertar o interesse dos alunos ao descobrirem uma ferramenta nova a ser utilizada para realização de cálculos também os torna menos cansativos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos grandes desafios, hoje, para o educador matemático, é trabalhar com os seus alunos a habilidade de pensar matematicamente, de formar e de tomar decisões, baseando-se na inter-relação entre o sentido matemático e o situacional do problema. Ao pensarmos nas tecnologias móveis como ferramenta para auxiliar no ensino, mais especificamente no de Matemática, estamos nos referindo aos aplicativos que usamos com a finalidade de nos ajudar no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina. Desta forma, é preciso que o educador procure aspectos considerados positivos nestes aplicativos, a fim de que realmente se constituam em facilitadores para uma aprendizagem significativa, dentro dos objetivos definidos pelo educador e pela escola (GLAUDCHEFF; ZUFFI; SILVA, 2001).

REFERÊNCIAS

BARCELOS, G. T; BATISTA, S.C.F. **Uso de Aplicativos em Tablets no Estudo de Sistemas Lineares**: percepção de licenciados em Matemática. *Nuevas Ideas en Informática Educativa TISE*, 2013.

BENTO, M. C. M; CAVALCANTE, R.S. **Tecnologias Móveis em Educação: o uso do celular na sala de aula**. *ECCOM*, v. 4, n. 7, jan./jun. 2013.

DANTE, L. R; **Matemática – Volume Único – Ensino Médio**. 1. Ed. São Paulo: Ática, 2011.

F/NAZCA; DATAFOLHA. **Internet móvel, cidadania e consumo no Brasil**. 2014. Disponível em: Acesso em: 23 abr. 2019.

GLADCHEFF, A.P; ZUFFI, E.M; SILVA, D.M. **Um Instrumento para Avaliação da Qualidade de Softwares Educacionais de**

Matemática para o Ensino Fundamental. Congresso da Sociedade Brasileira de Computação VII WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, Fortaleza, CE, Brasil, 2001. Anais.

MELO, R. S; CARVALHO, M.J.S. **aplicativos educacionais livres para mobile learning.** XI EVIDOSOL e VIII CILTEC- Online - junho/2014 - <http://evidosol.textolivre.org>

SILVA, M.G; BATISTA, S.C.F. **Metodologia de avaliação: análise da qualidade de aplicativos educacionais para matemática do ensino médio.** CINTED-UFRGS, Novas Tecnologias na Educação, V. 13 N° 1, julho, 2015.

CAPÍTULO 4

Área de Regiões Através do Google Maps Utilizando Microsoft Excel e Cálculo Integral

Gustavo Nogueira Dias
Gilberto Emanuel Reis Vogado
Pedro Roberto Sousa da Silva
Vanessa Mayara Souza Pamplona
Cássio Pinho dos Reis
Edson Junior Ferreira de Azevedo
Carlos Alberto Nobre da Silva

INTRODUÇÃO

Neste capítulo será abordado o cálculo de áreas que possuam regiões de difícil medição, uma vez que essas medições possuem trajetórias curvilíneas, onde a melhor aplicação seria utilizando integral para o cálculo de sua área.

A partir deste propósito, a área do Shopping Grão Pará é apresentada, pois vista de cima conforme a Figura 3, apresenta estas características, onde seus limites são curvilíneos, e sua área já foi calculada e divulgada pelo Jornal Liberal em 22 de fevereiro de 2015 é de 123.000 m². Essa área foi usada para fazer uma comparação com a metodologia proposta.

As dificuldades em calcular áreas deste tipo de regiões são muito grandes. Pois elas não representam nenhuma figura plana e sim um aspecto curvilíneo que o estudo do cálculo de integrais propõe uma resposta.

O Microsoft Excel permite, a inserção de dados e gráficos, além do controle e manipulação de cálculos em planilhas criados a partir de uma necessidade de expressão e visualização mais esquematizada e voltada para o entendimento imediato. As planilhas podem ser para orçamentos, planejamentos e investimentos futuros e uso com diversos tipos de tabela e controle operacional de caixa, gastos, dividendos e lucros.

Para Batisti (2018), o Microsoft Excel é um programa de computador, criado para a manutenção e editoração de planilhas eletrônicas, como também a inclusão de gráficos criados com base nas informações da planilha. Além de todos esses recursos permite também a construção de diversos tipos de tabelas tendo por objetivo o controle total, tanto de despesas, receitas e o caixa da empresa.

O Excel 2013, faz o ajuste de curvas usando o método mínimo quadrados, onde obtém automaticamente a curva com seu ajuste polinomial, onde escolhemos o grau do polinômio interpolador.

O Processo dos Mínimos Quadrados tem sua linhagem no desenvolvimento dos valores máximos e mínimos de funções matemáticas. Mais exatamente, na cotação do(s) ponto(s) mínimo(s) de uma função que simula o desvio considerado na interpretação investigada pelo ajuste.

MATERIAL E MÉTODOS

a) Ajuste de Curvas

Para Ruggiero (1996), trata-se do modelo, em que o ajuste (ainda linear) dispõe-se a representar um fenômeno em que há mais de uma variável independente envolvida, ou seja, um modelo expresso matematicamente por $y = f(x_1, \dots, x_p)$, $p \geq 2$. Ou ainda, $y = f_1(x_1) + \dots + f_p(x_p)$, $p \geq 2$, onde f_1, \dots, f_p são p funções lineares nas variáveis x_1, \dots, x_p , respectivamente.

O ajuste polinomial, é o tipo de ajuste no qual se busca uma curva associada a um polinômio de grau maior ou igual a dois. Ou seja, a função de ajuste tem a forma

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p, \quad p \geq 2 \quad (2.1)$$

O conjunto de equações assim obtidos é um sistema linear de $p + 1$ equações com $p + 1$ incógnitas que, quando solucionado, fornece os parâmetros da função de ajuste. Implicando a notação e escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \dots & \sum x_{pi} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}x_{1i} & \dots & \sum x_{1i}x_{pi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_{pi} & \sum x_{1i}x_{pi} & \dots & \sum x_{pi}x_{pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_{pi} y_i \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Naturalmente, quanto maior for o número de variáveis independentes citadas no fenômeno, maior será o número de equações a serem resolvidas.

b) Integral – Cálculo de Áreas

O cálculo integral tem como sua finalidade originária encontrar área de região plana sob uma curva no plano cartesiano, onde estas curvas são definidas por funções. Por exemplo, na figura a seguir temos uma área A em que seu contorno é formado pela função $f(x)$ e as retas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ (eixo x).

O primeiro a apresentar uma definição de integral foi Bernhard Riemann, por isto, a chamamos de integral de Riemann. Ele partiu de uma ideia intuitiva de calcular esta área sob a curva aproximando-a por áreas de retângulos, ou seja, ele particionou o intervalo $[a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b]$ e com cada parte construiu retângulos com altura $f(c_i)$ para $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Chamando cada intervalo da partição de $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e para cada altura dos retângulos de $f(c_i)$ temos:

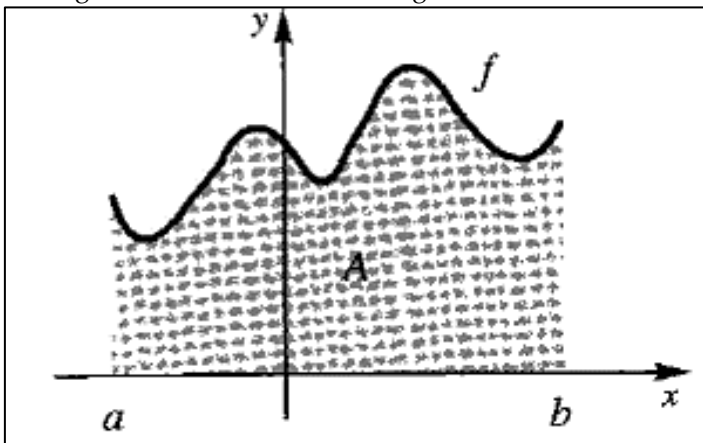
$$A \approx \sum_{i=1}^N f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Percebemos, portanto, que quanto mais partições forem feitas, os retângulos melhor preenchem a área sob a curva e menor será a sobras sobre a curva, assim minimizando o erro. Portanto, se fizermos $\Delta x \rightarrow 0$, as espessuras dos retângulos tentem a zero e também o erro tenderá a zero. Desta forma obtém-se área desejada:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Guidorizzi (2001), seja f contínua em $[a,b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico $y = f(x)$, Figura 1

Figura 1: Cálculo da área da região abaixo da curva.



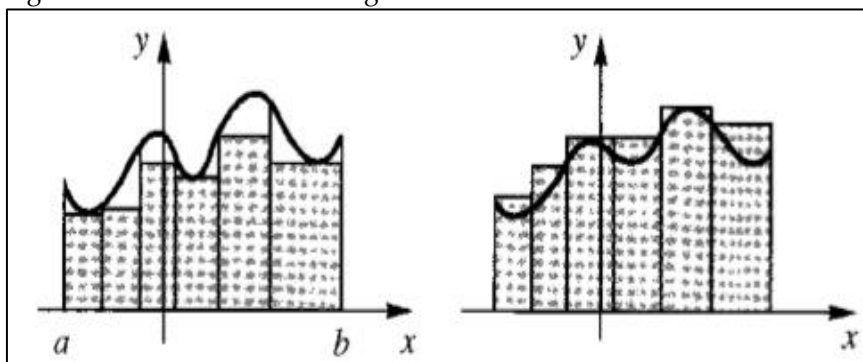
Fonte: Guidorizzi (2001).

Seja, então, $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e sejam \bar{c}_i e \underline{c}_i em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(\bar{c}_i)$ é o valor mínimo e $f(\underline{c}_i)$ o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, uma boa definição de área A deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$ seja uma aproximação por falta da área A e que $\sum_{i=1}^n f(\underline{c}_i) \Delta x_i$ seja uma aproximação por excesso, isto é,

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \leq \text{área } A \leq \sum_{i=1}^n f(\underline{c}_i) \Delta x_i$$

de acordo com a Figura 2:

Figura 2: Cálculo da área da região abaixo da curva.



Fonte: Guidorizzi (2001).

Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x) dx$, quando máximo $\Delta x_i \rightarrow 0$, a área será definida por:

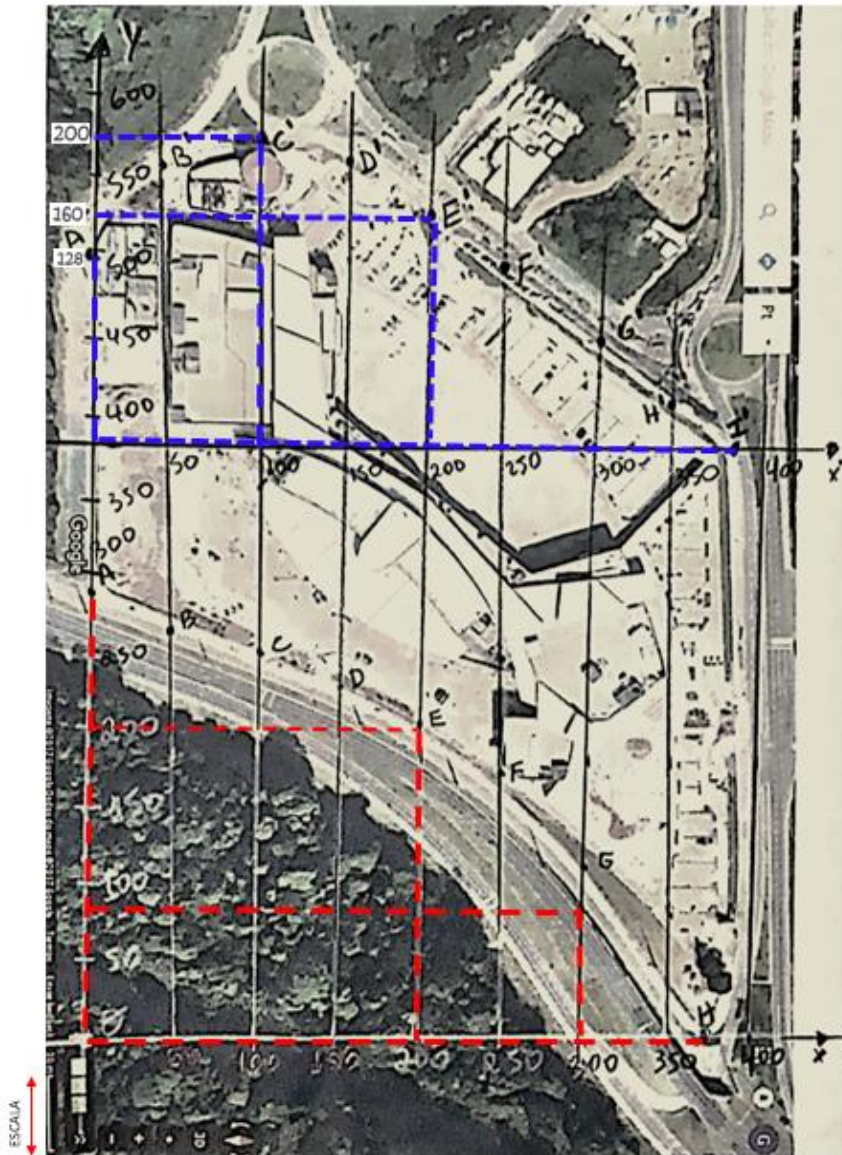
$$\text{Área} = A = \int_a^b f(x) dx \quad (4.1)$$

O georreferenciamento foi realizado por meio da Interface de Programação de Aplicativos (API) do Google, acessada com um script programado de georreferenciamento compara os endereços informados com a base do Google Maps, para a captura das coordenadas geográficas. A utilização gratuita permite a requisição diária de até 2.500 pares de coordenadas. *Google Maps geocoding* (2016).

O processo de cálculo da área consistiu na marcação de um eixo de coordenadas cartesianas no ponto "O" como marcado na Figura 19. Com a escala fornecida no Google Maps, fazemos a medição com o escalímetro, e percebemos que mede 1,4 cm equivalente a 50 metros na distância real. A seguir marcamos com escalímetro no eixo x e no eixo y distâncias proporcionais a 1,40, correspondendo aos pontos marcados na Figura 19 de "0" a 450 metros no eixo x e de "0" a 600 metros no eixo y.

Abaixo segue o mapa visto de cima do shopping Grão Pará Figura 3:

Figura 3: Pontos A,B,C,D,E,F,G,H pontos da 1ª curva. Pontos A',B',C',D',E',F',G',H' e I'. Pontos da 2ª curva. X, 1º eixo horizontal e X' 2º eixo horizontal. A nova origem O', localiza-se no ponto (0 , 372).



Fonte: Dados do Google Maps acesso em 20.05.2017.

Na 1ª curva, equivalente ao 4º quadrante, marcamos 8 pontos correspondendo ao “x” de 50 em 50 metros, porém acompanhando a curva não corresponde exatamente a um ponto exato, onde tem-se que fazer uma proporção para acharmos a ordenada corretamente. Elegemos (04) quatro principais pontos diametralmente opostos, a fim de calcularmos uma polinomial que melhor represente estes dados.

Na 2ª curva, equivalente ao 1º quadrante, marcamos 8 pontos correspondendo ao “x” de 50 em 50 metros, porém acompanhando a curva não corresponde exatamente a um ponto exato, onde tem-se que fazer uma proporção para acharmos a ordenada corretamente. Elegemos também (04) quatro principais pontos diametralmente opostos, a fim de calcularmos uma polinomial que melhor represente estes dados.

Os pontos escolhidos desta curva são: A(0,270), B (200, 190), C(300, 80) e D(370,0).

Tabela 1: Lançamento dos dados pelo método de ajuste de curvas, utilizando mínimo quadrados.

Tomando por base a equação (2.2), escrevemos a tabela abaixo:

| i | x_i | y_i | x_i^2 | x_i^3 | x_i^4 | $x_i y_i$ | $x_i^2 y_i$ |
|----------|-------|-------|----------------|---------------------|-----------------------|-----------|------------------|
| 1 | 0 | 270 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 200 | 190 | $4 \cdot 10^4$ | $8 \cdot 10^6$ | $16 \cdot 10^8$ | 38000 | $76 \cdot 10^5$ |
| 3 | 300 | 80 | $9 \cdot 10^4$ | $27 \cdot 10^6$ | $81 \cdot 10^8$ | 24000 | $72 \cdot 10^5$ |
| 4 | 370 | 0 | 136.900 | $50,653 \cdot 10^6$ | $187,4161 \cdot 10^8$ | 0 | 0 |
| Σ | 870 | 540 | 266.900 | $85,653 \cdot 10^6$ | $284,4161 \cdot 10^8$ | 62.000 | $148 \cdot 10^5$ |

Inserindo os dados da tabela acima na equação (2.2), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 870 & 266.900 \\ 870 & 266.900 & 85,653.10^6 \\ 266.900 & 85,653.10^6 & 284,4161.10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 540 \\ 62.000 \\ 148.10^5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

$\alpha_0 = 270,6906$, $\alpha_1 = -0,0554$ e $\alpha_2 = -1,8529.10^{-3}$. Substituindo as constantes no modelo da equação (2.1), encontramos a seguinte curva ajustada pelo método mínimo quadrados:

$$y = -1,8529.10^{-3}.x^2 - 0,0554.x + 270,6506$$

Calculando a área pela equação (3.1), obtemos:

$$A = \int_0^{370} (-1,8529.10^{-3}.x^2 - 0,0554.x + 270,6506)dx = 65.078,41m^2 \quad (4.1)$$

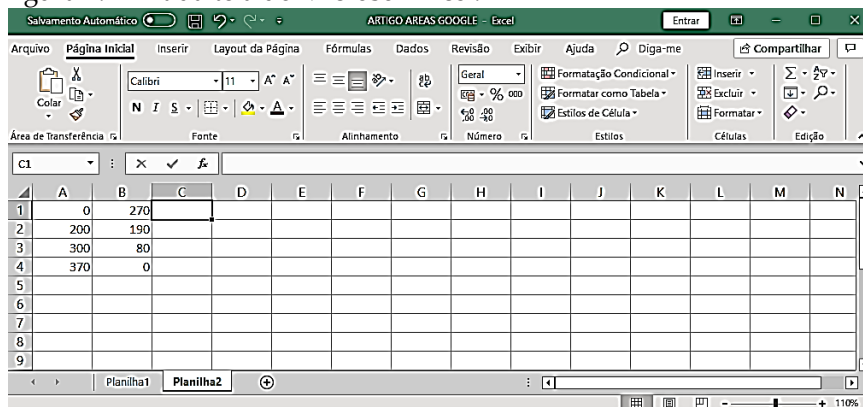
Utilizando o Microsoft Excel 2013, vamos obter a mesma curva, que foi calculada pelo método de Mínimos Quadrados, conforme resultado expresso pela equação (4.1).

Segue abaixo o processo realizado no Excel em etapas:

1ª Etapa: Inserção dos pontos na planilha do Excel:

A Figura 20, representa o print da inserção dos dados dos pontos plotados na Figura 4 e transferidos para a planilha do Microsoft Excel.

Figura 4: Print da tela do Microsoft Excel.

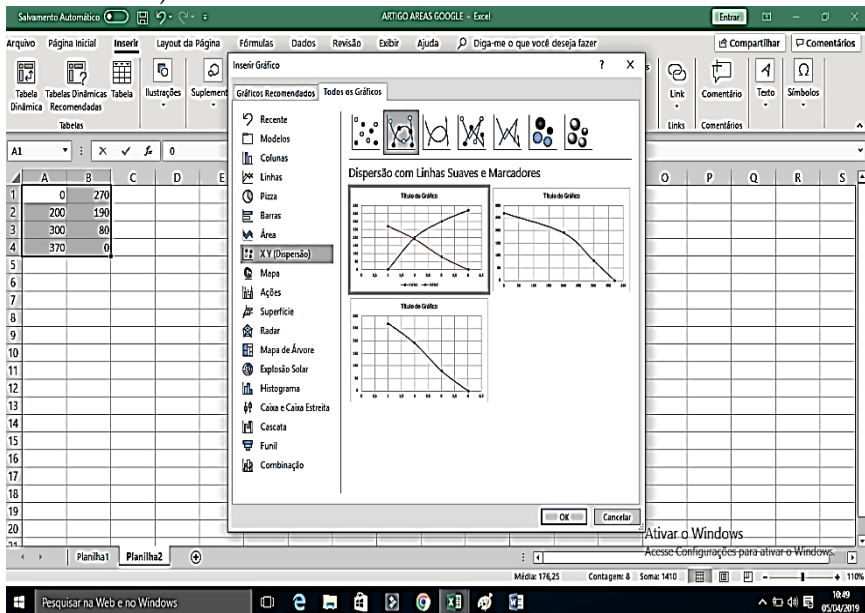


Fonte: Os autores.

2ª Etapa : Inserção do Modelo de gráfico a ser exposto:

Nesta etapa, Figura 21, é feita a escolha da curva que melhor se adequa aos dados previamente selecionados na Figura 19. Neste caso foi escolhido o modelo chamado “Dispersão”, onde é indicado para o plot de 3 a 5 pontos escolhidos no mapa. Observe Figura 5.

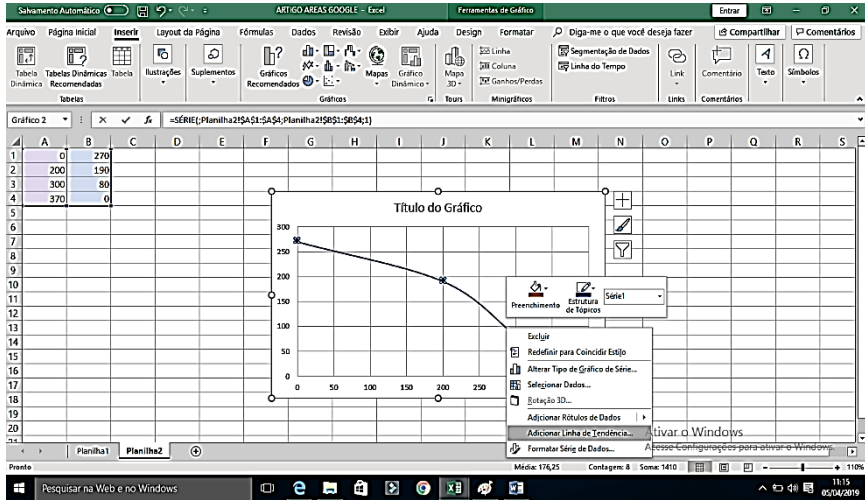
Figura 5: Inserção do modelo de gráfico a ser exposto (Dispersão com linhas Suaves).



Fonte: Os autores.

3ª Etapa: Seleção da curva, Figura 6:

Figura 6: Seleção da curva e a escolha de adicionar linha de tendência aos dados obtidos.



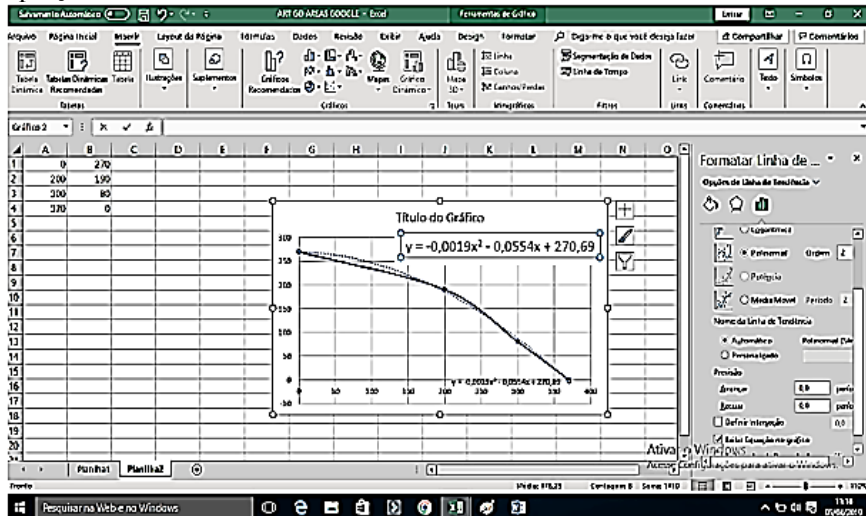
Fonte: Os autores

Nesta etapa, Figura 6, escolhemos a opção por mostrar a linha de tendência a fim de melhor adequar os dados

4ª Etapa: Escolha do Ajuste Polinomial

Nesta etapa, Figura 7, é escolhida a curva de ajuste que mais se adequa a função escolhida. Podemos fazer testes, como mudar o grau da curva, geralmente para 2 ou 3. Especificamente neste caso o grau 2 ficou mais bem ajustada.

Figura 7: Escolha do Ajuste Polinomial de grau 2, com a exibição da equação.



Fonte: Os autores.

Após a exibição das etapas percebemos que a utilização do Microsoft Excel facilita muito a obtenção da função obtida pelo ajuste polinomial, sendo este método considerado eficaz para a obtenção de áreas que são limitadas por curvas, que podem ser ajustadas por uma polinomial.

Calculando a área pela equação fornecida pelo Microsoft Excel, obtemos:

$$A = \int_0^{370} (-0,0019 \cdot x^2 - 0,0554 \cdot x + 270,69) dx = 64.282,93 \text{ m}^2$$

A função polinomial exibida pelo Microsoft Excel apresenta um erro aproximado de 1,2%, sendo, portanto, considerado totalmente confiável.

Após isso calculamos a área do retângulo formado pelos eixos x , x' e y , cujas coordenadas no eixo " x " é 370 e no eixo " y " é 380, formando um grande retângulo com essas dimensões. Portanto:

$$A = 370 \times 380 = 140.600 \text{ m}^2$$

A área da 1ª região abaixo do eixo x' será dado por:

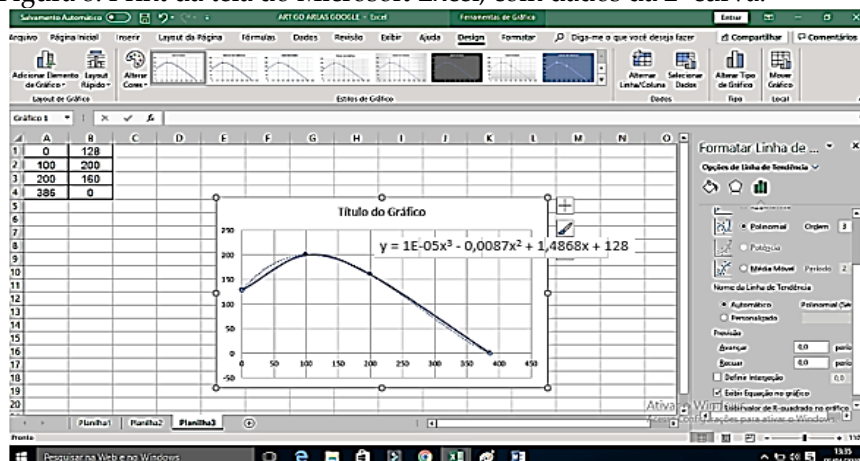
$$A_1 = 140.600 - 64.282,93 = 76.317,07 \text{ m}^2$$

Partimos para o cálculo da 2ª polinomial, plotada a partir do eixo x' e a continuação do eixo y . Na 2ª curva marcamos 9 pontos correspondendo ao x' de 50 em 50 metros, porém acompanhando a curva não corresponde a exatamente a um ponto exato, onde tem-se que fazer uma proporção para acharmos a ordenada corretamente.

Esta ordenada é subtraída da nova origem, localizada no ponto O' (0,372). Elegemos (04) quatro principais pontos diametralmente opostos, a fim de calcularmos uma polinomial que melhor represente estes dados. Os pontos escolhidos são:

$A'(0, 128)$, $C'(100,200)$, $E'(200, 160)$ e $I'(386,0)$. Tomando por base a equação (2.2), escrevemos a tabela no Microsoft Excel, e utilizamos as mesmas etapas anteriores, porém o ajuste da curva ficou melhor estruturado para o grau (03), três, pelo visual exibido no programa. A curva de grau 3, ficou mais próxima da realidade do que a de grau 2. A escolha é feita por tentativa. Aquela em que a linha de tendência esteja mais próxima da curva plotada inicialmente é a que vamos utilizar. Conforme Figura 8, abaixo:

Figura 8: Print da tela do Microsoft Excel, com dados da 2ª curva.



Fonte: Os autores.

A função exibida pelo Excel é a seguinte:

$$y = -0,00001x^3 - 0,0087x^2 + 1,4868x + 128$$

Calculando a área pela equação fornecida pelo Microsoft Excel, obtemos:

$$A = \int_0^{386} (0,00001x^3 - 0,0087x^2 + 1,4868x + 128) dx = 48.885,02 \text{ m}^2$$

Portanto para demonstrar a área total do shopping basta somar a área resultante do 1º cálculo com a obtida acima:

$$A_{\text{SHOPPING}} = A_1 + A_2 = 76.317 \text{ m}^2 + 48.885,02 \text{ m}^2 = 125.202,02 \text{ m}^2$$

Observamos que a área calculada pelo Microsoft Excel e o método de mínimos quadrados, praticamente não houve diferenças, apenas no arredondamento efetuado pelo Excel, apresentando um resultado satisfatório bem próximo do valor real de 123.000m², representando um erro menor que 1%.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O cálculo de áreas foi uma das situações que possibilitaram o surgimento do cálculo integral, mas lembrando que a integral possui várias aplicações além dessa, como o cálculo de volumes e suas aplicações na física e na biologia. Vale ressaltar também que isso é apenas um resumo do que seria uma integral, pois sua definição é puramente matemática e requer algum conhecimento em cálculo de limites, para um estudo mais apurado.

A sequência que desenvolvemos neste artigo teve como propósito calcularmos, mediante a aplicação da integral no cálculo da área de uma superfície complexa, como a do Shopping Grão Pará. Foi possível notar uma de suas características, os limites curvilíneos, os quais apresentam maior dificuldade para encontrar sua área mediante relação com figuras da forma poligonal. Desta feita, as dificuldades em calcular áreas deste tipo de regiões são problemáticas e desafiadoras.

Finalizamos ratificando a relativa facilidade dos cálculos aqui utilizados, em virtude, do uso do Excel 2013, o qual se mostrou como uma ferramenta apropriada para o processo realizado, em associação com o método dos mínimos quadrados.

REFERÊNCIAS

BATISTI, J.: **Excel 2013. Básico e Intermediário**. Através de Exemplos Práticos e Úteis. Passo a Passo, Ed. Instituto Alpha, 2018.

BARROSO, L.C. **Cálculo Numérico com Aplicações**, 2ª Edição, Ed. Harbra, 1987.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, Vol. I, 5ª Edição, Ed. LTC, 2001.

GOOGLE MAPS. Disponível em <www.google.com.br> Acesso em 27 de abr. de 2017.

GOOGLE. *Google Maps geocoding API* [Internet]. 2016 [citado 2019 abr 11]. Disponível em: [https:// developers.google.com/maps/documentation/geocoding/](https://developers.google.com/maps/documentation/geocoding/)

O LIBERAL, Jornal. Belém, 22 de fev. 2015, **Mercado**, p.1

RUGGIERO, M.; LOPES, V. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo-SP: Makron Books, 1996.

CAPÍTULO 5

Área de Regiões Através do Google Maps Utilizando Polinômio de Newton e Cálculo integral

Gilberto Emanuel Reis Vogado
Pedro Roberto Sousa da Silva
Gustavo Nogueira Dias;
Vanessa Mayara Souza Pamplona
Nazaré Doriene de Melo Reis
Alessandra Epifanio Rodrigues
Waljucy Furtado Cardoso

INTRODUÇÃO

O artigo a seguir refere-se a respeito do cálculo de áreas que possuam regiões de difícil medição pois tem trajetórias curvilíneas, onde a melhor aplicação seria utilizando integral para o cálculo de sua área.

A partir deste propósito apresento a área do Shopping Grão Pará, pois vista de cima conforme a Figura 3. Apresenta estas características, onde seus limites são curvilíneos, e sua área já foi calculada e divulgada em 122.000 m², o que foi usado para fazer uma comparação com a metodologia proposta.

As dificuldades em calcular áreas deste tipo de regiões são muito grandes. Pois elas não representam nenhuma figura plana e sim um aspecto curvilíneo que o estudo do cálculo de integrais propões uma resposta.

MATERIAL E MÉTODOS

Polinômio de Newton

O polinômio de Newton, segundo Barroso, et al (1987) usa o processo de diferença divididas, Tabela 1, para formar o polinômio interpolador.

Diferenças Divididas, (Barroso et al, 2^a ed.p.175, 1987):
 Considere a tabela a seguir:

Tabela 1: tabela de diferenças divididas.

| i | x _i | y _i | Δy_i | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ |
|---|----------------|----------------|--------------|----------------|----------------|
| 0 | x ₀ | y ₀ | | | |
| 1 | x ₁ | y ₁ | | | |
| 2 | x ₂ | y ₂ | | | |
| 3 | x ₃ | y ₃ | | | |

Fonte: dados da pesquisa.

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} \quad \Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} \quad \Delta^3 y_1 = \frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad \Delta^2 y_2 = \frac{\Delta y_3 - \Delta y_2}{x_4 - x_2} \quad \Delta^3 y_2 = \frac{\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2}{x_5 - x_2}$$

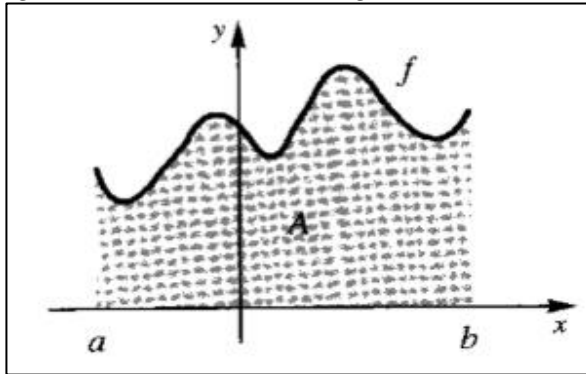
Fórmula de Newton para Interpolação com Diferenças Divididas:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot \Delta y_0 + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \Delta^2 y_0 + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \Delta^3 y_0 + \dots$$

Integral – Cálculo de Áreas

Guidorizzi (2001), seja f contínua em $[a,b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Estamos interessados em definir a área do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico, Figura 1,

Figura 1: Cálculo da área da região abaixo da curva.



Fonte: Guidorizzi (2001).

Seja, então, $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$ e sejam \bar{c}_i e \underline{c}_i em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(\bar{c}_i)$ é o valor mínimo e $f(\underline{c}_i)$ o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, uma boa definição de área A deverá

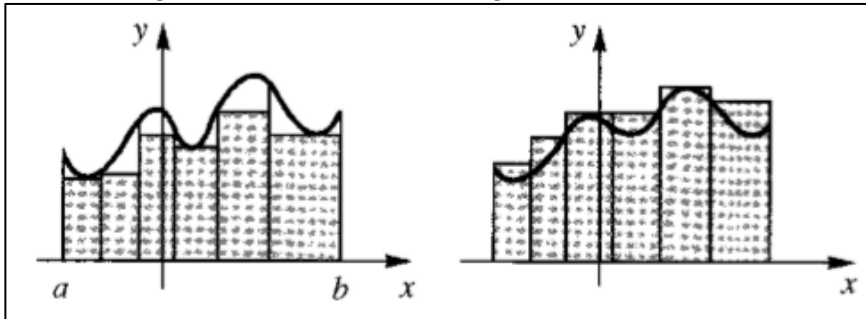
implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$ seja uma aproximação

por falta da área A e que $\sum_{i=1}^n f(\underline{c}_i) \Delta x_i$ seja uma aproximação por

excesso, isto é, Figura 2:

$$\sum_{i=1}^n f(\underline{c}_i) \Delta x_i \leq \text{área } A \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$$

Figura 2. Cálculo da área da região abaixo da curva.



Fonte: Guidorizzi (2001).

Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x)dx$, quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, a área será definida por:

$$\text{Área} = A = \int_a^b f(x) dx$$

METODOLOGIA

O processo de cálculo da área consistiu na marcação de um eixo de coordenadas cartesianas no ponto "O" como marcado na Figura 3. Com a escala fornecida no Google Maps, fazemos a medição com a régua. Com relação a medida depende da proporção que o mapa foi impresso. Neste caso, percebemos que a escala mede 1,4 cm e é equivalente a 50 metros na distância real. A seguir marcamos com escalímetro no eixo x e no eixo y distâncias proporcionais a 1,4 e assim de 50 em 50 metros construímos um plano cartesiano com vários pontos plotados até o limite de "0" a 450 metros no eixo x e de "0" a 600 metros no eixo y.

Na Figura 3 a posição da origem pode ser marcada de acordo com a escolha do pesquisador. Neste caso a origem dividiu o mapa em duas partes. Nada impede que a origem seja colocada em outro ponto englobando as duas curvas.

Na 2ª curva, Figura 3, marcamos 8 pontos correspondendo ao “x” de 50 em 50 metros, porém acompanhando a curva não corresponde exatamente a um ponto exato, onde tem-se que fazer uma proporção para acharmos a ordenada corretamente. Elegemos três principais pontos diametralmente opostos, a fim de calcularmos uma polinomial que melhor represente estes dados. A escala deste mapa mede 1,2m e é equivalente a 50 metros na distância real. A seguir marcamos com escalímetro no eixo x e no eixo y distâncias proporcionais a 1,2 e assim de 50 em 50 metros construímos um plano cartesiano com vários pontos plotados até o limite de “0” a 450 metros no eixo x e de “0” a 600 metros no eixo y.

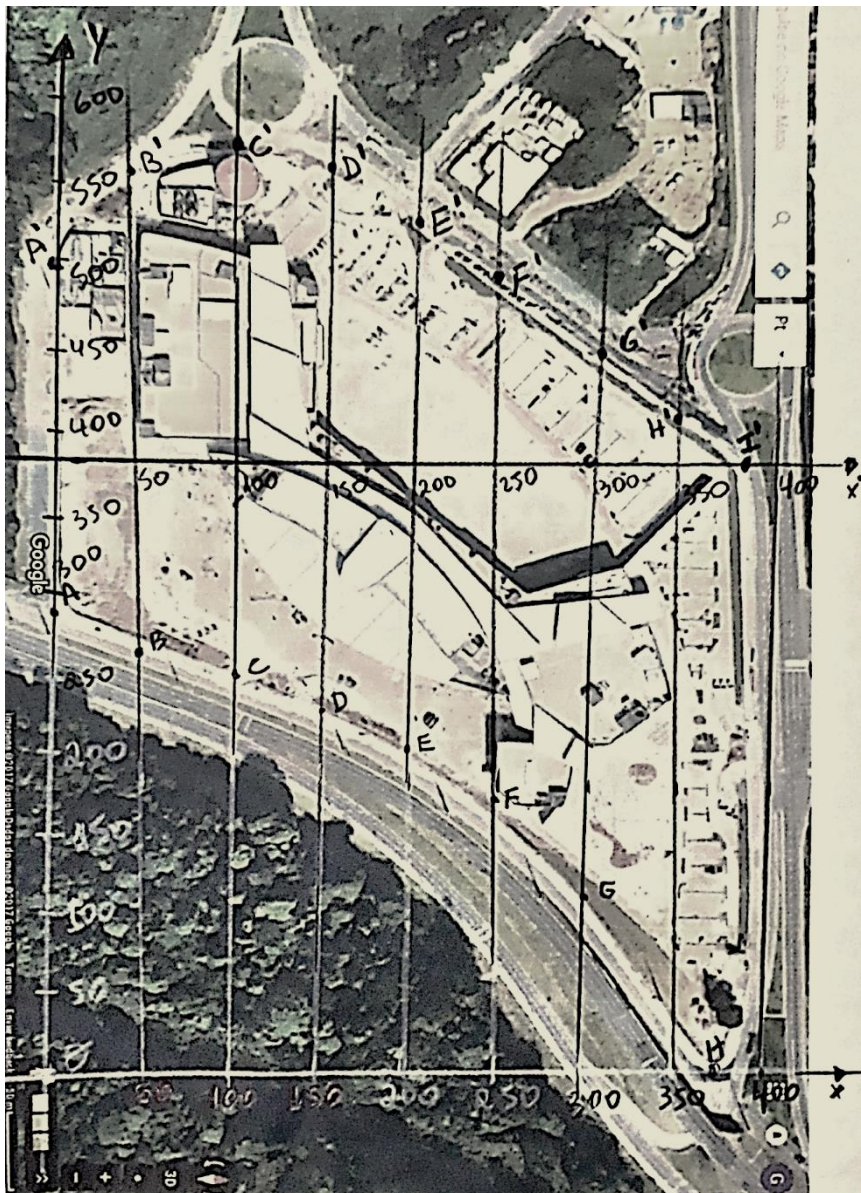
Para termos medidas aproximadamente corretas, na 2ª parte do gráfico da Figura 4 temos que virar a folha e calcular a origem como sendo o ponto (0,372) que a partir de agora será (0,0) origem e a partir daí iniciamos novamente todas as marcações. Abaixo segue o mapa visto de cima do shopping Grão Pará (Figura 3 e 4).

Figura 3. Origem do sistema de cartesianas ortogonais logo no início da figura. Ao lado esquerdo abaixo segue a escala do mapa.



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 4: Pontos A,B,C,D,E,F,G,H pontos da 1ª curva. Pontos A', B', C', D', E', F', G', H' e I' pontos da 2ª curva. X, 1º eixo horizontal e X' 2º eixo horizontal. A nova origem O', localiza-se no ponto (0,372).



Fonte: dados da pesquisa.

Sejam os $n + 1$ pontos distintos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ e $P_n(x)$ o polinômio interpolador de grau n que conterá estes pontos.

Utilizando o conceito de diferença divididas tem-se:

$$P[x, x_0] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0} \quad (I)$$

Portanto:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0) \cdot P[x, x_0] \quad (II)$$

$$\text{Mas, } P[x, x_0, x_1] = \frac{P[x, x_0] - P[x_0, x_1]}{x - x_1} \quad (III)$$

Fazendo I, II em III temos:

A relação de interpolação de Newton utilizando diferenças divididas:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot \Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \Delta^2 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \Delta^3 y_0 \quad (IV)$$

Sendo que considerando a tabela a seguir, como sendo a de diferenças divididas temos:

Considere a Tabela 2 a seguir:

Tabela 2: Diferença divididas

| i | x_i | y_i | Δy_i | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ |
|---|-------|-------|--------------|----------------|----------------|
| 0 | x_0 | y_0 | | | |
| 1 | x_1 | y_1 | | | |
| 2 | x_2 | y_2 | | | |
| 3 | x_3 | y_3 | | | |
| 4 | x_4 | y_4 | | | |

Fonte: dados da pesquisa.

As relações abaixo usamos para completar a tabela acima e preencher o polinômio interpolador de Newton (IV):

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} \quad \Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} \quad \Delta^3 y_1 = \frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$$

Os pontos da Figura 4 são A (0,270) B (200, 190) e C (370, 0). A seguir fazemos a Tabela 3, de diferenças divididas, conforme o quadro abaixo:

Tabela 3: Diferença divididas dos pontos obtidos

| x | y | Δy | Δ²y |
|----------|----------|-----------|-----------------------|
| 0 | 270 | -0,4 | -0,00194 |
| 200 | 190 | -1,1176 | |
| 370 | 0 | | |

Fonte: dados da pesquisa.

Utilizando o polinômio interpolador de Newton:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot \Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \Delta^2 y_0 + (x - x_0) \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdot \Delta^3 y_0$$

$$P(x) = 270 + x \cdot (-0,4) + x \cdot (x - 200) \cdot (-0,00194)$$

$$P_1(x) = 270 - 0,4x - 0,00194x^2 + 0,388x$$

$$P_1(x) = 270 - 0,012x - 0,00194x^2$$

A seguir calculamos a área que está abaixo desta primeira curva usando a polinomial $P_1(x)$.

$$A = \int_0^{370} (270 - 0,012x - 0,00194x^2) dx = 66323 \text{m}^2$$

Após isso calculamos a área do retângulo formado pelos eixos x , x' e y , cujas coordenadas no eixo " x " é 370 e no eixo " y " é 380, formando um grande retângulo com essas dimensões. Portanto:

$$A = 370 \times 380 = 142.450 \text{ m}^2$$

A área da 1ª região abaixo do eixo x' será dado por:

$$A_1 = 140600 - 66323 = 74.277 \text{ m}^2.$$

Partimos para o cálculo da 2ª polinomial, plotada a partir do eixo x' e a continuação do eixo y . Na 2ª curva marcamos 9 pontos correspondendo ao x' de 50 em 50 metros, porém acompanhando a curva não corresponde exatamente a um ponto exato, onde tem-se que fazer uma proporção para acharmos a ordenada corretamente.

Está ordenada é subtraída da nova origem, localizada no ponto O' (0,372). Elegemos três principais pontos diametralmente opostos, a fim de calcularmos uma polinomial que melhor represente estes dados. Os pontos escolhidos são $A'(0, 128)$, $B'(200,160)$ e $C'(386, 0)$., conforme Tabela 4:

Tabela 4: diferença divididas

| x | y | Δy | $\Delta^2 y$ |
|----------|----------|------------------------------|--------------------------------|
| 0 | 128 | 0,16 | -0,002643 |
| 200 | 160 | -0,860215 | |
| 386 | 0 | | |

Fonte: dados da pesquisa.

Utilizando o polinômio interpolador de Newton:

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot \Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \Delta^2 y_0 + (x - x_0) \cdot (x - x_1)(x - x_2) \cdot \Delta^3 y_0$$

$$P_2(x) = 128 + x \cdot 0,16 + x \cdot (x - 200) \cdot (-0,002643)$$

$$P_2(x) = 128 + 0,16x - 0,002643x^2 + 0,5286x$$

$$P_2(x) = 128 + 0,6886x - 0,002643x^2$$

$$P_2(x) = 50038$$

$$A_2 = \int_0^{386} (128 - 0,6886x - 0,002643x^2) dx = 50.038 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{SHOPPING}} = A_1 + A_2 = 74.277 \text{ m}^2 + 50038 \text{ m}^2 = 124.315 \text{ m}^2$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observamos que a área calculada por integrais e a polinomial de grau 2 de Newton apresentou um resultado satisfatório bem próximo do valor real de 122.000m^2 , representando um erro menor que 2%.

As polinomiais do 3º e 4º grau não tiveram o sucesso apresentado pela polinomial do 2º grau, devido ao aspecto principal ser mais semelhante a uma polinomial do 2º grau.

Foi feito curvas de grau até de 6ª ordem, porém não apresentaram resultado esperado com um erro extremamente grande. Pelo processo e o esboço das duas curvas podemos inferir que o grau é diretamente dependente ao número de pontos de inflexões que a curva apresenta. No caso destas duas curvas, cada uma apresentava a tendência de apenas um ponto de inflexão, portanto a curva escolhida teria necessariamente que ser uma polinomial do 2º grau.

REFERÊNCIAS

BARROSO, L.C. **Cálculo Numérico com Aplicações**, 2ª Edição, Ed. Harbra, 1987.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, Vol. I, 5ª Edição, Ed. LTC, 2001.

GOOGLE MAPS. Disponível em <www.google.com.br> Acesso em 27 de abr. de 2017.

CAPÍTULO 6

Áreas de Intersecções de Curvas com o MAXIMA

Jéssica Adriane Oliveira de Castro

Luiz Otávio Alves Ribeiro

Mauro do Socorro Botelho Feio

Wellington de Jesus Sousa

Gustavo Nogueira Dias

Vanessa Mayara Souza Pamplona

Victor Hugo Chacon Britto

INTRODUÇÃO

O MAXIMA é um sistema de computação algébrica que tem sua origem no Macsyma que foi desenvolvido no MIT (Massachusetts Institute of Technology) nos anos de 1968 a 1982 fazendo parte do Projeto MAC (Machine Aided Cognition), é definido como um software livre de licença GNU General Public License (GPL), disponível para diversos sistemas operacionais como Windows e Linux, por ser um software tipo CAS viabiliza o tratamento simbólico, possibilitando encontrar resultados de conteúdos trabalhados nas disciplinas de Cálculo como áreas de intersecções de curvas. Além disso, também faz abordagens numéricas e gráficas.

O que nos levou a escolha do tema Áreas de Intersecção de Curvas com o MAXIMA, foi perceber a facilidade de fazer cálculos algébricos, principalmente no que tange a manipulação e exploração dos conceitos matemáticos. Este trabalho tem como objetivo a facilitação do cálculo de áreas entre duas curvas com utilização do software MAXIMA,

sobretudo porque na hora de calcular uma área o aplicativo MAXIMA nos dará uma aproximação maior da área real.

METODOLOGIA

O APLICATIVO MAXIMA

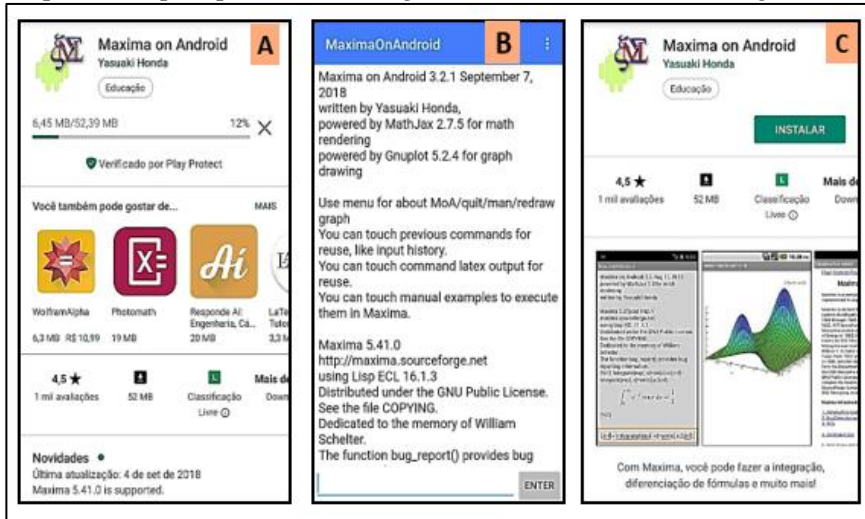
O MAXIMA é um software livre, que tem como principal objetivo realizar cálculos matemáticos, tanto de forma algébrica, quanto de forma numérica semelhante ao MatLab e ao Mathematica. Trata-se de um sistema de álgebra computacional capaz de calcular derivadas, integrais, EDO's, sistemas, matrizes e fazer gráficos em 2d e 3d.

O MAXIMA é um dos sistemas de computação simbólica mais antigos. Foi baseado em uma versão do Macsyma (*MAC's SYmbolic MAnipulator*), que foi desenvolvido por Joel Moses, William Martin e outros do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), nos anos de 1968 a 1982 com fundos promovidos pelo departamento de defesa americano e alguns departamentos de energia.

DOWNLOAD

Para baixar o aplicativo basta entrar no aplicativo Play Store, utilizado para fazer o download dos aplicativos que utilizam o sistema androide e buscar por MAXIMA ou wxMAXIMA em seguida baixar, aparecerá a sequência abaixo relacionada na Figura 1:

Figura 1: Imagens que seguem após a instalação, onde basta utilizar o aplicativo que aparece com a seguinte interface na última imagem: C.



Fonte: Dados obtidos no play store, download do programa Máxima.

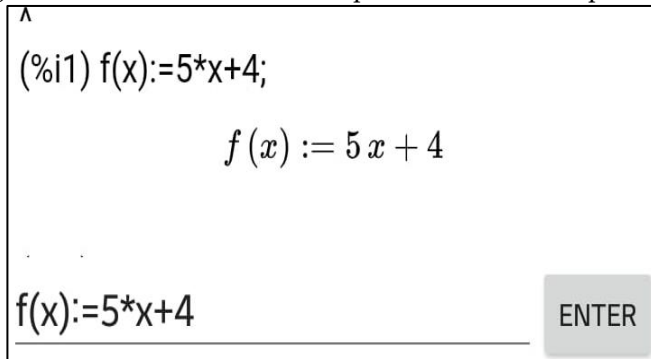
COMANDOS

Riotorto (2006), sugere inúmeras estratégias de comando para obter a curva principal, e enumera uma sequência didática a ser seguida e obedecida:

Definir uma função

Basta inserir o comando de acordo com a Figura 2,

Figura 2: Comandos necessários para trabalho com aplicativo.



```
(%i1) f(x):=5*x+4;

f(x) := 5x + 4

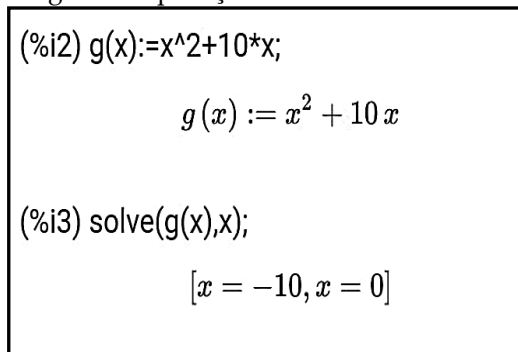
f(x):=5*x+4 ENTER
```

Fonte: dados da pesquisa

Solve

O comando *solve* serve para resolver uma expressão ou função, Figura 3,

Figura 3: Aplicação do comando “Solve”.



```
(%i2) g(x):=x^2+10*x;

g(x) := x^2 + 10x

(%i3) solve(g(x),x);

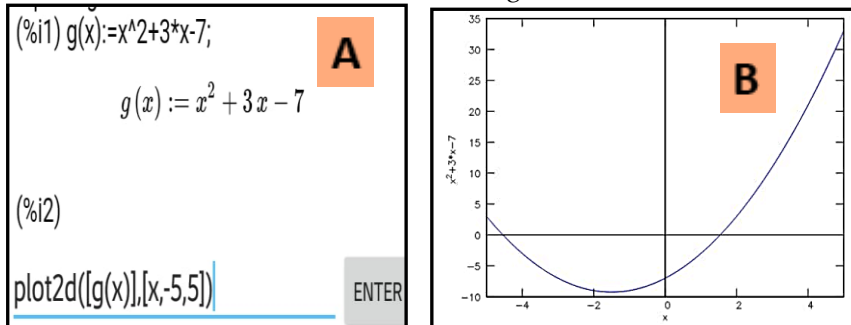
[x = -10, x = 0]
```

Fonte: dados da pesquisa

PLOT2D

Este comando serve para plotar um gráfico de forma 2d, abaixo segue Figura 4:

Figura 4: comando para o plot da função. Imagem A, inserção da função e B como fica a imagem.

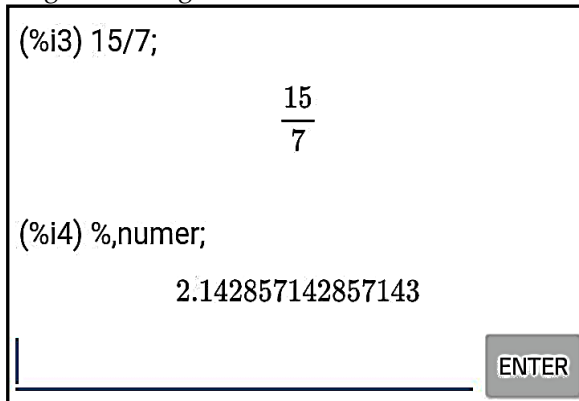


Fonte: dados da pesquisa

VALOR DECIMAL

Basta utilizar o comando, de acordo com a Figura 5:

Figura 5: Imagem associativa ao valor decimal.



Fonte: dados da pesquisa

INTEGRAL

Basta utilizar o comando, de acordo com a Figura 6:

Figura 6: Imagem associando o comando necessário à exibição da integral.

```
(%i5) f(x):=x^3+5*x^2-8;
      f(x) := x3 + 5x2 - 8
(%i6) integrate(f(x),x,1,4);
      579
      4
```

Fonte: dados da pesquisa

ALGSYS

Serve para resolver sistemas, como por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x + 4y + 2z = 7 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

Abaixo segue a Figura 7, imagem associativa ao comando da execução e operação do sistema:

Figura 7: Imagem associativa ao comando resolução de sistemas.

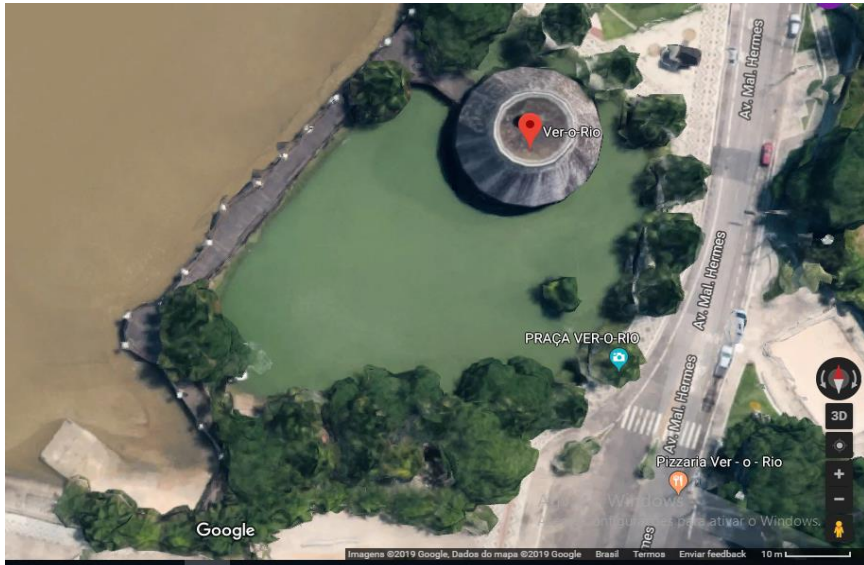
```
(%i1) algsys([2*x+3*y+z=4,x+4*y+2*z=7,3*x+y+z=8],[x,y,z]);
      [[ x = 5/4, y = -11/8, z = 45/8 ]]
```

Fonte: dados da pesquisa

Abaixo segue o local onde a pesquisa foi desenvolvida. O ver o Rio, Figura 8, localizado no bairro do Umarizal, na cidade de Belém

e um ponto turístico muito atrativo aos visitantes que aqui vem regularmente.

Figura 8: Imagem associando o local da pesquisa. “Ver o Rio” bairro Umarizal em Belém do Pará, Brasil.



Fonte: Google Maps

Nosso objetivo é determinar a área do lago do ver-o-rio. O processo é feito com

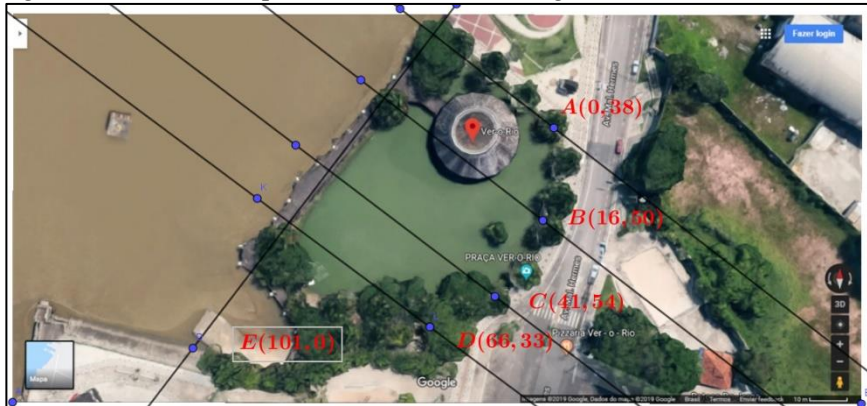
a impressão do mapa exibido no Google Maps, no modo satélite, utilizando a melhor escala de visualização. Neste caso optou-se por uma escala de 10 metros, o que após a impressão foi feita a equivalência de 1,2 cm.

Os seguintes passos foram realizados, seguindo o roteiro de Vogado et al. (2018), onde utilizou-se do mesmo processo para calcular a área de um shopping na cidade de Belém, Pará:

1º passo: determinar medidas no desenho e transformar para medidas reais como, por exemplo, utilizando a escala 1,2cm para 10m teremos os seguintes pontos, realizados na Figura 9:

A(0,38), B(16,50) , C(41,54), D (66,33) e E (101,0):

Figura 9: exibição dos pontos demarcados na figura.



Fonte: dados da pesquisa

2º passo: Vamos assumir que a equação dada pelos pontos acima forma uma expressão da forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, formando assim o sistema.

$$\begin{cases} a.(16)^3 + b.(16)^2 + c.16 + 38 = 50 \\ a.(41)^3 + b.(41)^2 + c.41 + 38 = 54 \\ a.(66)^3 + b.(66)^2 + c.66 + 38 = 33 \end{cases}$$

Utilizando o MAXIMA, temos na Figura 10, a inserção dos dados:

Figura 10: inserção dos dados para obtenção dos coeficientes da curva.

```
(%i1) algsys([a*(16)^3+b*(16)^2+c*(16)+38=50,a*(41)^3+b*(41)^2+c*(41)+38=54,a*(66)^3+b*(66)^2+c*(66)+38=33],[a,b,c]);

      [[ a = - 23
         270600 , b = - 21
         2200 , c = 125083
         135300 ] ]

(%i2) poli:%,numer;

      [[ a = -0.849963045084996 × 10-4 , b = -0.009545454545454546,
         c = 0.9244863266814486 ] ]
```

Fonte: dados da pesquisa

3º passo: Encontrado os valores de a, b e c no sistema, temos a seguinte função $f(x) = -8,499 \cdot 10^{-5} x^3 - 0,0095 x^2 + 0,924 x + 38$, agora basta calcular a integral em [0,101] de acordo com a Figura 11:

Figura 11: Exibição dos comandos e dos resultados encontrados para a integral

```
(%i1) funcao: f(x):=[-8.499*10^(-5)]*(x^3)-0.0095*(x^2)+0.924*x+38;

      f(x) := [ - 8.499
                105 ] x3 - 0.0095 x2 + 0.924 x + 38

(%i2)

(%i1) integrate([-8.499*10^(-5)]*(x^3)-0.0095*(x^2)+0.924*x+38,x,0,101);

      [ 621487417
        201964 ]

(%i2) %,numer;

      [3077.218796419164]

(%i3)
```

Fonte: dados da pesquisa

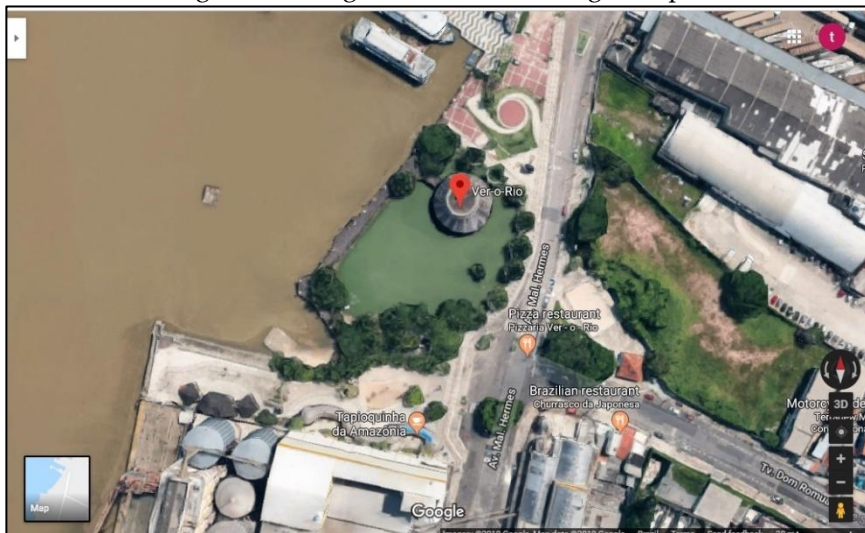
Podemos perceber que a área encontrada se aproxima da área real cuja frente total vale em média 3.077 m².

Conforme foi mostrado em Coelho (2017) podemos utilizar o MAXIMA como uma grande ferramenta para dinamizar nossos cálculos e aumentar a quantidade de interações para melhorar as aproximações.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Usaremos o complexo do Ver-o-Rio como exemplo para o cálculo de área, Figura 12:

Figura 12: Imagem retirada do Google Maps.



Fonte: dados da pesquisa

Ao utilizarmos o software MAXIMA para Android no cálculo da área de uma curva real da cidade de Belém do Pará, mais precisamente no Complexo Turístico Ver-o-Rio, especificamente a área do lago contido naquela paisagem, a partir de pontos plotados em imagem de satélites, tivemos as seguintes percepções:

1. Esse software é bastante preciso no cálculo da área, se é somente se, o conjunto de dados coletados estiver com uma precisão mínima em todas as plotagens informadas;

2. Percebemos que quanto mais pontos puderem ser informados na sondagem, aumenta significativamente a precisão dos cálculos;

3. Se por alguma razão a medição for imprecisa na área estudada, influenciará negativamente na quantificação da área requerida;

4. Após a plotagem dos pontos apresentados nas Equações do Sistema da Metodologia, faz-se imperativo buscar-se a equação da curva estimada com a maior precisão possível. Aqui não cabe erro, por menor que seja, pois acarretará resultados totalmente incompatíveis com os resultados esperados;

5. A margem de precisão dos cálculos aqui apresentada é tão significativa que, mesmo desprezando-se algumas casas decimais, os valores calculados continuam com uma boa precisão.

6. Por último, é um software de fácil acesso e está disponível gratuitamente na Internet, cabendo na grande maioria dos atuais smartphones.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de utilização do software MAXIMA para construção do conhecimento matemático acerca do tema: Área de intersecções de curvas com o MAXIMA mostrou-nos a importância de utilização deste software que possibilitou e facilitou o cálculo e a manipulação da imagem e sua visualização propiciada pelo MAXIMA, além da facilidade do cálculo de áreas utilizando-se de integrais.

REFERÊNCIAS

COELHO, T.L. (2017). **Problemas variacionais envolvendo integrais múltiplas**. Dissertação de Mestrado. UFPA.

RIOTORTO, M. R. (2006). **Primeiros Passos no MAXIMA**. *GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation*

VOGADO; SILVA; DIAS, G. N. (2018) **Área de regiões através do Google Maps utilizando polinômio de newton e cálculo integral**. Congresso Nacional de Educação, Recife.

www.google.com.br/maps/place/VeroRio/@1.4358117,48.49.4955889,17z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x92a48eb0ced6b633:0x370dccfc998afb3c!8m2!3d-1.4358171!4d-48.4934002.

CAPÍTULO 7

Geometria Plana Segundo a Teoria de Van Hiele: uma Análise do Nível de Conhecimento Geométrico dos Alunos ao Final do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual da Cidade de Benevides, Pará, Brasil

Luciana Raiol Bahia

Gustavo Nogueira Dias

Gilberto Emanuel Reis Vogado

Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior

Ivamilton Nonato Lobato dos Santos

José Edimilson de Lima Fialho

Vanessa Mayara Pamplona

INTRODUÇÃO

A Geometria surgiu da necessidade humana em compreender aquilo que está ao seu redor, a fim de mostrar a praticidades das coisas e criar recursos que possibilitassem a evolução da humanidade enquanto sociedade, tornando o seu estudo necessário à realização de grandes feitos nas áreas que detenham da geometrização além, de proporcionar o desenvolvimento lógico e estimular o desenvolvimento da criatividade.

No Brasil, o ensino de geometria tem chamado a atenção dos pesquisadores pelo seu crescente abandono pós-movimento da matemática moderna com a proposta de algebrização da geometria que apresentaram resultados insatisfatórios no Brasil a perdurar até os dias atuais.

Os professores apresentam grandes dificuldades ao lecionarem suas aulas, pois a falta de materiais e infraestruturas aliados a falta de interesse do aluno vem desmotivando esse profissional no seu desempenho educacional e, ao se tratar no ensino da geometria torna-se um agravante, pois devido a metodologia de ensino tradicional pautada no livro didático, onde a geometria é vista como um conteúdo sem grande importância, incluídos apenas nos últimos capítulos dos livros. Outro fator a destacar no ensino de geometria é a falta de domínio de conteúdo por parte dos professores sobre a geometria, que acabam ensinando de forma superficial ou simplesmente deixam de ensiná-la.

Motivar os alunos a se interessar pelo conhecimento torna-se um grande desafio para o educador, e cabe ao professor rever suas práticas pedagógicas, buscar métodos e metodologias alternativas para evoluir profissionalmente, para que ele seja facilitador e fomentador do processo ensino-aprendizado da geometria, tornando-a mais compreensiva e significativa no ambiente escolar e no seu dia a dia.

Uma metodologia de ensinar geometria é o modelo elaborado pelo casal dos professores holandeses *Pierre M. Van Hiele e Dina Hiele-Geldof* na década de 50, em suas teses de doutorado descreveram a teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico, que ocorre por fases de aprendizagem sequenciais e ordenadas (OLIVEIRA; MENDONÇA, 2015).

“Van Hiele propõe um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro. Dessa forma, os pesquisadores estruturaram respectivamente, cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: visualização (ou reconhecimento), análise, abstração, dedução e rigor”.

A tese de Pierre tentava, principalmente, explicar o porquê os alunos tinham problemas ao aprender geometria (sob tal aspecto, ela era explicativa e descritiva), a tese de Dina versava sobre um

experimento educacional e, sob tal aspecto, é mais prescritiva com relação à ordenação do conteúdo de geometria e atividades de aprendizado dos alunos (VILLIERS, 2010).

A pesquisa foi realizada com alunos de doze e treze anos, na Holanda, sob a orientação do educador matemático Hans Freudenthal, tendo como motivação a dificuldade enfrentada, pelos estudantes, em sala de aula. Como Dina faleceu após o término de sua tese, foi *Pierre* que esclareceu sobre os níveis, fases e propriedades do modelo (CARGNIN; GUERRA; LEIVAS, 2016).

Na União Soviética o modelo de *Van Hiele* foi tomado como base para a elaboração de um novo currículo de geometria, implementado na primeira metade da década de 1960. Também foi utilizado na Holanda, no projeto Wiskobas de desenvolvimento curricular a partir de 1971. (SILVA; CANDIDO, 2007)

O modelo não foi muito difundido até a década de 1970, época em que surgiram vários projetos de pesquisa nos Estados Unidos. Somente então vários artigos publicados por *Van Hiele* passaram a ser traduzidos para o inglês, fazendo com que o modelo se tornasse conhecido (SILVA; CANDIDO, 2007).

O modelo de *Van Hiele* de pensamento geométrico tem sido utilizado para facilitar a compreensão de conteúdos em geometria, enriquecendo o espaço de ensino e aprendizagem.

A partir da necessidade de viabilização da geometria por parte do professor/aluno, bem como a importância da visualização e da representação das figuras geométricas no processo ensino-aprendizagem dos alunos, apresentarei neste trabalho uma descrição detalhada do modelo *Van Hiele* e a elaboração de uma sequência didática relacionada ao conceito de geometria, especificamente das propriedades de polígonos, cuja análise será realizada com embasamento na teoria de *Van Hiele*. Esta sequência de atividades será aplicada em três turmas com alunos do final do 9º Ano do Ensino Fundamental II da Escola Estadual Leão Irineu com o objetivo de identificar em qual nível encontram-se os alunos com relação a Teoria de *Van Hiele*.

Ao refletirmos sobre a geometria detectamos que ela está presente em tudo que observamos, na engenharia, na arquitetura, nas artes visuais, na astronomia, na física, na biologia etc.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam os conceitos geométricos fundamentais na construção do intelecto do aluno, pois lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. E ainda permite a criança observar, perceber semelhanças e diferenças, compreender os conceitos métricos e, permitir conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998).

Segundo Lorenzato (1995, p. 5), “[...] sem conhecer geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida”. A geometria permite ao sujeito orientar-se no espaço, visto que informações cotidianas são representadas por mapas, gráficos e tabelas.

Como vimos a geometria é um ramo da matemática que está presente no nosso dia-a-dia sendo necessária para a ampliação do conhecimento e, com intuito de suprir uma lacuna presente na sua didática metodológica proponho a ideia de implementar estratégias didáticas diversificadas que tragam ao ensino subsídios que motivem os alunos o despertar pelo saber.

Os *Van Hiele* descreveram um modelo de aprendizagem fundamentado numa visão que valoriza a aprendizagem da Geometria como um processo gradual, global e construtivo. Gradual por considerar a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica obtidos gradualmente. Global, porque figuras e propriedades não são abstrações isoladas. Construtivo, por pressupor que não existe transmissão de conhecimento, mas que o próprio aluno construa seus conceitos (HAMAZAKI, 2004).

O modelo de pensamento geométrico dos *Van Hiele* pode propiciar resultados satisfatórios para orientar a formação assim como para avaliar as habilidades dos alunos, e servir como um modelo útil para uso em sala de aula.

METODOLOGIA

A metodologia de pesquisa foi do tipo qualitativa-quantitativa com o enfoque na compreensão e a inserção do pesquisador no ambiente de trabalho que será usada neste trabalho, com a observação direta contínua durante os meses de setembro, outubro e novembro de 2016 usando questionários aos alunos, entrevista aos pais, diretores, professores e coordenadores.

A realização das atividades do estudo de caso em questão foi executada na Escola Estadual de Ensino Fundamental, localizada na cidade de Benevides, Estado Pará.

A escola é dividida em duas localidades da cidade, uma parte chamada de Escola Anexo situada no bairro de Santa Maria sendo a única escola do bairro a possuir ensino das séries finais do Ensino Fundamental Regular, e a outra parte da escola situada no bairro de Benfica, chamada de Escola Sede, por ser a primeira escola a ser inaugurada e que originou a Escola Anexo Leão Irineu.

A Escola Sede Leão Irineu é composta pelas séries do 3º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental Regular.

A Escola Anexo Leão Irineu é composta pelas séries do 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental, e surgiu de a necessidade da população local encontrar-se em crescente aumento populacional, visto que a escola mais próxima da região se encontrar aproximadamente 4 quilômetros de distância, enquanto a distância da Escola Sede para a Escola Anexo ser de aproximadamente 5 quilômetros de distância.

A Escola Anexo situada no bairro de Santa Maria apresenta duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental Regular, os quais atendem a predileção de escolha do estudo em questão, uma turma presente no turno da manhã composta por 25 alunos presentes e a outra turma pertence ao turno da tarde com a presença de 19 alunos.

A Escola Sede situada no bairro de Benfica possui apenas uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental pertencente ao turno da tarde, composta de 34 alunos presentes.

O presente estudo caracteriza-se no sentido de obter segundo a análise dos dados o conhecimento que os estudantes ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática têm sobre alguns conceitos básicos da geometria. Segundo Kauark et. al. (2010) a pesquisa qualitativa realiza a interpretação de determinados fenômenos, da atribuição de significados sem que necessariamente se utilize métodos e técnicas estatísticas.

Para a realização do estudo foram elaboradas atividades dentro da abordagem teórica do modelo de Van Hiele aplicadas com os alunos das turmas das séries finais do Ensino Fundamental II da Escola Estadual Leão Irineu localizada no município de Benevides do Estado do Pará.

Para o desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o modelo *Van Hiele*, deve-se seguir os seguintes níveis:

- Visualização (Nível 1) - reconhece visualmente uma figura geométrica, tem condições de aprender o vocabulário geométrico e não reconhece ainda as propriedades de uma determinada figura.

- Análise (Nível 2) – Identifica as propriedades de uma determinada figura, e não faz inclusão de classes.

- Dedução Informal (Nível 3) - Já é capaz de fazer a inclusão de classes, acompanhar uma prova informal, mas não é capaz de construir uma outra.

- Dedução Formal (Nível 4) - É capaz de fazer provas formais, e raciocina num contexto de um sistema matemático completo.

Participaram da pesquisa um total de 80 alunos, todos pertencentes ao 9º ano do Ensino Fundamental II Regular.

A aplicação da primeira atividade de cada unidade teve a aprovação em comum acordo de todos os membros que compõe a unidade administrativa escolar, como direção, vice direção e coordenação pedagógica. Com a permissão da escola foi aplicada a Atividade I junto a atividade II, com o auxílio do professor de matemática responsável por cada turma, que contribuiu na organização e seriedade por parte dos alunos.

Inicialmente foi esclarecido aos alunos que se tratava de um teste de conhecimento, a fim de diagnosticar o nível de conhecimento da turma ao assunto de figuras geométricas planas.

A atividade I e atividade II foi realizada primeiramente na Escola Anexo com a turma do turno da manhã, no dia 23 de setembro de 2016, no horário de 8:15 horas, e teve duração de uma aula de 50 minutos. A próxima turma de execução da atividade foi a turma situada na Escola Anexo do turno da tarde, no dia 26 de setembro de 2016 no horário das 13:30 às 14:15 horas e no mesmo dia foi realizada a atividade I e II na Escola Sede no horário de 15:00 às 16:00 horas, todas os dias de escolha da execução da atividade foi correspondente ao horário da disciplina de matemática de cada turma.

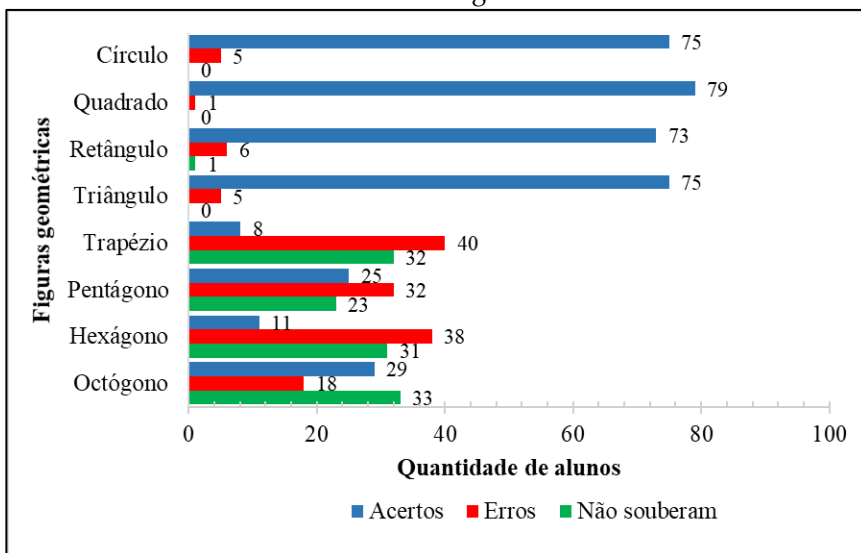
Para a obtenção de uma análise inicial do nível do pensamento geométrico dos alunos que estão cursando a série final do Ensino Fundamental Regular da Escola Leão Irineu, foi utilizado como recurso metodológico um questionário apresentando oito figuras geométricas planas. As figuras foram elaboradas de maneira que pudessem seguir uma sequência didática de raciocínio.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise inicial correspondente a atividade I, teve como referência o nível 1 da Teoria de *Van Hiele* o qual corresponde ao reconhecimento e identificação das figuras geométricas apenas pelo seu aspecto geral. O aluno observa a figura e a identifica, mas não é necessário justificá-la.

Através dados obtidos com a atividade I executados pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II Regular conseguimos observar a quantidade de acertos, a quantidade de erros e a quantidade de alunos que não sabiam responder ao questionário de identificação das figuras geométricas planas, conforme mostra a Figura 1.

Figura 1: Levantamento geral de dados da Atividade I dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II 9 Anos da Escola Estadual de Ensino Fundamental “Leão Irineu Haussler Delgado”.

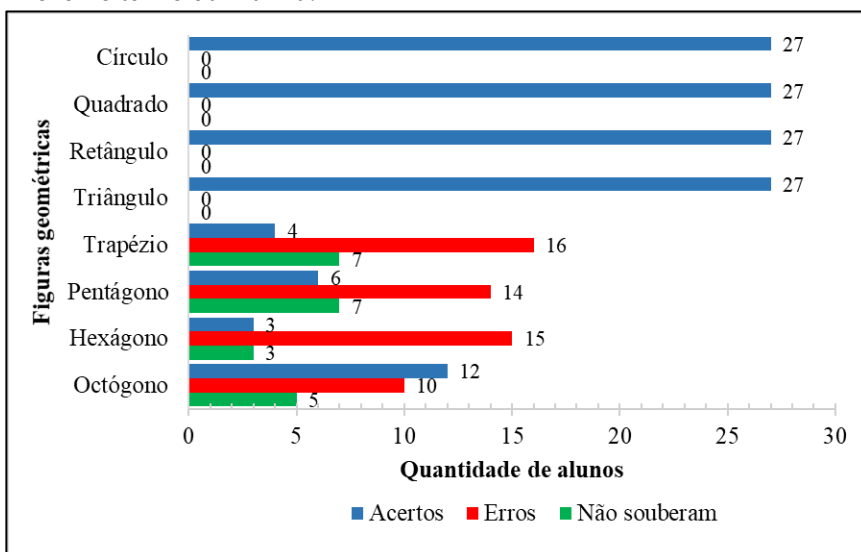


Fonte: dados da pesquisa.

Dos 80 alunos analisados da Escola Leão Irineu, podemos perceber que em média 75 dos alunos apresentam o nível 1 da teoria de *Van Hiele*, visto que foi possível a identificação das figuras geométricas planas de maneira global apenas das formas básicas da geometria plana, como círculo, quadrado, retângulo e triângulo. Porém, vale destacar o nível 0 dos alunos na Teoria de *van Hiele* sobre a identificação das demais figuras planas, visto que a grande maioria dos alunos erraram ou não souberam responder a Atividade I do questionário.

Ao analisarmos a atividade II, Figura 2, nenhum aluno atingiu o nível 2 na qual podemos concluir que os ensinamentos relacionados aos conteúdos de geometria planas não foram trabalhados em sala de aula desde as séries iniciais até o final do Ensino Fundamental com esses estudantes, fato relatado pelos próprios alunos no decorrer da atividade.

Figura 2: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental situados na Escola Anexo no turno da manhã.

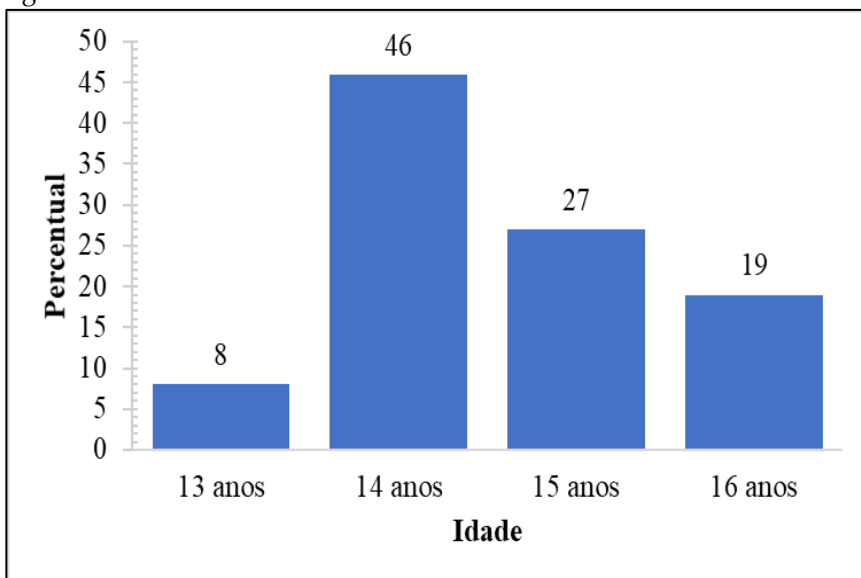


Fonte: dados da pesquisa.

Com podemos perceber todos os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental situados na Escola Anexo do turno da manhã, acertaram todas as figuras geométricas básicas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), as demais figuras planas ficaram na média de 5 acertos, com destaque para o octógono que obteve uma quantidade de 12 acertos, devido ao fato dos alunos acompanharem lutas márcias transmitida na televisão em canal fechado, atividade esportiva bastante divulgada atualmente, onde a luta ocorre dentro do “Octógono” como é chamado o tatame de luta e possuir os oito cantos, semelhante à figura geométrica. Com isso fizeram a

correlação com o pentágono e hexágono na citação das propriedades geométricas, contudo não sabiam dizer o nome das respectivas figuras geométrica. Com relação ao trapézio nenhum soube expor uma das suas propriedades e apenas 4 alunos souberam o seu nome. Na Figura 3 abaixo, segue a idade dos alunos:

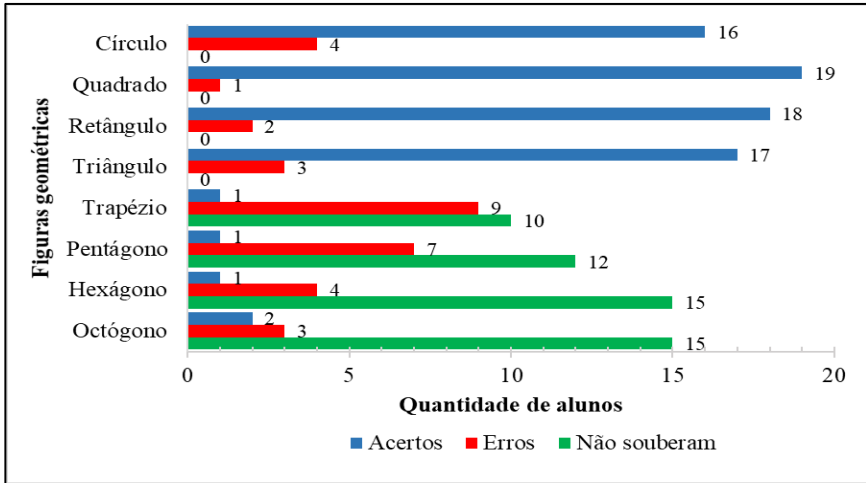
Figura 3: Idade dos alunos referentes a escola Anexo turno da manhã.



Fonte: dados da pesquisa.

Os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Anexo do turno da manhã, Figura 3, apresentam uma quantidade não expressivo no percentual de alunos com estudos compatíveis com a idade cursada, Figura 3. pois 54% da turma está com idade de 13 a 14 anos e os demais alunos encontram-se com atraso escolar, demonstrando um alto índice de defasagem escolar na localidade. Na Figura 4, abaixo, mostra o desempenho e aplicações:

Figura 4: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental situados na Escola Anexo no turno da tarde.



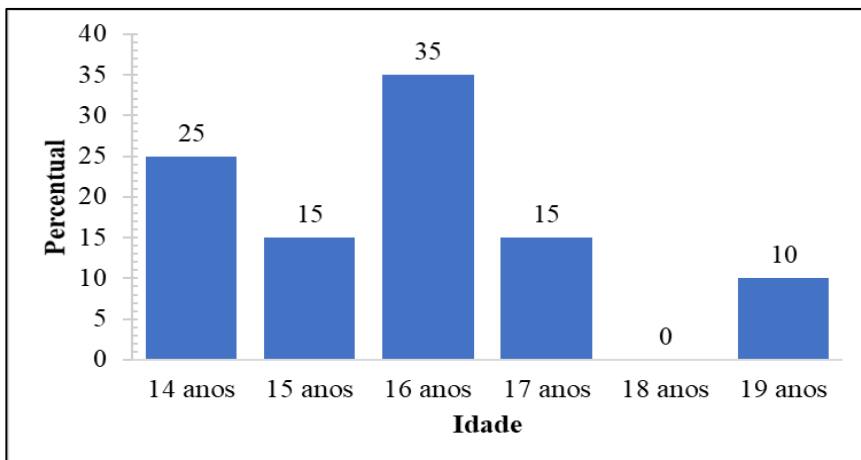
Fonte: dados da pesquisa.

Os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental situados na Escola Anexo no turno da tarde, Figura 4, obtiveram seus desempenhos baixos, comparados aos alunos do turno da manhã da escola Anexo, houve alunos que erraram as formas básicas da geometria plana e houve apenas a média de um acerto para as demais figuras, onde é possível perceber que os mesmos não possuem os mesmos costumes culturais. Ao analisarmos a idade-série observamos que a demanda de alunos do turno da tarde da Escola Anexo é composta por alunos com defasagem escolar (Figura 4).

São considerados em defasagem escolar os alunos que não possuem no início de cada ano letivo os anos de estudos compatíveis com sua idade.

Dados do Censo Escolar, Figura 5, apontam que os adolescentes de 15 anos de idade são os que apresentam maior índice de distorção idade-série, sendo um dos determinantes para esse atraso escolar, a entrada tardia na escola, evasão por necessidade de renda familiar e ter que trabalhar cedo e como consequência gerando repetência escolar.

Figura 5: Idade dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II Regular matriculados na Escola Anexo Leão Irineu no turno da tarde.

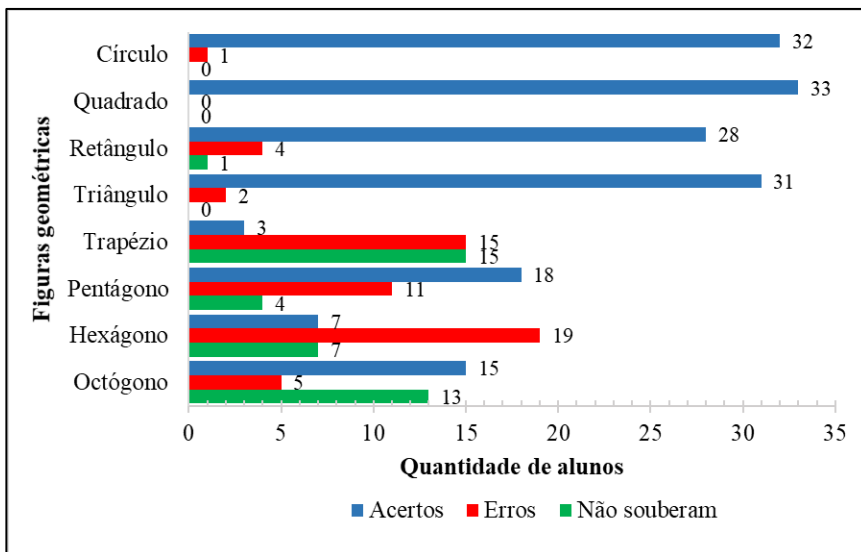


Fonte: dados da pesquisa.

A Figura 5, nos confirmar o alto índice de alunos com atraso na série-idade dos alunos da Escola Anexo Leão Irineu do turno da tarde com a presença de apenas 5 alunos com idade-série correta, apresentando alunos com até 19 anos de idade na série em questão. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação a idade-série para cursar o 9º ano do Ensino Fundamental corresponde a 14 anos de idade, visto que a idade de ingresso no Ensino Fundamental é de 6 anos de idade.

Esse fato observado é o que normalmente acontece na maioria das escolas públicas, onde presenciamos os alunos do turno da manhã com idade apropriada para a série e os alunos mais velhos são matriculados para o turno da tarde, fato justificados pelos gestores escolar devido a geração de conflitos de pensamentos, onde um aluno mais velho querer dominar os alunos mais novos e assim prejudicar no rendimento dos alunos mais novos. Desempenho dos assuntos estudados no 9º ano no turno da tarde, Figura 6:

Figura 6: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental situados na Escola Sede no turno da tarde.



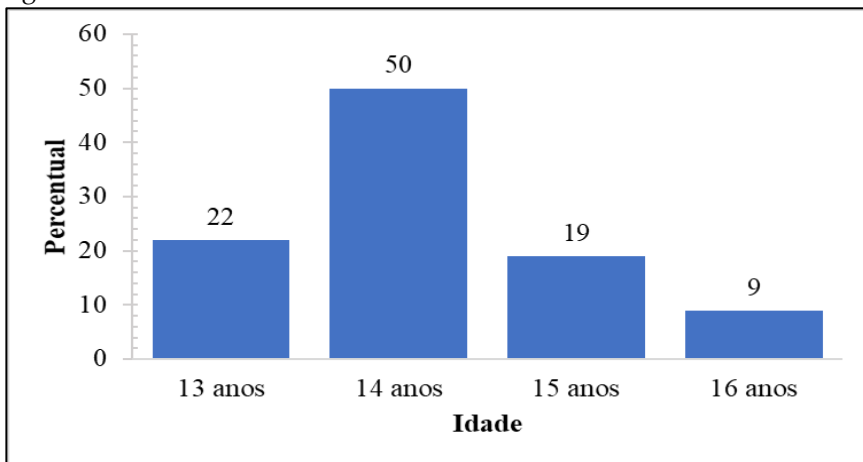
Fonte: dados da pesquisa

Ao compararmos o nível 1 e 2 da Teoria de *Van Hiele* no reconhecimento das figuras planas geométricas dos alunos da Escola Leão Irineu como um todo, na Figura 6, observamos que o desempenho dos alunos da Escola Sede foi relativamente maior apesar de um pequena parcela ter errado na identificação do nome das figuras planas básicas, na qual 01 aluno errou o círculo, 04 alunos erraram o retângulo e 02 alunos erraram o triângulo, por conseguinte a quantidade de acerto nas demais figuras planas foi maior que outra unidades da escola, na 18 alunos acertaram a identificação do pentágono, 07 alunos acertaram o hexágono e 15 acertaram o octógono, e o trapézio continuou sendo a figura geométrica menos conhecida pelos alunos com apenas 03 acertos.

Ressaltando o nível de conhecimento dos alunos da Escola Sede que obtiverem um desempenho mais aprimorado na realização da Atividade II comparando as demais turmas do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola “Leão Irineu”, eles relataram a utilização de termos adequados das propriedades geométricas, como exemplo,

arestas, termo não utilizado em nenhuma das outras turmas e maior quantidade de acertos na conceituação das propriedades das figuras geométricas. Figura 7, trata da idade dos alunos da escola Sede:

Figura 7: Idade dos alunos da Escola Sede.



Fonte: dados da pesquisa

Ao analisarmos a relação idade-série desses alunos, Figura 7, observamos que mais metade da turma apresenta a idade correta a série cursada, e ainda assim apresentam uma parcela significativa de atraso escolar, fato que nos leva a refletir nas causas e consequências da distorção idade-série em que os adolescentes apresentam atualmente na educação brasileira.

Dados do Censo Escolar, mostram que 59% alunos da cidade de Benevides apresentam distorção idade-série e no geral os determinantes a defasagem escolar são a entrada tardia na escola, evasão e a repetência de estudos (INEP, 2015).

A partir dos dados obtidos inicialmente, a maior parte dos alunos se quer atingiu o nível 1 da Teoria de *Van Hiele*, logo fica constatado o déficit no processo de ensino de geometria, posta em segundo plano, seus conteúdos não vêm sendo trabalhados em sala de aula, prejudicando os alunos quanto ao seu ensino, e desenvolvimento nas habilidades de percepção de espaço.

No Ensino fundamental II, o aluno deve ser capaz de classificar, compor, decompor e resolver situações problemas que envolvam figuras e sólidos geométricos; utilizar os instrumentos adequados para medição, tanto de lados quanto de ângulos; interpretar deslocamento no plano cartesiano; reconhecer as propriedades dos triângulos e quadriláteros; utilizar as fórmulas para o cálculo de área perímetro (planos) e volume (sólidos); seccionar as figuras e analisar. A parte dedutiva ainda está reservada aos dois últimos anos. No entanto, o desenrolar do processo histórico e a análise de livros didático mostram que a dedução tende a desaparecer (SENA; DORNELES, 2013).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De maneira geral os dados obtidos foram bastante abaixo do preconizado pelo currículo de conhecimento geométrico para as séries finais do ensino fundamental, mas que também devemos levar em conta o quadro socioeconômico da região, torna-se um agravante no processo de ensino-aprendizagem.

Contudo, os níveis de conhecimento geométrico apresentados pelos sujeitos da pesquisa expressaram-se abaixo do esperado para o Ensino Básico, confirmando os estudos em que a geometria continua sendo abandonada atualmente, acarretando negativamente no seu ensino, principalmente no ensino que continuam pautado ao modelo tradicional, onde o aluno é um ser passivo de aprendizagem.

Acreditamos que deve haver discussões nas escolas sobre a importância da geometria e que os professores elaborem um planejamento coletivo para ensinarem suas turmas, para que haja uma progressão quanto ao nível de pensamento geométrico.

Como podemos ensinar geometria para que haja avanço no nível de pensamento geométrico?

Os pesquisadores do modelo de *Van Hiele* afirmam que o modelo tem grande importância no ensino-aprendizagem de

geometria, pois o modelo dá orientações a professores de como melhorar o ensino de geometria, favorecendo assim os estudantes no entendimento do conteúdo, auxilia o professor a identificar a maneira do aluno pensar e verificar o seu nível de conhecimento geométrico, ou seja, o aluno

agora passa ser um ser ativo de conhecimento, participando ativamente das aulas e obtendo o desenvolvimento necessário para a aprendizagem de geometria.

REFERÊNCIAS

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Ensino Fundamental. Brasília: MEC/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

CARGNIN, R. M.; GUERRA, S. H. R.; LEIVAS, J. C. P. **Teoria de van Hiele e investigação matemática:** implicações para o ensino de Geometria. Revista Práxis, Ano VIII, n.15, Junho, 2016.

HAMAZAKI, A.C. **O ensino da geometria sob a ótica dos Van Hiele.** VII Encontro Nacional de Educação matemática. Universidade Federal de Pernambuco. Julho, 2004.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira. Disponível in: <http://portal.inep.gov.br/indicadores-educacionais>. Acessado em: 24 de novembro de 2016.

KAUARK, F.; MANHÃES, F.C.; MEDEIROS, C.H. **Metodologia da pesquisa:** guia prático. Itabuna. Ed. Via Litterarum, 2010.

LORENZATO, SÉRGIO. **Por que não ensinar Geometria?** In: A educação matemática em revista. Geometria. Blumenau, número 04, p.03-13, 1995. Edição especial.

OLIVEIRA, F. E. F.; MENDONÇA, L. O. S. **Os níveis de conhecimento geométricos dos alunos de uma escola parceira do PIBID na perspectiva da teoria de van Hiele.** *Conex. Ci. e Tecnol.* Fortaleza/CE, v. 9, n. 4, p. 115 - 125, dezembro, 2015.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. **Ensino de geometria:** Rumos da Pesquisa (1991-2011). In: *Revista Eletrônica de Educação Matemática.* Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. Santa Catarina, v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013.

SILVA, L.; CANDIDO, C. C. **Modelo de aprendizagem do casal Van Hiele.** II Simpósio de Iniciação Científica e Pós-graduação. Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo. Novembro, 2007

VILLIERS, M. **Some reflexões de on the Van Hiele Teory.** Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. Tradução Celina A. A. P. Abar. *Revista Educação Matemática Pesquisa.* v. 12, n. 3, p. 400-431. São Paulo. 2010.

CAPÍTULO 8

Obtenção do Ponto Simétrico em Relação a Uma Reta Utilizando Método Simplificado

Pedro Roberto Sousa da Silva
Gustavo Nogueira Dias
Vanessa Mayara Souza Pamplona
Antonio Thiago Madeira Beirão
Katiane Pereira da Silva
Edson Junior Ferreira de Azevedo
Fabrício da Silva Lobato
Nelba Tania Gomes Pinheiro

INTRODUÇÃO

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998) para o ensino de matemática, encontra-se como objetivos para a disciplina em sala de aula “identificar características de figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções” (BRASIL, 1998, p. 56). Isso mostra que a simetria é tão importante, pois proporciona ao aluno a noção da semelhança, igualdade, lateralidade entre outros.

O conceito de simetria, lembra a palavra “reflexão”. Quando trabalhamos com o conceito de espelhos, nos dá uma ideia de uma imagem refletida. Neste caso a equação da reta funcionaria como um espelho, porém com imagens, definidas pela simetria dos pontos. A geometria dá ao aluno noções de espaço, área, volume, complementos, equilíbrio, e outros mais, para que esse aluno

desenvolva das séries iniciais ao ensino superior uma percepção visual que o dá condições para viver em sociedade.

Segundo Kaleff (2004, p.02) “Um dos principais objetivos do ensino de Geometria, tanto no ensino fundamental quanto no médio, é o desenvolvimento da percepção visual, o qual pode ser incentivado por meio da exploração de efeitos visuais obtidos a partir de modelos concretos de representações de transformações geométricas. A partir destas observações e como produto de pesquisas em busca de novos caminhos para o ensino de Geometria”.

Gomes, (2007) afirma que “o surgimento das novas tecnologias criou um cenário favorável à hibridação, codificando novas linguagens, associadas às atuais formas de comunicação”. Facilitando o aprendizado do aluno através das tecnologias que estão habituados a ver.

DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO

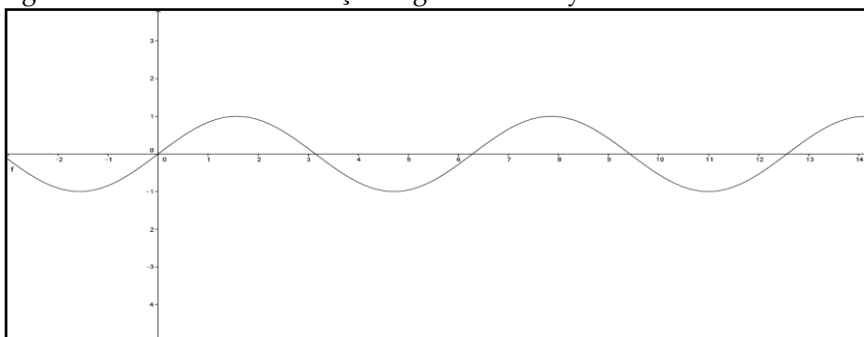
Segundo Lopes et al. (2013, p. 2), a presença de características simétricas é tão evidente e historicamente perceptível que foi introduzida na Educação Básica para sua abstração e formalização, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998). Nas diversas áreas da Matemática, a simetria é estudada a partir de várias tendências. As funções ímpares (funções polinomiais de índice ímpar e algumas trigonométricas) possuem representação gráfica simétrica à origem, enquanto os pares (polinomiais de índice par e outras trigonométricas).

Tratando-se de simetria, a matemática estar presente na história desde o início dos tempos, quando vemos pinturas, estatuas, monumentos e construções ficam evidentes a sua presença, para uma abstração e formalização esse contexto foi introduzido à educação básica, assim nos anos seguintes os alunos já terão uma ideia de simetria tanto na matemática como na história.

Estudando algumas áreas da matemática, percebesse a presença da simetria fora de sua tendência, como por exemplo,

algumas funções polinomiais e trigonométricas que em sua representação gráfica apresentam simetria em relação à origem ou em relação ao eixo das ordenadas. Observe a Figura 1, abaixo que mostra a curva da função $y = \text{sen} x$ que é simétrica a origem.

Figura 1: Gráfico de uma função trigonométrica $y = \text{sen} x$.



Fonte: dados da pesquisa.

Do conceito básico de simetria, temos que seja tudo aquilo que possa ser dividido em partes, desde que haja a coincidência dessas partes quando sobrepostas. Um termo que está ligado à natureza, artes e claro, à matemática. Nessa última, geralmente associa-se com os assuntos de geometria, por exemplo, quando nos referimos a duas figuras geométricas idênticas dispostas e que se correspondem ponto a ponto.

Também a simetria pode ser uma conformidade, em medida, forma e posição relativa, entre as partes dispostas em cada lado de uma linha divisória, um plano médio, um centro ou um eixo. Nas obras de artes a simetria é muito utilizada e importante para a confecção da obra. Podemos encontrar a simetria na natureza e na arte como também no corpo humano.

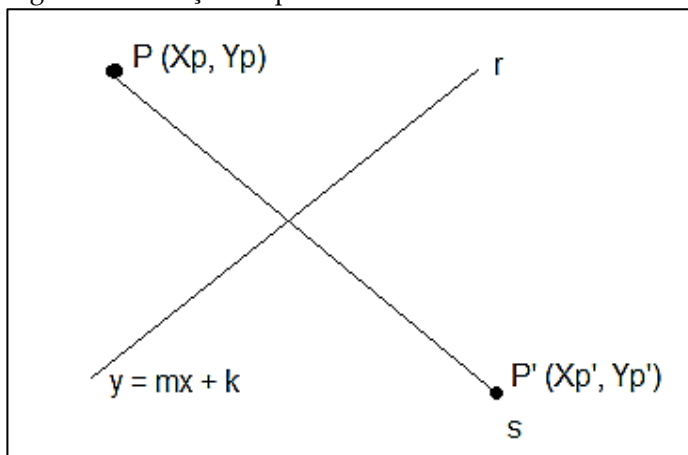
O conjunto dos pontos P' associados aos diversos pontos P de uma figura F constituem a figura P' transformada de A por simetria em relação à reta r . Alves (2005), considera nesta ótica, a figura, a sua parte esquerda é congruente à parte direita, em relação a eixo, por ser uma imagem refletida.

De acordo com essa ideia, podemos dizer também que esse conceito serve de base para a questão da interdisciplinaridade, pois é o que afirma Fortes (2011), a interdisciplinaridade caracteriza-se pela intensidade entre os especialistas e pelo grau de interação real das disciplinas no interior de um mesmo projeto de pesquisa.

MATERIAL E MÉTODOS

Observe, Figura 2, indicação do ponto simétrico:

Figura 2: indicação do ponto simétrico



Fonte: dados da pesquisa.

Considere o ponto $P (x_p, y_p)$ que se deseja refletir em relação à reta $y = mx + k$.

Para tanto, vamos achar outra reta perpendicular a reta "r" passando por P e P' .

Usamos a equação do feixe de retas $y - y_0 = m.(x - x_0)$ onde (x_0, y_0) é o ponto conhecido (x_p, y_p) e "m" é o coeficiente angular da reta perpendicular à reta "s". (Lehmann, 1998)

Como a reta "s" é perpendicular à reta "r", temos:

$$m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m}$$

Portanto obtemos a equação da reta perpendicular:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m} \cdot (x - x_0)$$

Para encontrarmos o ponto P' simétrico, necessitamos do conceito de ponto médio, logo temos:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_p + x_{p'}}{2} \\ y_M = \frac{y_p + y_{p'}}{2} \end{cases}$$

Portanto, o ponto médio M é obtido através da solução do sistema:

$$\begin{cases} y - y_p = -\frac{1}{m} \cdot (x - x_p) & \text{(I)} \\ y = mx + k & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (II) em (I), temos:

$$\begin{aligned} mx + k - y_p &= -\frac{1}{m} \cdot (x - x_p) \\ x &= \frac{1}{m^2 + 1} \cdot x_p + \frac{m}{m^2 + 1} \cdot y_p - \frac{m}{m^2 + 1} \cdot k \end{aligned}$$

Como $x = x_m$ (Abscissa do ponto médio), temos:

$$x_m = \frac{1}{m^2 + 1} \cdot x_p + \frac{m}{m^2 + 1} \cdot y_p - \frac{m}{m^2 + 1} \cdot k \quad \text{(III)}$$

Substituindo-se (III) em (II), temos:

$$\begin{aligned} y &= mx + k \\ y &= m \cdot \left(\frac{1}{m^2 + 1} \cdot x_p + \frac{m}{m^2 + 1} \cdot y_p - \frac{m}{m^2 + 1} \cdot k \right) + k \end{aligned}$$

Como $y = y_m$ (ordenada do ponto médio), temos:

$$y_m = \left(\frac{m}{m^2 + 1} \cdot x_p + \frac{m^2}{m^2 + 1} \cdot y_p - \frac{m^2}{m^2 + 1} \cdot k + k \right) \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (III) e (IV) nas coordenadas de ponto médio, obtemos finalmente o ponto simétrico:

$$x_m = \frac{x_p + x_{p'}}{2}$$

$$\frac{2}{m^2 + 1} \cdot x_p + \frac{2m}{m^2 + 1} \cdot y_p - \frac{2m}{m^2 + 1} \cdot k - x_p = x_{p'}$$

Portanto:

$$x_{p'} = \frac{2}{m^2 + 1} \cdot x_p + \frac{2m}{m^2 + 1} \cdot y_p - \frac{2m}{m^2 + 1} \cdot k - x_p \quad (V)$$

Fazendo a mesma situação com y_n , temos: $y_m = \frac{y_p + y_{p'}}{2}$

$$\frac{m}{m^2 + 1} \cdot x_p + \frac{m^2}{m^2 + 1} \cdot y_p - \frac{m^2}{m^2 + 1} \cdot k + k = \frac{y_p + y_{p'}}{2}$$

Portanto:

$$y_{p'} = \frac{2m}{m^2 + 1} \cdot x_p + \frac{2m^2}{m^2 + 1} \cdot y_p - \frac{2m^2}{m^2 + 1} \cdot k + 2k - y_p \quad (VI)$$

Observamos que a superfície reflexiva tem coeficiente angular em torno de ± 1 .

Portanto basta substituir este coeficiente ± 1 no lugar do “m” das equações V e VI,

i) Para $m = +1$, obtemos:

Para $x_{p'}$:

$$x_{p'} = \frac{2}{1^2 + 1} \cdot x_p + \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \cdot y_p - \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \cdot k - x_p$$

$$x_{p'} = x_p + x_p - k - x_p$$

C.q.d.

Para $y_{p'}$:

$$y_{p'} = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} \cdot x_p + \frac{2 \cdot 1^2}{1^2 + 1} \cdot y_p - \frac{2 \cdot 1^2}{1^2 + 1} \cdot k + 2k - y_p$$

$$y_{p'} = x_p + y_p - k + 2k - y_p$$

$$y_{p'} = x_p + k$$

C.q.d

ii) Para $m = -1$ e substituindo-se nas equações (V) E (VI) obteremos resoluções semelhantes. Observe que “k” representa o coeficiente linear da reta fornecida inicialmente.

Exemplo de aplicação:

Quando $a = \pm 1$ podemos usar um artifício: “use a própria reta

Determine o ponto simétrico de $P(1,-2)$ em relação a reta $y = x - 4$.

Use a Reta

$$y = x - 4$$

$$y_{P'} = 1 - 4$$

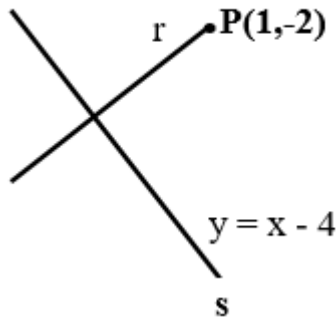
$$y_{P'} = -3$$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ -2 = x_{P'} - 4 \\ -x_{P'} = -4 + 2 \\ -x_{P'} = -2 \\ x_{P'} = 2 \end{cases}$$

Portanto o ponto simétrico procurado é: $P'(2, -3)$.

Fazendo a comparação pelo método tradicional, Dias (2011):

Traçamos uma reta passando por p e que seja perpendicular a reta dada.



➤ Achamos a equação desta reta usando a equação do feixe de reta.

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$m_r \cdot m_s = -1$$

$$y - (-2) = m(x - 1)$$

$$1 \cdot m_s = -1$$

$$y + 2 = -1(x - 1)$$

$$m_s = -1 \text{ (inverso do simétrico)}$$

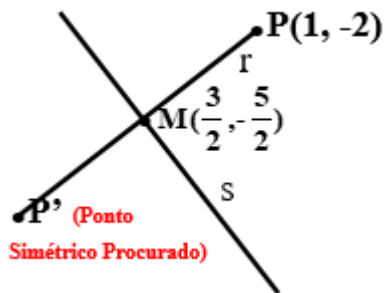
$$y + 2 = -x + 1$$

$$y = -x - 1 \text{ retas r.}$$

➤ Fazemos a interseção da reta s com a reta r que acabamos de achar $r \cap s$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x - 1 \\ \hline 2y = -5 \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{aligned} y &= x - 4 \\ \frac{5}{2} &= x - 4 \\ -5 &= 2x - 8 \\ \hline -2x &= -8 + 5 \\ -2x &= -3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

A solução do sistema formado pela interseção representa o ponto médio entre P e o seu reflexo P'.



Usando a definição de ponto médio determinamos o ponto refletido.

$$x_m = \frac{x_P + x_{P'}}{2} \qquad y_m = \frac{y_P + y_{P'}}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1 + x_{P'}}{2} \qquad \frac{5}{2} = \frac{2 + y_{P'}}{2} \quad \longrightarrow \quad P' (2, -3)$$

$$x_{P'} = 3 - 1 \qquad -5 + 2 = y_{P'}$$

$$x_{P'} = 2 \qquad y_{P'} = -3$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conceito de simetria é mais amplo do que parece. Tem vários casos possíveis como simetria de um ponto em relação ao eixo x , ao eixo y , a origem, em relação a uma reta, em relação a uma: circunferência, elipse, hipérbole ou até em relação a uma curva polinomial.

A simetria proposta neste trabalho, trata de uma forma mais concisa e rápida de expor os pontos simétricos a serem calculados. É uma forma de algoritmo que facilita os cálculos das projeções dos pontos em relação a uma reta. Pontos esses que poderão ser pontos a serem refletidos, coordenadas do centro de uma circunferência, focos de uma elipse ou hipérbole, vértice e focos de uma parábola e muitas outras aplicações possíveis.

REFERÊNCIAS

ALVES, D. S. **Simetria Axial: Uma Sequência Didática** Para alunos da 6ª Série com o Uso de Software de Geometria Dinâmica. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Pernambuco. Centro de Educação. 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DIAS, G. N. **Práticas do Ensino da Matemática: A Realidade da Sala de Aula** – Edição Independente. Belém, 2011.

EXPOSIÇÃO DE ARTES. MOSTRA. **O mundo mágico de Escher**, no Centro Cultural Banco do Brasil (CCBB), em Brasília. Dezembro, 2010.

FORTES, C. C. A. **Temática da Interdisciplinaridade no Curso de Especialização em gestão Educacional**. Monografia (especialização) – UFSM/RS, 2011.

GOMES L. A. **O Double Coding na Animação: A Construção do Desenho Animado Contemporâneo para Adultos e Crianças**. Intercom – Sociedade Brasileira de Estudos Interdisciplinares da Comunicação XXX Congresso Brasileiro de Ciências da Comunicação – Santos – 29 de agosto a 2 de setembro de 2007. 2007.

IEZZI, GELSON – **Fundamentos da Matemática Elementar**, v. 7, Ed. Atual 1993.

KALEFF, A. M. R. **Construindo o Conceito de Simetria em Relação a uma Reta: do Jardim de Infância ao Ensino Superior**. Publicado em boletim GEPEM, nº 35, 1999, p. 42-56, 1999.

LOPES, L. S. **A Simetria por Meio de Uma Proposta Investigativa: História e Implicações Culturais**. VI Congresso Internacional do Ensino de Matemática. Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil, 16, 17, 18 de outubro de 2013. 2013.

LEHMANN, C. H. **Geometria Analítica**. Tradução de Pinto da Silva Sieczkowski. São Paulo, 9ª Edição, ed. Globo. 1998.

CAPÍTULO 9

Determinações das Funções Circulares Empregando o Triângulo Retângulo - Processo Geométrico

Gustavo Nogueira Dias
Wagner Davy Lucas Barreto
Gilberto Emanuel Reis Vogado
Vanessa Mayara Souza Pamplona
Antonio Thiago Madeira Beirão
Katiane Pereira da Silva
Ricardo Daniel Soares Santos

INTRODUÇÃO

A educação brasileira sofreu inúmeras mudanças nos últimos 20 anos, existe uma escola dos meus pais e outra totalmente diferente a dos meus filhos. A informação e acesso extremamente fácil a tecnologia colocou certos conceitos educacionais antigos em total desuso. É praticamente impossível fiscalizar provas da escola. Há milhares de formas usadas pelos alunos para driblar a fiscalização contra colas e ou celulares, por mais rígida que sejam eles sempre encontram uma maneira. Na escola em que trabalho a maneira encontrada é a mais trabalhosa, fazer tipos diferentes de provas e intercalar várias turmas em uma mesma sala de aplicação. Funciona, mas nem sempre. Já foi pego mensagens em celular de alunos comentando como se faz um determinado tipo de questão e alertando quanto ao tipo de prova e que os números poderiam ser diferentes daqueles. Evidentemente isso acontece mais no ensino médio.

Na perspectiva de Stenhouse (1987), apud Contreras (2002), cada classe, cada aluno, cada situação de ensino reflete características únicas e singulares. Não é possível saber o que é ou será uma situação de ensino até que não se realize. Por isso é impossível dispor de um conhecimento que nos proporcione os métodos que devam ser seguidos no ensino, quando o importante na educação é atender as circunstâncias que cada caso apresenta e não pretender a uniformização dos processos educativos. Isso torna um professor mais parecido com um jardineiro que presta a atenção singular a cada planta de seu jardim e não como um agricultor, que aplica um tratamento homogêneo a todo o terreno.

HISTÓRICO

A Trigonometria – estudos dos triângulos – serviu desde os antigos babilônios, até pouco antes de Descartes, como instrumento puramente prático de agrimensura, astronomia e navegação. Os perscrutadores de estrelas e marinheiros, sondando os céus ou varrendo os mares, frequentemente necessitavam calcular distâncias que não podiam ser medidas com a régua ou a trena. A Trigonometria tornava isso possível pela simples aplicação de certas regras básicas sobre as relações entre os lados e os ângulos de qualquer triângulo, grande ou pequeno.

Presume-se que tenha sido Hiparco quem de fato estabeleceu, por volta de século II a.C., as bases da trigonometria. Mas os hindus e os árabes também contribuíram para seu desenvolvimento.

A trigonometria, como a conhecemos hoje, na sua forma analítica, remonta ao século XVII. Seu florescimento dependia de um simbolismo algébrico satisfatório, o que não existia antes dessa época. Mas, considerando o termo trigonometria no seu sentido literal (medida do triângulo), a origem do assunto pode ser situada já no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo. O papiro Rhind, importante documento sobre a matemática egípcia (aproximadamente 1700 a.C.), menciona por quatro vezes o seqt de

um ângulo, em conexão com problemas métricos sobre pirâmides (IEZZI, 2013).

As pirâmides egípcias eram construídas de maneira a que a inclinação de uma face sobre a base (medida de OMV) fosse constante — aproximadamente a 52° . Egípcios e babilônios (aproximadamente 1500 a.C.) e posteriormente os gregos usavam relógios de sol em que era utilizada a mesma ideia. Tais relógios consistiam basicamente de uma haste BC, chamada pelos gregos de gnomon, fincada verticalmente no chão. O exame da variação da amplitude da sombra AB projetada pela haste propiciava a determinação de parâmetros, como a duração do ano (IEZZI, 2013).

Contudo, foi na Europa do século XV que a trigonometria começou a ganhar importância, graças à influência de vários matemáticos, sobretudo o alemão Johann Müller, mais conhecido pelo nome latino Regiomontanus.

Regiomontanus trabalhou pela organização da trigonometria como uma disciplina independente da astronomia, além de escrever vários livros sobre tema, como de triangulis, em 1464 (IEZZI, 1993).

Iniciamos muitas vezes a trigonometria com certo receio de tantas demonstrações e fórmulas que os alunos têm que desenvolver e nos deparar com muita resistência em sala de aula. Podemos dizer que em uma turma normal do ensino médio contamos apenas com 20% de colaborações dos mesmos alunos, o restante parece estar de corpo presente quando muito copiam do quadro e nada mais.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A trigonometria tem muitas finalidades na nossa vida prática e cotidiana. O processo abaixo é apenas uma transposição didática do que aprendemos nos livros e agora vamos visualizar de uma forma geométrica mais simples e mais didática voltada ao aluno do ensino médio.

A abordagem do ensino da Trigonometria no Ensino Médio é de essencial importância, pois esse campo de conhecimento

apresenta diversas finalidades no nosso cotidiano, como por exemplo, ser utilizada como instrumento de abordagem sobre os aspectos geométricos envolvendo figuras planas – triângulo retângulo e sua aplicação no processo de ensino aprendizagem através da transposição didática.

“Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’ que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.” (CHEVALLARD, 1991, p.39).

Atualmente o Exame Nacional do Ensino Médio dá um tempo calculado de 03 (três) minutos apenas para resolução de cada questão. Segundo o trabalho de Chevallard (1991), o autor argumenta que o tempo empregado para a resolução de cada questão da prova, seria praticamente impossível, pois as questões na sua maioria apresentam longos textos, como também, aspectos textuais que dificultam a resolução da referida questão, trazendo para o aluno uma série de problemática, como por exemplo, falhas nas interpretações voltada a resolução da questão, fazendo com que o aluno se desprenda dos pontos fundamentais para a resolução da questão.

Destaca-se nesta proposta o destaque para o Ensino por Atividades, que na concepção de Cabral (2017):

Modelo de ensino que possibilita a reconstrução das ideias matemáticas por trás dos algoritmos “desalmados” na maioria das vezes, tem um efeito mais significativo e duradouro nas funções psicológicas superiores dos alunos (CABRAL, 2017, p.12).

Desta forma ajudaremos o aluno a encontrar um sentido no que estão realizando, e que sintam que tem potencial para fazer, utilizando um conceito mais simples e razoável, sem o algebrismo que muitas vezes causa obstáculos intransponíveis no raciocínio lógico do aluno.

Através da sequência didática proposta é possível o professor diferenciar os conteúdos expostos e como trabalhar possibilitando objetivos mais concisos e fundamentais para o entendimento, sendo necessários que estejam ligadas entre si de forma que possam contemplar os mais diversos conteúdos sendo necessário estabelecer etapas.

Para Oliveira (2013), a sequência didática é:

“Um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa a fim de trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para otimizar o processo de ensino aprendizagem”.

Utilizando a sequência didática o professor poderá formar um espaço de conteúdos que melhor se adequem ao aprendizado do aluno naquele momento e naquela situação.

Na concepção de Kato (2010), o autor considera que a aprendizagem de novos conceitos matemáticos se solidifica mais ligeiramente quando se inicia pela apresentação de uma situação problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a último passo da aprendizagem. O conteúdo matemático abordado por meio de Modelagem e Investigações são desencadeadas no decorrer das atividades juntamente com a sua formalização o qual está sendo uma etapa posterior a sua utilização. Isso permite que à medida que o aluno busca ferramentas para resolver a situação problema, ele mobilize conhecimentos já adquiridos e perceba que novos conteúdos se fazem necessários.

MATERIAL E MÉTODOS

A sequência didática foi organizada em três blocos de atividades, utilizando a abordagem metodológica adotada, de acordo com um foco principal estabelecido. Esta etapa foi realizada em uma escola pública na cidade de Belém, Pará nos meses de

fevereiro e março de 2018, nas turmas do 2º ano do Ensino Médio, totalizando 34 alunos envolvidos.

Cada bloco é composto por um número específico de atividades, na forma de atividades em sala de aula e atividades complementares para casa, a serem resolvidas de forma individual ou em duplas.

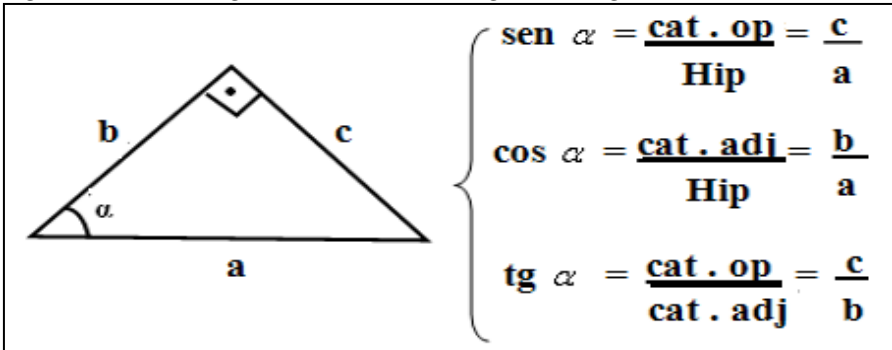
No Bloco 1, temos duas Atividades Preparatórias em sala. No Bloco 2, temos 5 atividades: três em sala, e duas para reflexão e entrega no próximo encontro. No Bloco 3, temos 4 atividades: Três Atividade em sala e uma Atividade Complementar para entregar e discutir com o grupo no próximo encontro.

As Atividades em sala de aula objetivam estimular os estudantes a se apropriar de conhecimentos prévios a fim de resolver os exercícios propostos. As atividades, a serem resolvidas em casa, tem por finalidade adquirir conhecimentos prévios dos alunos, afixar conceitos cultivados em sala de aula e dar início a padronização de conceitos.

O bloco 1, pretende resgatar conceitos como: Teorema de Pitágoras e triângulos, sendo composta por duas Atividades Preparatórias X e Y, a serem resolvidas em sala, no qual se inicia a apresentação de conceitos, administrado pelo professor.

O bloco 2 de atividades se referiu à Trigonometria no triângulo retângulo. Conta com atividades que foram realizadas em grupos, associando a alturas de um prédio, considerando a escola como um exemplo prático, utilizando alguns materiais concretos como trenas e transferidor, o que os remete a origem dessa noção trigonométrica. O bloco 2 foi dada a noção de razão trigonométrica e a associação aos ângulos como também a indicação dos ângulos básicos aos quais trabalhamos, o de 30º, 45º e 60º. Neste bloco é proposto inúmeros triângulos a fim de o aluno associar a ideia de razão trigonométrica, de acordo com a Figura 1, abaixo:

Figura 1: Razões trigonométricas no triângulo retângulo.



Fonte: Os autores.

No bloco 2 foi realizada 5 atividades. Neste bloco foi formalizado a definição das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e exploração destas relações em triângulos variados, em posições diversas, como também as relações fundamentais na trigonometria. Apresentação de todas as funções circulares, seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente. É apresentada a representação e definição no ciclo trigonométrico, como também a redução ao 1º quadrante como também simetria das funções circulares. Segue o exemplo (Figura 2):

Figura 2: Exemplificação das atividades proposta no bloco 02.

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| <p>Complete as lacunas de acordo com a figura abaixo:</p> | <p>Complete as lacunas de acordo com a figura abaixo:</p> |
| <p>Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30° mede _____. O cateto adjacente a</p> | <p>Nesta figura, o cateto oposto ao ângulo de 30° mede _____. O cateto</p> |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| este ângulo mede _____ e a hipotenusa mede _____. | adjacente a este ângulo mede _____ e a hipotenusa mede _____. |
| A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração _____ | A razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa pode ser representada através da fração _____ |
| A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30° pode ser representado através da fração _____ | A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo de 30° pode ser representado através da fração _____ |

Fonte: INEP.

A exemplo da exposição das funções com os respectivos sinais, temos, Figura 3:

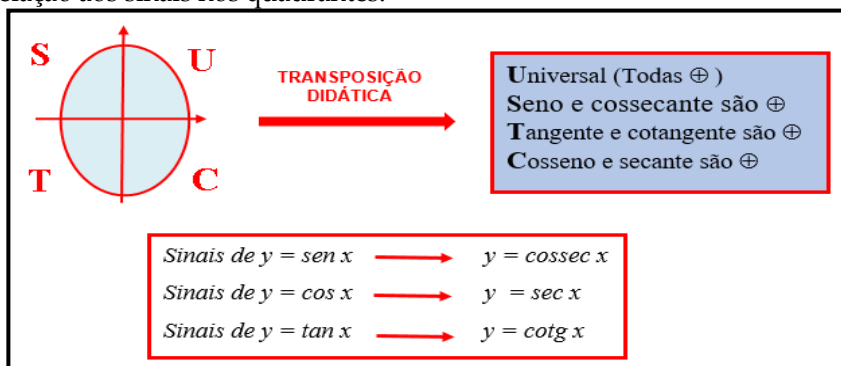
1º Quadrante: todas as funções são positivas. (Universal)

2º Quadrante: Somente a função seno e cossecante são positivas

3º Quadrante: Somente a função tangente e cotangente são positivas

4º Quadrante: Somente a função cosseno e secante são positivas

Figura 3: Figura representativa das transformações trigonométricas com relação aos sinais nos quadrantes.



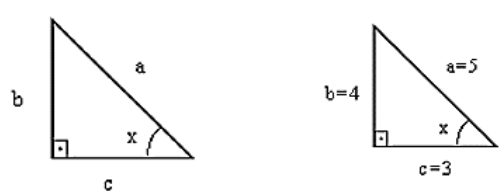
Fonte: Os autores.

Com relação ao bloco 3 foi realizada a fixação das relações de complemento, suplemento e replemento entre ângulos e seus reflexos sobre os valores das funções circulares num mesmo quadrante; além de atividades que ilustram o método geométrico comparativamente com o método algébrico, mostrando ao aluno a vantagem do uso do triângulo retângulo nas resoluções de questões propostas.

Na Figura 4, segue um exemplo de aplicação:

Figura 4: Figura representativa a respeito da utilização do processo geométrico. Atividades realizadas no bloco 03.

1) Dado $\text{sen } x = 4/5$ e $x \in$ ao 1° Quadrante, determine todas as funções circulares:



| | | | |
|------------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $\text{sen } x = \frac{\text{cat.op.}}{\text{hip.}}$ | $\cos x = \frac{3}{5}$ | $\tan x = \frac{4}{3}$ | $\text{sen } x = 4/5$ |
| $\text{sen } x = \frac{4}{5}$ | $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{5}{3}$ | $\text{cotg } x = \frac{1}{\tan x} = \frac{3}{4}$ | $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{5}{4}$ |
| $a = 5, b = 4, c = ?$ | | | |
| $5^2 = c^2 + 4^2, \text{ logo}$ | | | |
| $c = 3$ | | | |

Fonte: Os autores.

Com relação a este bloco foi proposta três atividades, seguindo o modelo da Figura 4, acima, a fim de propor ao aluno a associação rápida ao triângulo retângulo, como também alocando o arco pertencendo ao 2° , 3° e 4° quadrantes e toda a interpretação analítica do sinal, quando esta função não pertence ao 1° quadrante.

Além desta proposta foi realizada comparativamente a este exemplo proposto o método algébrico, ou seja, a forma tradicional de se obter todas as funções circulares solicitadas no exercício proposto, Figura 5:

Figura 5. Figura representativa a respeito da utilização do processo algébrico.

Comparação ao processo algébrico normal:

$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 \Rightarrow$ RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA FUNDAMENTAL

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \text{cos}^2 x = 1$$

$$\frac{16}{25} + \text{cos}^2 x = 1$$

$$\text{cos}^2 x = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\text{cos}^2 x = \frac{1.25 - 16}{25}$$

$$\text{cos}^2 x = \frac{9}{25}$$

$$\text{cos} x = \pm \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\text{cos} x = \pm \frac{3}{5}$$

$\text{cos} x = + \frac{3}{5}$ (Pois o arco é do 1º quadrante)

A partir daí partimos para as outras funções trigonométricas:

$$\text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x}$$

$$\text{tg} x = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{sec} x = \frac{1}{\text{cos} x} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$

$$\text{cosec} x = \frac{1}{\text{sen} x} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4}$$

$$\text{cotg} x = \frac{1}{\text{tg} x} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}$$

Fonte: Os autores.

Utilizando o processo geométrico sentimos a leveza dos cálculos e a facilidade em que chegamos a outras funções. É preciso

tomar cuidado com relação a posição do arco nos quadrantes e analisar perfeitamente o sinal.

Como podemos perceber quando usamos o método geométrico ao invés do algébrico. Por esta maneira a relação trigonometria fundamental em alguns casos, fica dispensada.

A proposta da atividade complementar foi utilizando um exemplo literal e foi considerada a hipótese da entrega no próximo encontro, aula seguinte que nesta pesquisa calhou para outra semana. Esse intervalo de aproximadamente 7 dias, propiciou a reflexão dos conceitos adquiridos e a percepção que para o emprego literal, com constantes aleatórias o raciocínio não modificava o que concomitou com um aprendizado comum e não esperado.

Com a entrega do material complementar muitos alunos comentaram que só foram entender o conteúdo quando teve que fazer a atividade, tendo que revisar o que foi dado em sala, no grupo geral, para posterior conclusão.

Outro exemplo, literal, Figura 6:

Figura 6: Atividade complementar proposta. Primeira etapa, associação ao triângulo retângulo.

2) Dado $\operatorname{sen} x = \frac{1}{k^2 + 1}$ determine a soma das funções circulares $\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg}^2 x$ sendo "x" em arco do 1º quadrante.

Solução: Processo Geométrico


$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{k^2 + 1}$$

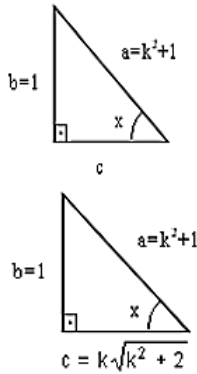
$$(k^2 + 1)^2 = 1 + c^2$$

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 1 + c^2$$

$$c^2 = k^4 + 2k^2$$

$$c = \sqrt{k^4 + 2k^2}$$





Fonte: Os autores.

A seguir temos o processo algébrico, Figura 7, com a utilização da relação trigonométrica fundamental. É perceptível o volume exacerbado de contas algébricas afim de se chegar ao resultado. O aluno tem que ter um Excelente desenvolvimento aprendido de regras e contas algébricas a fim de dar suporte das contas apresentadas. Nesta etapa apenas é utilizada apenas a relação fundamental.

Figura 7: Atividade complementar proposta. Segunda etapa, cálculo das razões trigonométricas e resposta ao item.

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\begin{aligned} \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x &= 1 \Rightarrow \\ \left(\frac{1}{k^2 + 1} \right)^2 + \text{cos}^2 x &= 1 \\ \frac{1}{(k^2 + 1)^2} + \text{cos}^2 x &= 1 \\ \text{cos}^2 x &= 1 - \frac{1}{(k^2 + 1)^2} \\ \text{cos}^2 x &= \frac{1 \cdot (k^2 + 1)^2 - 1}{(k^2 + 1)^2} \\ \text{cos}^2 x &= \frac{k^4 + 2k^2 + 1 - 1}{(k^2 + 1)^2} \\ \text{cos } x &= \pm \sqrt{\frac{k^4 + 2k^2}{(k^2 + 1)^2}} \\ \text{cos } x &= \pm \frac{\sqrt{k^2(k^2 + 2)}}{k^2 + 1} \\ \text{cos } x &= + \frac{k \cdot \sqrt{k^2 + 2}}{k^2 + 1} \text{ (Pois 0 arco é do 1º quadrante)} \end{aligned}$ | <p>Relação Trigonométrica Fundamental</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|

Fonte: Os autores.

Na seqüência, na Figura 8 é calculada as razões trigonométricas a partir do resultado proposto na relação trigonométrica fundamental. A partir do cálculo das razões trigonométricas é possível responder o item proposto.

É notório o volume dos cálculos algébricos no desenvolvimento da questão, tendo em vista a dimensão que assume em face das divisões e multiplicações geradas a partir das definições e simplificações necessárias.

Alguns alunos ao fazerem esta atividade complementar, relataram que sabiam o conceito, mas não conseguiam desenvolver a parte algébrica do problema, não sabiam quando era para simplificar ou até mesmo racionalizar o denominador.

Figura 8: Atividade complementar proposta. Segunda etapa, cálculo das razões trigonométricas e resposta ao item

Agora vamos ao sinal $x \in$ ao 1° Q .

Observando os sinais da questão anterior obtemos:

$$\cos x = \frac{k\sqrt{k^2+2}}{k^2+1}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{k^2+1}{1} = k^2+1$$

$$\tan x = \frac{1}{k\sqrt{k^2+2}}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\tan x} = \frac{k\sqrt{k^2+2}}{1} = k\sqrt{k^2+2}$$

$\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg}^2 x$

$$k^2+1 + (k\sqrt{k^2+2})^2$$

$$k^2+1 + k^2(k^2+2)$$

$$k^2+1 + k^4 + 2k^2$$

$$k^4 + 3k^2 + 1$$

Fonte: Os autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos observar que mesmo nos problemas algébricos a solução utilizando o método geométrico é bem mais simples do que a solução algébrica. No processo normal algébrico, ficaríamos com

inúmeras simplificações que poderiam sem dúvida confundir o aluno e deixar a questão para traz sem resolvê-la, pois, irá tomar muito trabalho e tempo.

Foi proposto esta sequência didática para a resolução simples de funções trigonométricas associadas ao primeiro e aos demais quadrantes do ciclo trigonométrico, associando também ao sinal correspondente, propiciando o aluno raciocinar e pensar principalmente a problemática do emprego do sinal a ser utilizado.

A simplicidade da proposta através do Ensino por Atividades, transforma o conceito da trigonometria, fazendo com que o aluno disponha da aplicação da técnica proposta por triângulo retângulo como uma ferramenta fundamental durante a resolução das questões.

REFERÊNCIAS

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique: dusavoirsavantausavoirensigné**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

CABRAL, Natanael Freitas. **Sequencias didáticas: estrutura e elaboração**. Belém PA: SBEM/PA, 2017.

CONTRERAS, José. **Autonomia de professores**. São Paulo: Cortez, 2002.

DIAS, Gustavo Nogueira. **Práticas do Ensino da Matemática: A Realidade da Sala de Aula** – Edição Independente. Belém, 2011.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**, v. 4, Ed. Atual 1993.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**, v. 4, Ed. Atual 2013.

INEP. **Matemática e suas Tecnologias**. Livro do estudante, 2ª ed. Brasília: MEC: INEP, 2006.

KATO, Lílian Akemi. **Situações matemáticas sob o olhar da modelagem matemática, resolução de problemas e investigação**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, 2010, Salvador. Anais... Salvador, 2010.

OLIVEIRA, Maria Marly. **Sequência Didática Interativa no Processo de Formação de Professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

CAPÍTULO 10

Princípio da Casa dos Pombos

Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior

Gustavo Nogueira Dias

Wagner Davy Lucas Barreto

Pedro Franco de Sá

José Carlos Barros de Souza Junior

Vanessa Mayara Pamplona

Carlos Alberto Nobre da Silva

INTRODUÇÃO

A todo o momento somos submetidos a problemas que muito nos intriga por não saber a qual mecanismos recorrer para desenvolver uma resposta lógica. Embora tal questão seja passível de solução, parece impossível respondê-la de forma simples e direta.

Físicos e Matemáticos dedicaram suas vidas a estudos em busca de soluções a problemas até mesmo corriqueiros de nosso dia a dia. Publicaram obras preciosas que fundamentam o ensino da matemática.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet contribuiu com vários ramos da matemática. Uma de suas contribuições foi titulada como: “*O Princípio da Casa dos Pombos*” objeto facilitador que faz referência a Análise Combinatória para com a resolução de questões problemas matemáticos.

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. (MORGADO, 2006, p.02).

Este presente trabalho tem como objetivo dispor da biografia de Dirichlet expor suas contribuições, a fim de facilitar no entendimento da matemática, propondo o uso de recursos que facilitam na resolução de vários problemas elaborados e resolvidos

O Princípio da Casa dos Pombos é usado para obtenção de respostas simples a problemas matemáticos apresentados. Enquanto algumas questões, por exemplo, em solução a problemas característicos em Análise Combinatória utilizamos como método um princípio de contagem para saber de quantas maneiras podemos realizar certa escolha, outras por sua vez, não dispõem de ideias que possam ser utilizadas sistematicamente em resposta ao fato de dar a alguém a certeza da ocorrência ou não de determinada situação. (MUNIZ NETO, 2012, p.131).

Vejamos algumas situações que mostram que esta ferramenta não é um princípio de contagem e sim de condição de existência, é simples e intuitiva podendo parecer que tem pouca aplicabilidade, mas é necessário que tenhamos configurações que a primeira vista pode ser ou não fácil de determinar, como: quem são as casas e quem são os pombos?

A revista Cálculo I (FERREIRA, 2011, p.31) apresenta questões que condicionam a aplicação do “Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet”. Vejamos algumas em exemplos:

a) Ao Imaginar um monte de meias, todas misturadas em cima de uma cama, sendo seis pares de cor branca, quatro de cor cinza, dois de cor preta, três de amarela, dois de verde e um par de meias vermelhas. Podemos pegar no escuro quantas meias quisermos e voltar para sala vestindo um par de meias que seja da mesma cor. Qual o menor número de meias que precisamos pegar para garantir que tenhamos um par de meias da mesma cor?

O Princípio da Casa dos Pombos nos garante que para n casas sempre haverá $n + 2$ pombos, portanto não importa o valor atribuído à n , sempre teremos dois pombos em pelo menos uma casa. Observe que não importa a quantidade de pares que podemos formar com cada cor e sim quantas cores diferentes nós temos. Então, pensando nos seis tipos de cores de meias como casas e, no número de retiradas de meias como quantidade de pombos. Pode-se afirmar que ao tirar 07 meias no escuro pelo menos uma delas terá cor igual. Na melhor das hipóteses poderemos tirar 02 meias da mesma cor. Na pior das hipóteses as seis primeiras meias poderão ser de cores diferentes. Como todas as cores foram retiradas, em uma próxima, obteremos um par de meias da mesma cor. Portanto a resposta do problema é 07.

b) Considerando 13 pessoas. Qual número mínimo para que com certeza absoluta, pelo menos duas delas faça aniversário no mesmo mês?

Sendo $t = 13 > n = 12$ suponha que cada uma das 13 pessoas tenha nascido em meses consecutivos. Então teremos $t = 2$ pombos na última das n casas, isto é, se temos que agasalhar t pombos em n casas sabendo que $t > n$ então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo.

Ao supor que não há casas com 2 ou mais pombos, ou seja, se em cada casa contiver no máximo 1 pombo teremos uma contradição pois, se existem 13 pombos e 12 casas, uma das casas conterà mais de um pombo. Logo t há de ser maior que n para que satisfaça as condições do problema.

c) Imagine um quadrado de duas unidades por duas unidades no qual devemos colocar cinco pontos.

Esta é uma questão que caracteriza uma versão geométrica que permite a aplicabilidade do Princípio de Dirichlet como condição existencial. Dividindo um quadrado na vertical e na horizontal formaremos quatro quadradinhos de um por um, considerando os 5 pontos como pombos que serão distribuídos entre os quadradinhos que chamaremos de casas assim teremos sempre em um deles pelo

menos dois pombos. Podemos provar o resultado obtido na questão sobre o número de n casas por indução matemática. Supondo que em cada quadrado contenha apenas um pombo, ou seja, que não há casa com pelo menos dois ou mais pombos; logo teríamos uma contradição, pois existem $t = 5 > n = 4$ casas.

Amorim (2013, p.22) apresenta situações problemas relacionando o Princípio estudado com questões referentes a outros conteúdos:

i) Aritmética: Prove que, dados 11 números quaisquer, a diferença entre dois deles será um múltiplo de 10.

Se ao dividir n números inteiros obtivermos o mesmo resto na divisão por 10, então a diferença entre eles será seu múltiplo. Pelo Princípio da Casa dos Pombos n será igual ao número de casas que corresponderá aos 10 restos possíveis na divisão e pombos os 11 números inteiros disponíveis. Logo dois desses números terão dois restos iguais na divisão por dez, assim teremos como diferença entre eles um múltiplo de dez.

ii) Análise Combinatória: Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos 3 deles preencham o cartão resposta com exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Visto que cada questão do concurso consta de uma sequência $(n_1, n_2, \dots, n_{10})$; em que cada n_1 corresponde $\{a, b, c, d, e\}$ alternativas. Além disso:

$$\begin{aligned}
n_1 \in N_1 &= \{a, b, c, d, e\}, \\
n_2 \in N_2 &= \{a, b, c, d, e\} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
n_{10} \in N_{10} &= \{a, b, c, d, e\}
\end{aligned}$$

Então pelo princípio fundamental da contagem haverá $5 \times 5 \times \dots \times 5 = 5^{10}$ maneiras de preencher o cartão resposta. Adaptando o uso do Princípio da Casa dos Pombos às condições apresentadas; tomemos como *casa* o gabarito e como *pombos* os candidatos. Entretanto se tivermos 2×5^{10} candidatos, não teremos como suscitar que mais de dois candidatos preencheram exatamente as mesmas questões no cartão resposta, mas se tivermos $2 \times 5^{10} + 1$ candidatos, tal condição satisfará a questão proposta, pois teremos o número de *casas* maior que o dobro do número de *pombos*. Logo poderemos corroborar que pelo menos três candidatos preencheram o cartão resposta com as mesmas respostas para todas as questões.

iii) Geometria Analítica: Sejam 5 pontos do plano com coordenadas inteiras. Mostre que pelo menos um par de pontos tem ponto médio com coordenadas inteiras.

Dados dois números inteiros pares ou ímpares num plano $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ com ponto médio $M = \left(\frac{x_a+y_a}{2}, \frac{x_b+y_b}{2}\right)$; em análise a um dos pontos com coordenadas inteiras encontraremos:

$$(PAR, PAR), (PAR, ÍMPAR), (ÍMPAR, PAR), (ÍMPAR, ÍMPAR)$$

Escolhendo cinco pontos do plano dois deles terão coordenadas iguais e conseqüentemente seu ponto médio terá coordenadas inteiras. Então pelo Princípio da Casa dos Pombos, consideraremos as coordenadas como casas e os pontos como pombos. Logo para cinco coordenadas (casas) teremos dois pontos (pombos) na mesma casa.

DEMONSTRAÇÃO DO PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Devido a necessidade de se ter certeza da ocorrência de determinada situação em Análise Combinatória, que não dispõem de técnicas sistemáticas de contagem para ser solucionada. Iniciaremos o estudo as demonstrações sobre o Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Segundo Aguiar (2013, p. 20) o teorema a seguir poderá ser demonstrado da seguinte forma:

Teorema 01: Se em n casas serão colocados $n + 1$ pombos, logo o número de casas é menor que o número de pombos, então uma casa deverá conter dois pombos.

Demonstração:

(Por absurdo) Se cada uma das casas contiver, no máximo, 01 (um) pombo, o número total de pombos nelas colocados será, no máximo, n , o que é uma contradição.

Aguiar (2013, p. 23) apresenta a seguinte teorema: 02 (Princípio Geral da Casa Dos Pombos). Se colocarmos em n casas t pombos pelo menos uma casa conterá $\left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor + 1$ pombos.

Demonstração: Como $\left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor \leq \frac{t-1}{n}$, se cada casa contiver no máximo $\left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor$ pombos, então no máximo teremos $n \left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor$ pombos no total, porém $n \left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor \leq \frac{t-1}{n} = t - 1 < t$; logo temos uma contradição.

Veremos um teorema que foi extraído de Muniz Neto (2012, p.137).

Teorema 03: leva a considerações uma sequência de $n^2 + 1$ reais diferentes; se disporo a prova que podemos encontrar uma subsequência crescente ou não de $n + 1$ termos.

Demonstração: Dado um conjunto $A = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_{n^2+1}\}$ de $n + 1$ termos de uma sequência que hipoteticamente abstrai termos imediatos crescentes de no mínimo $n + 1$. Então para toda subsequência crescente de início em $x \in A$ há no máximo n termos. Com $f: A \rightarrow \{1; 2; \dots; n\}$. Sendo $f(x) = A$ medida superior da crescente subsequência dada na sequência. Com início x . Com $A =$

$n^2 + 1$ elementos, usando o Princípio da Casa dos Pombos temos ao menos $\left\lfloor \frac{(n^2+1)}{n} \right\rfloor + 1 = n + 1$ elementos de A com igual imagem. Sendo $x_1; x_2; x_3; \dots; x_{n^2+1}$; com $i^1 < i^2 < \dots < i_{n+1}$. Se para $1 \leq j < l \leq n + 1$; tivermos $x_{ij} < x_{il}$. Com $f(x_{ij}) > f(x_{il})$. Podendo aumentar a crescente sequência de início x_{il} considerando x_{ij} antes. Consequentemente identificaremos um absurdo, pois $x_{i1} > x_{i2} > \dots > x_{in+1}$. Logo a sequência de $n + 1$ termos é decrescente.

Santos, Mello e Murari (1995, p.213) apresentam uma generalização do Princípio da Casa dos Pombos por meio do seguinte teorema.

Teorema 04: Havendo n casas ocupadas por $nt + 1$ pombos, então pelo menos uma casa deverá conter $t + 1$ pombo.

Demonstração: Suponha que para $t + 1$ pombos temos $n = \{x_1, x_2, x_4, \dots, x_n\}$ casas para agasalhá-los. Ao distribuírmos cada um dos pombos em particular ao número de casas, ficará um pombo para o lado de fora, mas se colocarmos o pombo que sobrou em uma das x_n casas já ocupadas com seus respectivos pombos, teremos $x_n = nt + 1$ pombos abrigados, portanto para satisfazer as condições de existência do teorema o número de pombos terá que ser $t + 1$ ao número de casas; pois, se t for igual a x_n teremos, no máximo um pombo para cada casa, que é uma contradição.

A revista do Professor de matemática-RPM/ Estágio OBMP (AUGUSTO, 2007 p. 77). Apresenta uma formulação possível para o Princípio da casa dos Pombos. Vejamos a seguir;

Teorema 05: Seja n o número de gavetas e r um dado número inteiro positivo se agasalharmos a_1 na primeira gaveta, a_2 na segunda gaveta, a_3 na terceira gaveta e assim sucessivamente até a n -ésima gaveta. Visto que se média $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n/n$ for maior que $r - 1$, uma das n gavetas conterà no mínimo r objetos.

Demonstração: Suponha que todos os a_i sejam menores que r , ou seja:

$a_1 \leq r - 1$; $a_2 \leq r - 1$; ...; $a_n \leq r - 1$. Então; $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq nr - n = n(r - 1)$, que implica $a_1 + a_2 + \dots + \frac{a_n}{n} \leq r - 1$, logo temos uma contradição.

Embora o teorema apresentado possa ser visto tão somente como uma propriedade simples da média, ou seja, não fazer referência a objetos e gavetas. Visto que se $a_1 \leq r - 1$; $a_2 \leq r - 1$; ...; $a_n > r - 1$, então um deles deverá ser maior do que ou igual a r . Por dedução ao Princípio da Casa dos Pombos poderemos concluir que se tivermos n objetos distribuídos entre $(n - 1)$ gavetas, então a média $n/(n - 1)$ certamente será maior que 1. Portanto seja $r = 2$, teremos pelo menos dois objetos em cada gaveta.

METODOLOGIA

Esta sessão apresenta alguns exemplos de situações que podem envolver a aplicação do Teorema de Dirichlet; Princípio da Casa dos Pombos em resoluções de problemas.

Exemplo 01: (MORGADO et al.,2006) Em uma gaveta, há 12 meias brancas e 12 meias pretas. Quantas meias deverão ser retiradas, ao acaso, para termos certeza de obtermos um par de meias da mesma cor?

Solução: Suponhamos que ao tirarmos a primeira meia sendo preta, então na segunda tentativa a meia poderá ser preta ou branca. Se a meia tirada for branca, precisaremos de mais uma retirada que será a última, visto que já temos uma meia de cada cor, e que existe apenas meias brancas e pretas na gaveta. Portanto, independentemente de a próxima meia ser branca ou preta, teremos um par de meias da mesma cor; logo será preciso 3 tentativas ao acaso para ser obter dentre as 24 meias sendo 12 brancas e 12 pretas, um par com a mesma cor, isto é, tomemos como casas as 2 cores de meias disponíveis e t o número de pombos que expressa a quantidade mínima de retirada de meias para que tenhamos certeza de ter um par da mesma cor) igual a 2 que indica o par de meias. Logo dados os 12 objetos para serem guardados em 2 gavetas existirá uma gaveta com pelo menos 3 objetos em cada gaveta.

Exemplo 02: (MUNIZ NETO, 2012) Prove que, em qualquer grupo de 20 pessoas, há ao menos três que nasceram no mesmo dia da Semana.

Solução: Distribuindo o número de pessoas que é 20 entre os 7 dias da semana teremos uma suposta quantidade de pessoas que fazem aniversário no mesmo dia. Isto é: De Domingo a Sexta-feira podemos supor que três pessoas nasceram em todos os dias corridos e no Sábado podemos dizer que nasceu apenas duas pessoas, isto é, $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 20$. Logo podemos em observação afirmar que pelo menos três pessoas no mínimo nasceram no mesmo dia da semana.

Usando o recurso da matemática em estudo, tomemos como gaiolas os 7 dias da semana e as 20 pessoas como quantidade de pombos. Vamos associar cada uma das 20 pessoas aos 7 dias da semana; considerando o dia de seu nascimento. O Princípio nos garante que ao menos um dia da semana conterà, $\left\lfloor \frac{20-1}{7} \right\rfloor + 1 = 3$ pessoas. Logo o número de dias é menor que o número de pessoas então 3 pessoas nasceram no mesmo dia da semana.

Exemplo 03: (SANTOS et al., 1995) Quantas pessoas no mínimo deverão ter em um grupo para que possamos garantir a existência de pelo menos duas tendo nomes que começam com a mesma letra? (considere o alfabeto com 26 letras).

Solução: Para que possamos ter no mínimo duas pessoas que tenham as mesmas letras iniciais de seus nomes, levemos em consideração as 26 letras do alfabeto e as distribuímos entre 27 pessoas, pois ao associarmos cada letra a sua respectiva pessoa sobrar uma que por sua vez se repetirá.

Pelo Princípio em estudo ao considerarmos a sequência de 26 letras diferentes do alfabeto mais uma, teremos o que o exercício propõe, isto é; se chamarmos t letras do alfabeto de casas e $t + 1$ de pombos. Então, em 26 casas serão colocados $26 + 1$ pombos logo $t < t + 1$, ou seja, uma casa deverá conter dois pombos.

Exemplo 04: (MORGADO et al., 2006) suponha que as notas possíveis são conceitos A, B, C, D e F. Qual o número mínimo de estudante para que pelo menos 5 tenham conceito igual?

Solução: Levando em consideração que o número de conceitos é 5 podemos distribuí-los, repetindo-os respectivamente a uma

certa quantidade n de alunos até que pelo menos 5 tenham o mesmo conceito. Então, para cada 5 conceitos distintos teremos 4 alunos com um deles contendo 1 a mais, isto é, o conceito A terá 5 alunos, B 4 alunos, C 4 alunos, D 4 alunos e F 4 alunos. Logo teremos: $n = 5 + 4 + 4 + 4 + 4 = 21$.

Pelo Princípio da Casa dos Pombos vamos considerar como número de casas as $n = 5$ possibilidades e $nt + 1$ o número de pombos, pois se cada uma contiver no máximo t pombos. Então pelo menos uma casa conterá $t + 1$ pombo. Logo, $5 \times 4 + 1 = 20 + 1 = 21$ alunos.

Exemplo 05: (MORGADO et al.,2006) 63.127 candidatos compareceram a uma prova do vestibular (25 questões eram de múltipla- escolha com 5 alternativas por questão). Considere a afirmação: “Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova”. Qual é o maior valor de k para qual podemos garantir que a afirmação acima é verdadeira?

Solução: Havendo 5 modos para responder a primeira questão. Então, temos $5^2 = 25$ modos para responder as duas primeiras questões; $5^3 = 125$ modos para responder as três primeiras questões; $5^4 = 625$ modos para responder as quatro primeiras questões; $5^5 = 3.125$ modos para resolver as cinco primeiras questões; $5^6 = 15.625$ modos de responder as seis primeiras questões; $5^7 = 78.125$ modos de responder as sete primeiras questões. Ao considerarmos o número de candidatos como pombos e os modos de responder como casas. Então o valor de $k = 6$, isto é, tendo em vista o princípio existencial do teorema em estudo que se caracteriza por expor que para t casas sempre haverá $t + 1$ pombos. Assim, provando que não importa o valor atribuído a n sempre haverá 2 pombos em uma das casas. Contudo, suponhamos $k - 1$ (número de candidatos) seja os pombos e o número de casas seja 5 que corresponde ao número de alternativas disponíveis em cada questão, igual a 2 que representa o candidato que respondeu as k primeiras questões de modo idêntico, logo temos: 5 gavetas para agasalhar k objetos ou seja: $k = 6$

Exemplo 06: (MORGADO et al.,2006) Qual o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês?

Solução: Suponha que 49 pessoas serão distribuídas analogamente em 12 meses. Teremos 4 pessoas para cada mês. Observe que com o nascimento de mais uma pessoa, teremos: $11 \times 4 + 5 = 49$, ou seja, havendo um grupo de $n + 1 = 49$ pombos e n correspondente a 12 casas igual a 5 pessoas nascidas no mesmo mês satisfaremos as condições do problema. Isto é, se considerarmos $n = 12$ meses do ano estando às casas ocupadas por $nk + 1 = 12 \times 4 + 1 = 49$ pombos; então, pelo menos uma casa deverá conter $k + 1 = 4 + 1 = 5$. Não podendo garantir a existência das cinco pessoas nascidas no mesmo mês. Logo o grupo é formado por 48 pessoas das quais nasceram 4 em janeiro, 4 em fevereiro; ...; 4 em dezembro. Então o mínimo de pessoas que deve haver no grupo é de 49.

Exemplo 07: (MORGADO et al.,2006) Mostre que se escolhermos 800 pontos dentro de um cubo de aresta igual a 10, pelo menos um dos segmentos determinados por esses pontos tem comprimento menor que 2.

Solução: Sabendo que a aresta do cubo é 10, então seu volume é $V = 10^3 = 1000$. Podemos dividir o cubo em 729 cubinhos e assim encontrar x . Se $729x = 1000$ então, $x = 1000/729$ é o valor volume de cada cubinho. Logo $x = \sqrt[3]{\frac{1000}{729}}$ será o valor da aresta de cada cubo pequeno, ou seja, $x = \frac{10}{9}$. Consideremos que cada cubinho contenha apenas um ponto. Dessa forma a distância máxima entre eles será a diagonal maior $D = a\sqrt{3} \leftrightarrow D = \frac{10}{9}\sqrt{3}$ que é menor do que 2. Porém, queremos colocar 800 pontos no cubo grande, ao dividir o cubo maior em $9^3 = 729$ cubinhos de lado $\frac{10}{9} cm$ cada, considerando-os como casa dos pombos o princípio da casa dos pombos nos dá a garantia de que os 71 pontos restantes estarão dispostos pelo menos junto com outro ponto em um cubinho. Assim, a distância entre eles certamente será menor que dois.

Exemplo 08: (MORGADO et al.,2006) Um ponto (x, y, z) do R^3 se todas suas coordenadas são inteiras.

a) Considere um conjunto de nove pontos inteiros do R^3 . Mostre que o ponto médio de alguns dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.

Solução: Sabendo que as coordenadas do ponto médio de um segmento são médias aritmética das coordenadas dos extremos. Ao agruparmos três pontos conforme suas coordenadas sejam pares ou ímpares, será possível observar que se tivermos dois extremos inteiros de mesma paridade consequentemente a média aritmética também será inteira. Considerando 8 gavetas sendo 9 um inteiro positivo. Ao colocarmos na primeira gaveta a_1 (3 pontos com todas suas coordenadas inteiras), na segunda a_2 pontos e assim sucessivamente. Se $r - 1$ for menor que a média $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ então, uma das gavetas vai conter ao menos 2 pontos, mas se a quantidade de pontos for menor que $r - 1$, teremos uma contradição pois,

$$a_1 + a_2 \dots + a_n \leq n(r - 1). \text{ Então consequentemente teremos}$$

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \leq r - 1 .$$

b) De um exemplo de um conjunto de 8 pontos inteiros do R^3 tais que nenhum dos pontos médios dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.

Solução: Se as coordenadas de oito pontos estiverem de forma:

$$(P, P, P); (I, P, P); (P, I, P); (P, P, I); (I, I, P); (I, P, I); (P, I, I); (I, I, I);$$

ao calcularmos o ponto médio de qualquer um dos pontos e verificar todas as coordenadas perceberemos que o ponto médio dos pontos que foram dados não pertence ao conjunto dos inteiros. Perceba que $(p + i) / 2$ não pertencem aos inteiros. Então $(P, P, P); (I, P, P);$ quando calculados o seu ponto médio verificaremos que a primeira entrada não será um número inteiro. Logo o ponto não será inteiro. Vejamos: Se $P = (a, b, c)$ e $Q = (x, y, z)$ então o ponto médio é dado por $M = (r, s, t)$ onde $r = (a + b) / 2; s = (b + y) / 2$ e $t = (c + z) / 2.$

Exemplo 09: (MORGADO et al.,2006) Mostre que em todo $(n + 1)$ subconjunto de $\{1, 2, \dots, 2n\}$ há um par de elementos tais que um deles divide o outro.

Solução: Seja $n = 2^t b$ qualquer número inteiro do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ com b igual a um dos números ímpares $1; 3; \dots; 2n - 1$. Ao escolher n_1 e n_2 números em $\{1, 2, \dots, 2n\}$ que tenham suas partes ímpares iguais então $n_1 = 2^{t_1} b$ e $n_2 = 2^{t_2} b$ com $\frac{n_2}{n_1} = \frac{(2^{t_2} b)}{(2^{t_1} b)} = 2^{t_2 - t_1}$ sendo $t_2 - t_1 > 0$ e n_2 dividirá n_1 se $t_1 \leq t_2$. Aplicando o Princípio da Casa dos Pombos, tomemos os n valores de $b \in (1; 3; \dots; 2n - 1)$ como casas para $n = 2^t b$; e $(n + 1)$ números escolhidos em $\{1, 2, \dots, 2n\}$ como pombos, assim associando cada número a sua parte ímpar, haverá no mínimo dois números com o mesmo valor.

Exemplo 10: (MORGADO et al.,2006) Prove que todo número natural tem um múltiplo que se escreve, na base 10, apenas com os algarismos 0 e 1.

Solução: Dados n números $1, 11, 111 \dots$ e dividindo-os por n algarismos observe que se na divisão obtivermos 0 como resto, podemos concluir que o mesmo tem um múltiplo que se escreve na base 10 apenas com o algarismo 1. Mas se nenhum resto for igual a 0, então só poderão ser iguais a $1, 2, \dots, n - 1$. Considerando os números como objetos e nos restos como $n - 1$ gavetas então a diferença entre esses números será um múltiplo de n que se escreve na base 10, apenas com os algarismos 0 e 1.

Exemplo 11: (MORGADO et al.,2006) Prove que em qualquer conjunto de 52 inteiros existe um par de inteiros cuja soma ou diferença é divisível por 100.

Solução: O Princípio da Casa dos Pombos nos garante que para n casas temos $n + 1$ pombo. Então, ao considerarmos 52 números como pombos e distribuí-los em 51 casas, garantimos que uma das casas haverá pelo menos dois pombos. Na primeira casa podemos atribuir os números que divididos por 100 dão resto 0; na segunda os que dão resto 1 e 99; na terceira os que dão resto 2 e 98; na quarta os que dão resto 3 e 97;...; na quinquagésima os que dão resto 49 e 51; na última casa, os que dão 50. Usando o Princípio teremos dois

números na mesma casa. Supondo que na primeira casa tenhamos o número 100 e na última esteja o número 150. Então, soma e a diferença deles será divisível por 100. Pois, $100 + 150 = 250 \div 100 = 2,5$ e $100 - 150 = 50 \div 100 = 0,5$. Tendo dois números em qualquer das outras gavetas a soma será divisível por 100 se os restos forem diferentes e a diferença também será divisível por 100 se os restos forem iguais.

Exemplo 12: (MORGADO et al.,2006) Prove que dado qualquer conjunto de 10 inteiros positivos de dois dígitos cada, é possível obter dois subconjuntos disjuntos cujos elementos têm a mesma soma.

Solução: Cada conjunto de dois dígitos formado a partir de 10 inteiros positivos consta de uma sequência $(n_1; n_2; \dots; n_{10})$; logo pelo Princípio Fundamental da Contagem o número de sequência é $2 \times 2 \times 2 \dots \times 2 = 2^{10} = 1024$ conjunto cujos elementos serão também, todos eles, elementos de outro conjunto. Dada a soma dos elementos em cada subconjunto haverá 34 e dois subconjuntos distintos cujos elementos têm a mesma soma. Veja: No máximo $91 + 92 + \dots + 99 = 950$ (e no mínimo, 0). Se esses subconjuntos forem separados satisfaremos o que propõem a questão. Porém se possuírem elementos comuns suprimindo-os teremos dois novos subconjuntos disjuntos, cujos elementos têm a mesma soma.

Exemplo 13: (MAIA, 2015) Em uma gaveta, há 6 lenços brancos, 8 azuis e 9 vermelhos. Os lenços serão retirados, ao acaso, de dentro dessa gaveta. Quantos lenços, no mínimo, devem ser retirados para que se possa garantir que, dentre os lenços retirados, haja um de cada cor?

Solução: Se pegássemos três lenços sendo um de cada cor, o problema estaria resolvido, mas na pior das hipóteses teríamos 8 lenços azuis e 9 vermelhos. Teríamos $8 + 9 = 17$ lenços mais 1 que com toda certeza seria vermelho. Então para atender ao problema precisaríamos retirar ao acaso 18 lenços. Pelo princípio da casa dos pombos considerariamos como casas as $k = 3$ possibilidades de cores distintas (branco, azul e vermelho) e $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos com $n > k$.

Exemplo 14: (MAIA, 2015) Em uma urna há 7 bolas: 3 brancas, 2 pretas, 1 verde 1 azul. É correto afirmar que, se dessa urna forem retiradas;

a) 5 bolas, necessariamente haverá bolas de três cores diferentes.

b) 4 bolas, necessariamente todas terão cores diferentes.

c) 3 bolas, necessariamente todas serão brancas.

d) 2 bolas, necessariamente ambas terão cores iguais.

e) 6 bolas, necessariamente haverá uma bola branca.

Solução: Analisando alternativa por alternativa chegaremos às seguintes conclusões:

a) Com a retirada de 5 bolas, as possibilidades de cores que poderemos obter na pior das hipóteses é de 3 bolas brancas e 2 pretas. Então, não pegariamos necessariamente três cores diferentes.

b) Com a retirada de 4 bolas, poderemos obter no pior caso 3 bolas brancas e 1 azul ou preta ou verde. Não necessariamente teríamos três cores diferentes.

c) Retirando 3 bolas, não necessariamente seria branca podendo ser na pior das suposições 2 pretas e 1 verde ou azul.

d) Para termos 2 bolas da mesma cor teríamos que retirar na pior das hipóteses 5 bolas sendo uma branca, uma preta, uma verde, uma azul e na quinta retirada teríamos uma cor de bola repetida, já que o problema dispunha só de quatro cores distintas.

e) Ao retirarmos 6 bolas tais que seja duas pretas, uma verde, uma azul as próximas duas com certeza serão brancas.

Exemplo 15: (MAIA, 2015) Em uma urna há 5 bolas pretas, 4 bolas brancas e 3 bolas verdes. Deseja-se retirar, aleatoriamente certa quantidade de bolas dessa urna. O número mínimo de bolas que devem ser retiradas para que tenha certeza de que entre elas haverá 2 da mesma cor é:

Solução: Em uma primeira hipótese poderíamos em sequência obter 2 bolas pretas ou 2 bolas brancas ou duas verdes. O fato satisfaz a condição de existência em solução ao problema

apresentado. Na pior das hipóteses observe que temos $k = 3$ cores distintas que pelo Princípio do pombal chamaria de casas e

$\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1 = 2$ o número de pombos. Então, para pelo menos uma das 3 casas conterà dois pombos da mesma cor, ou seja, $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 = 2 \Leftrightarrow n = 4$ retiradas de bolas podendo ser 1 preta, 1 branca, 1 verde a próxima retirada seria de uma bola com uma das três cores, satisfazendo assim as condições do problema apresentado.

Exemplo 16: (Esaf) Ana guarda suas blusas em uma única gaveta em seu quarto. Nela encontram-se 7 blusas azuis, 9 amarelas, 1 preta, 3 verdes e 3 vermelhas. Uma noite, no escuro, Ana abre a gaveta e pega algumas blusas. O número mínimo de blusas que Ana deve pegar para ter certeza de que pegou ao menos duas blusas da mesma cor é:

Solução: Pensando na pior das hipóteses, Ana poderá tirar uma blusa azul, uma amarela, uma verde ou vermelha. Dada as 5 blusas de cores distintas, então a próxima retirada satisfará a condição de existência proposta; pois, para que Ana pegue duas blusas da mesma cor terá que tirar pelo menos 6 blusas da gaveta. Então, pelo princípio de Dirichlet temos 5 gavetas para 6 pombos. Logo em uma gaveta terá pelo menos 2 pombos.

Exemplo 17: (Cespe) Um jantar reúne 13 pessoas de uma mesma família. Das afirmações a seguir referente às pessoas reunidas, a única necessariamente verdadeira é:

- Pelo menos uma delas tem altura superior a 1,90 m.
- Pelo menos duas delas são do sexo feminino.
- Pelo menos duas delas faz aniversário no mesmo mês.
- Pelo menos uma delas nasceu em um dia par.
- Pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

Solução: Analisaremos cada alternativa, sempre pensando na pior das hipóteses.

a) Sabemos que o Princípio da Casa dos Pombos nos garante que para K casas a $n + 1$ pombos sendo que $k < n + 1$. Supondo que K seja os valores de referência a altura das $n = 13$ pessoas. Para satisfazer a condição de existência do princípio teríamos que ter de no mínimo 12

valores para K , pois se o número de pombos for maior que o número de casas, convenhamos que pelo menos uma casa haverá de ter 2 pessoas (pombos). Então, afirmar que uma delas tem altura 1,90 não satisfaz contradição de existência do princípio.

b) O Princípio da Casa dos Pombos nos garante que para $n = 13$ pombos (pessoas) são agasalhados em $m = 2$ casas (gênero masculino e feminino), existe uma casa com pelo menos $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos. Ou seja $\left\lfloor \frac{13-1}{2} \right\rfloor + 1 = 2 \leftrightarrow \frac{12}{2} + 1 = 2 \leftrightarrow 6 + 1 = 2 \leftrightarrow 7 = 2$. Visto que a sentença matemática não é verdadeira, então a alternativa “b” em resposta não satisfaz a condição do problema.

c) Dada as 13 pessoas de uma mesma família reunidas em um jantar, e considerando n o número de meses que possui 1 ano igual a 12, agasalhando analogamente as 13 pessoas em 12 casas, garantimos que pelo menos uma casa conterá 2 pessoas. Logo a alternativa “c” tem sentido completo e corresponde exatamente à condição apresentada, ou seja, a sentença matemática é verdadeira.

d) Se 13 pessoas nascessem concomitantemente em dia par ou ímpar, então pelo menos duas nasceriam no mesmo dia. O Princípio de Dirichlet garante que k casas é maior que n pombos. Considerando $n = 13$ o número de pessoas e $k = 2$ o dia par e ímpar. Suponha que na pior das hipóteses 7 pessoas nasceram no dia ímpar e 6 no dia par. Então, a alternativa “d” é uma inverdade.

e) Havendo 13 pessoas que poderão nascer no mês de janeiro ou fevereiro; na pior das hipóteses podemos supor que as 13 pessoas nasceram todas no mês de janeiro ou todas no mês de fevereiro ou então 7 no mês de janeiro e 6 nasceram no mês de fevereiro e vice-versa. Logo a sentença apresentada na alternativa “e” não corresponde, é uma inverdade.

Exemplo 18: (MAIA, 2015) Em um concurso para fiscal de vendas, dentre 50 candidatos de uma sala de provas, 42 são casados. Levando em consideração que a única resposta à pergunta “estado civil” é “casado” ou “solteiros”, qual o número mínimo de candidatos dessa sala a que deveríamos fazer essa pergunta para

obtermos, com certeza, dois representantes do grupo de solteiros ou do grupo de casados?

Solução: Suponha que o primeiro candidato diga que é solteiro e o segundo responda que é casado, então o próximo que vier a responder sendo solteiro ou casado satisfará o que propõem a questão. Observe que consideremos as opções que disponha o estado civil de cada um, sem se a ter na quantidade de candidatos do concurso. O Princípio da Casa dos Pombos garante que se houver um número infinito de casas contendo um número infinito de pombos, em pelo menos uma das casas haverá infinitos pombos, ou seja, que para $n = 2$ casas (estado civil) teremos $n + 1$ pombos. Então na pior das hipóteses sempre haverá 3 pombos (par de candidatos solteiros ou casados mais um solteiro ou casado, que representaram o grupo de candidatos do concurso para fiscal de vendas.

Exemplo 19: (MAIA, 2015) Em uma repartição pública que funciona de 2^a a 6^a feira, 11 novos funcionários foram contratados. Em relação aos contratados, é necessariamente verdade que.

- a) Todos fazem aniversário em meses diferentes.
- b) Ao menos dois fazem aniversário no mesmo mês.
- c) Ao menos dois começaram a trabalhar no mesmo dia do mês.
- d) Ao menos três começaram a trabalhar no mesmo dia da semana.
- e) Algum começou a trabalhar em uma 2^a feira.

Solução: Pensando no pior caso, na pior hipótese encontraremos a alternativa que satisfará o problema apresentado.

a) São muitas as suposições que podem ser feitas acerca da sentença em resposta a condição apresentada na questão problema. Antes de pensar na pior das hipóteses, podemos supor que assim como todos os funcionários podem nascer em cada um dos 12 meses do ano, também poderão nascer em um único dia de uma mesma semana. Logo a sentença não satisfaz o problema.

b) Para que dois funcionários façam aniversário no mesmo mês, seria necessário o nascimento de 13 funcionários, pois se levamos em consideração que um ano tem 12 meses, pelo Princípio da Casa

dos Pombos o número de casas é maior que o número de pombos. Então, considerando como casas os meses correspondentes há um ano e pombos o número de funcionários. Logo, em um dos meses nasceriam pelo menos dois dos treze funcionários.

c) Se nós considerarmos um mês com 30 dias, sendo o número de funcionários igual a 11 não teríamos como afirmar que pelo menos dois nasceriam no mesmo dia, pois na pior das hipóteses poderíamos supor que os onze funcionários puderam nascer em dias distintos. O Princípio da Casa dos Pombos confirma essa suposição, pois, se n for igual a 30 e $n + 1$ igual ao número de funcionários teremos mais casas do que pombos.

d) O funcionamento da repartição pública é de 2ª a 6ª. Então, temos 5 dias da semana; se distribuirmos os 11 funcionários entre os 5 dias da semana, então pelo menos 3 dos 11 funcionários começará a trabalhar no mesmo dia da semana. Logo a alternativa “d” melhor se adéqua as condições do problema.

e) Se há 5 dias da semana poderá ou não um dos onze funcionários ter começado a trabalhar na segunda-feira, pois podemos supor que três funcionários trabalharam na terça, três começaram a trabalhar na quarta, três na quinta e dois na sexta. Então essa condição não satisfaz o problema em questão.

Exemplo 20: (FCC) em uma urna temos 3 bolas azuis, cada uma com $5cm^3$ de volume; 3 cubos pretos, cada um com $2cm^3$ de volume e 1 cubo azul de $3cm^3$ de volume. Retirando-se quatro objetos da urna, sem reposição, necessariamente um deles:

- a) Terá volume menor do que $3cm^3$.
- b) Terá volume maior do que $3cm^3$.
- c) Será uma bola.
- d) Será azul.
- e) Será preta.

Solução: Podemos supor que há três possibilidades para que os quatro objetos retirados sem reposição sejam:

- 3 Bolas azuis sendo que a 4ª retirada um cubo azul ou preto.

- 3 Cubos pretos sendo que a 4ª retirada um cubo azul ou uma bola azul.

- 1 Bola azul, 1 cubo preto, 1 cubo azul e a 4ª retirada ser uma bola azul ou um cubo preto.

Observe que independente da ordem, em cada retirada pelo menos um deles será uma bola azul ou um cubo preto ou azul. Então, convenhamos que retirando quatro objetos de uma urna sem reposição, um deles será azul. Usando o Princípio do Pombal $n = 2$ casas (cores azul ou preta) e $n + 1 = 3$ pombos (objetos 2 cubos e 1 bola). Então para cada retirada de objetos pelo menos dois será azul ou preto. A alternativa correta é a letra *d*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentei o percurso de vida do famoso matemático que fundamentou o Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet. Coloquei em evidências sua paixão pela matemática; em consequência suas contribuições em diversos assuntos das Ciências Exatas.

Procurei entender a eficácia do princípio enquanto recurso contribuinte para com a resolução de problemas apresentados, baseando-me nas informações de autores que dedicaram parte do seu tempo para estudar a respeito desta ferramenta que referência a Análise Combinatória.

Foi possível perceber que o estudo feito apresenta em um primeiro momento uma demonstração simples de se compreender. Em meio a observações, constatei que não basta entender a base da construção do princípio. Faz-se necessário, criatividade para se chegar a um apontamento lógico de quem são as casas e quem são os pombos nas diversas questões apresentadas.

Expliquei um problema que mostra o nível e requisitos para chegar a uma resolução coerente. Exposto por Antônio Caminha Muniz Neto afim de que, em diagnose percebamos, a precisão de associação entre o recurso estudado e as propriedades que

permeiam os assuntos em matemática, que por sua vez exibem uma quantidade mínima de resposta a questões.

Em (MUNIZ NETO, 2012) Marcamos aleatoriamente, cinco pontos no interior do quadrado de lado 2cm. Mostre que é sempre possível chamarmos dois desses pontos tais que a distância entre eles seja menor que $\sqrt{2}$ cm (sugestão: particione o quadrado dado em quatro outros, os quais serão a casa dos pombos).

De início o problema nos propõe uma provação de que é sempre possível achar dois pontos no interior de um quadrado em que a distância entre eles seja menor que $\sqrt{2}$ cm queremos provar a existência de certa configuração;

Colocando a questão em análise de forma a determinar certo conjunto de casas e pombos; $m = 5$ pombos e a área do quadrado de lado 2 sera $n = 4$ casas. Então, pelo Princípio de Dirichlet teremos $\left\lfloor \frac{5-1}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 2$.

Considerando a função $f: m \rightarrow n$ tal que $f(m)$ é o quadrado unitário ao qual o ponto m pertence. Assim teremos $\frac{m}{n}$ pombos. Logo podemos dizer que existe uma casa com $2 > \frac{m}{n}$. Sendo a diagonal do quadrado unitário é igual a $\sqrt{2}$ os pontos em n estão a uma distância menor ou igual $\sqrt{2}$. Que assim satisfaz a condição.

Almejo que o acervo exposto por meio desta monografia possa ajudar alunos e professores a entender o Princípio da Casa dos Pombos, tendo-o como ferramenta facilitadora em resposta a questões pertinentes a matemática.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Thiago Pinheiro de. **Princípio da casa dos pombos**: uma abordagem diferenciada com objetos de aprendizagem. 2013. 56 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/5990/1/2013_dis_tpdeaguiar.pdf>. Acesso em: 24 set. 2014.

AMORIM, Luigi Amaro Bragança. **O ensino do princípio da casa dos pombos no ensino básico**. 2013. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. 2013. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalhoconclusaocurso/2013/luigi_amorim.pdf>. Acesso em: 24 fev.2015.

AUGUSTO, Alciléa(Org.). **Princípio da Casa dos Pombos**. RPM, São Paulo. [S.L.: s.n.], 2007. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/rpm_pic2007.pdf> Acesso em: 08 Jul.2015.

FERREIRA, Priscilla Alves. **O Princípio da casa dos pombos**. 2011. 34 f. Monografia (Pós-graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2011. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/Monografias_Noturna/Monografia_PriscillaAlves.pdf>. Acesso em: 24 set. 2014.

MAIA, A.G.P. **Linguagem Lógica** (Lógica Matemática). In: MAIA, A.G.P. *Raciocínio lógico para provas e concursos*. Brasília: Alumnus, 2015. p.25-139.

MORGADO, A.C.O. et al. **Outros Métodos de Contagem**. In:

MORGADO, A.C.O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. p.56-87.

MUNIZ, A.C. **Existência de Configurações**. In: MUNIZ, A.C. *Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. p.131-159.

SANTOS, J.P.O. MELLO, M.P. MURARI, I.T.C. **Princípio da casa dos pombos**. In: SANTOS, J.P.O. MELLO, M.P. MURARI, I.T.C. *Introdução à análise combinatória*. Campinas: UNICAMP, 1995. p.211-219.

SOBRE OS ORGANIZADORES

Gustavo Nogueira Dias



Doutor em Educação pela Universidade Nacional de Rosário, Argentina (2017); Mestre em Geofísica pela Universidade Federal do Pará, Belém (2011); Especialista em Gestão escolar pelo Centro Universitário do Pará (2008); Licenciado Pleno em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2001). Trabalhou em escolas particulares de 1991 até 2005. Ingressou na SEDUC(PA) como professor efetivo de 2006 a 2016. Participou como professor bolsista do PARFOR, no IFPA(Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará), em 2012. Atuou também como professor bolsista da UFRA (Universidade Federal Rural da Amazônia), em 2013. Ingressou na UNAMA (Universidade da Amazônia) como professor efetivo de 2015 a 2017. Atuou na ESAMAZ como professor colaborador na disciplina de Cálculo I em 2017 a 2020. No presente é professor efetivo do ensino Básico Federal do Colégio Ten. Rêgo Barros, onde ingressou em 2005 e a partir de 2017 exerce suas atividades. Participa do grupo de estudos GHEMAZ da UEPA, Universidade Estadual do Pará. Atua também como pesquisador nas áreas: Ciência Ambiental, Ensino e Aprendizagem, Educação Matemática, História da Matemática, Modelagem Matemática, Administração, Contabilidade e Estatística.

<http://lattes.cnpq.br/0489910258858885>

Vanessa Mayara Souza Pamplona

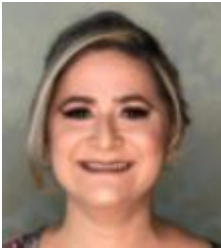


Ingressou no Curso de Bacharelado em Estatística no ano de 2004, concluindo o curso em 2008, pela Universidade Federal do Pará - UFPA. No mesmo ano foi aprovada em Concurso Público pela UFPA, para exercer o Cargo de Estatística, Classe E, com lotação no Campus Universitário Belém e nomeada no mesmo ano. Em 2010 ingressou no Curso de Pós-graduação em Matemática e Estatística da UFPA, em Nível de Mestrado, em 2011 obteve o título de mestre. No ano de 2012 ingressou no Curso de Pós-graduação em Agronomia (Entomologia Agrícola), em Nível de Doutorado na Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias da Universidade Estadual Paulista - Campus de Jaboticabal - SP, em 2016 obteve o título de doutora. No ano de 2013 foi aprovada em Concurso Público de Provas e Títulos, para provimento de cargo efetivo de Professor da Carreira do Magistério Superior em Regime de Dedicção Exclusiva (DE) na Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA) - Campus de Paragominas - PA. Atualmente é professora efetiva do Magistério Superior e ministra aula nos cursos de graduação em Agronomia, Engenharia Florestal e Zootecnia, nas disciplinas de Estatística, Bioestatística, Estatística Experimental e Biometria.

<http://lattes.cnpq.br/8464469460816871>

SOBRE AS AUTORAS E OS AUTORES

Alessandra Epifanio Rodrigues



Possui graduação em Agronomia pela Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA), mestrado em Ciência Animal pela Universidade Federal do Pará (UFPA), área de concentração Produção Animal; doutoranda do Programa de Pós-graduação em Saúde e Produção Animal da Amazônia (PPGSPAA) da UFRA, área de concentração Produção Animal. Já atuou como professora contratada da Universidade do Vale do Acaraú-UVA e da UFRA, em 2008 aprovada em concurso público, atuou como Engenheira Agrônoma da Secretaria de Agricultura do Município de Curalinho/PA. Desde 2010 faz parte do quadro de docentes efetivos da UFRA, Campus Paragominas, ministrando aula nos cursos de graduação em Agronomia, Engenharia Florestal e Zootecnia. Coordenou o Curso de Graduação em Zootecnia, UFRA Campus Paragominas no período de 2014 a julho de 2021. É líder do grupo de estudos e pesquisas em estatística aplicada (GEPEA). Atualmente exerce a função de Pró-Reitora de Extensão da UFRA.

<http://lattes.cnpq.br/6108727282100985>

Antônio Thiago Madeira Beirão



Possui doutorado (2018) e Mestrado (2014) pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará (UFPA). Especialização em Fundamentos de Física Contemporânea (2012); Graduação em Bacharelado em Física (2018) e Licenciatura em Matemática (2010) todos pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Ademais, possui Especialização em Ensino de Nanociências e Nanotecnologia pela UFN (2021) e Graduação em Licenciatura em Física (2009) pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA). Tem experiência em Física da Matéria Condensada, atuando principalmente nos seguintes temas: (i) Transporte Eletrônico utilizando formalismo de Funções de Green fora do equilíbrio (NEGF) na presença de Férmions de Majorana; (ii) Transporte Eletrônico em alótropos 2D do carbono sob efeitos de hidrogenação e dopagem; (iii) Ensino de Física e Matemática utilizando metodologias ativas e desenvolvimento de objetos de aprendizagem virtuais. Atualmente é professor Adjunto C da Universidade Federal Rural da Amazônia - UFRA.

<http://lattes.cnpq.br/8949006888604428>

Carlos Alberto Nobre da Silva

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado do Pará - UEPA (1995), Especialização em Matemática pela mesma Universidade (1999), Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará - UFPA (2013), Doutorado defendido em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará - UFPA (2020).

Atualmente é professor de Ensino Fundamental e Médio da Escola Bosque Prof. Eidorfe Moreira e professor do Ensino Básico Técnico e Tecnológico no Colégio de Ensino Fundamental e Médio Tenente Rego Barros. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática.

<http://lattes.cnpq.br/2944708765456474>

Cássio Pinho dos Reis



Bacharel em estatística formado pela Universidade Federal do Pará (2007), mestre em Estatística Aplicada e Biometria pela Universidade Federal de Viçosa (2013) e doutor em Biometria pela Universidade Estadual Paulista - Botucatu (2019). Atualmente é professor Adjunto A, nível 2, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Ministra as disciplinas de Estatística, Probabilidade e Estatística, Bioestatística, Experimentação Zootécnica e Estatística Experimental. Tem experiência na área de Estatística Experimental, Análise de Regressão e Correlação e de Estatística Espacial.

<http://lattes.cnpq.br/7910862177613813>

Edilson Santos Melo



Possui graduação em Bacharelado em Sistemas de Informação pela Faculdade de Estudos Avançados do Pará (FEAPA) (2010) e formação Técnica em Mecânica Industrial pelo Instituto Federal do Pará (IFPA) (2008), Graduação Licenciatura em Matemática na Faculdades da Amazônia (UNAM). Tem conhecimento na área de Informática além de exercer a função técnica de operador de processos. Com conhecimento de ferramentas e linguagens técnicas, desenvolvimento de sistemas e aplicações, codificação de programas e implantação de projetos. Pós-graduação Lato Sensu em Ensino da Matemática.

<http://lattes.cnpq.br/8520736814446820>

Edson Junior Ferreira de Azevedo



Possui graduação em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2013). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática

<http://lattes.cnpq.br/0235295420899288>

Eldilene da Silva Barbosa



Doutoranda em Agronomia na Universidade Federal Rural da Amazônia; Mestre em Administração pela UNAMA; MBA em Gerência Contábil, Auditoria, Perícia e Controladoria; Graduada em Ciências Contábeis pelo Centro Universitário do Estado do Pará. Professora de Magistério Superior da Universidade Federal Rural da Amazônia

<http://lattes.cnpq.br/3938394892535968>

Fabricio da Silva Lobato



Possui graduação em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2014). Atualmente é professor de Matemática em Pré vestibular. Mestrando pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2019). Especialista em ENEM: COMPETÊNCIAS E HABILIDADES EM MATEMÁTICA E CIÊNCIAS DA NATUREZA. Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática. Pesquisando e publicando em Alto nível nas áreas de Didática da Matemática, Educação à Distância (EAD) e tecnologias Educacionais e Estudos sobre Competências e Habilidades em Matemática para o Enem.

<http://lattes.cnpq.br/1189880349255018>

Gilberto Emanuel Reis Vogado



Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade da Amazônia (1991), mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (2005) e doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2014). Atualmente é professor assistente IV da Universidade do Estado do Pará, coordenador do curso de Especialização de Fundamentos de Matemática Elementar e professor - Primeiro Comando Aéreo Regional. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: matemática, ensino de matemática, banca de correção e modelagem matemática.

<http://lattes.cnpq.br/5384744067215994>

Ivamilton Nonato Lobato dos Santos



É Mestre no Ensino de Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará - UFPA, instituição onde se Especializou em Cálculo Integral e Diferencial, se Aperfeiçoou em Mídias Educacionais e se Licenciou em Matemática. Em 2016 publicou o livro "Brinquedos de Miriti: Patrimônio Histórico Cultural - Perspectiva Matemática".

<http://lattes.cnpq.br/8892629710061690>

Jamille Carla Oliveira Araújo



Professora Assistente com dedicação exclusiva da Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA), que atualmente está exercendo lotação provisória na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), servidora público, do curso de Bacharelado em Ciências Contábeis, trabalhando com áreas de empreendedorismo, cooperativismo, controladoria, sistema de informações contábeis e contabilidade atuarial. Mestre em Administração - Com linha de Pesquisa em Gestão Organizacional, pela Universidade da Amazônia (UNAMA), onde trabalhou com estudos voltados para cooperação e redes cooperativas. Em 2009 a 2016 exerceu o cargo de técnica de registro mercantil realizando análise de processos de abertura, alterações, arquivamentos de balanços, Atas de reunião dos diversos tipos jurídicos (Empresário individual, EIRELI, Sociedade Limitada, Sociedade Cooperativa, Sociedade Anônima, Consórcios, Sociedade de Propósito Especifico) e também exerceu cargo de gerente de registro mercantil em unidade desconcentrada Capanema, e diretora interina de Registro mercantil. MBA- Gerência Contábil, Auditoria, Perícia e Controladoria, como objeto de estudo em sistemas de informações contábeis e controladoria hospitalar, sendo responsável pela sistematização de contas contábeis hospitalares do Hospital D. Luiz Benemerita Beneficente Portuguesa de Belém- Pará. Bacharel em Ciências Contábeis pelo Instituto de Ensino Superior da Amazônia- Iesam (2007). Membro do CONSELHO DELIBERATIVO DA RESEX MARINHA DE TRACUATEUA., representando a UFRA portaria nº 2466 de 04 de outubro de 2018

<http://lattes.cnpq.br/7762402296569056>

Jéssica Adriane Oliveira de Castro

Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2014). Tem experiência na área de análise matemática, atuando principalmente no seguinte tema: convergência de sequências de funções.

<http://lattes.cnpq.br/0325464131335725>

José Carlos Barros de Souza Júnior



Mestrando em Educação Matemática - Universidade do Estado do Pará (UEPA). Especialista em Matemática no Ensino Básico - Faculdade Integrada Brasil Amazônia (FIBRA). Graduado em Licenciatura Plena em Matemática - Universidade do Estado do Pará (UEPA). Atualmente é Professor de Matemática no Ensino Fundamental e Médio - Colégio Tenente Rêgo

Barros (CTRB).

<http://lattes.cnpq.br/0829639338905229>

José Edmilson de Lima Fialho



Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (2008). Atualmente é professor da Escola de Ensino Fundamental e Médio Tenente Rêgo Barros.

<http://lattes.cnpq.br/1709533217203304>

Katiane Pereira da Silva



Possui graduação em Licenciatura em Ciências Naturais - Física pela Universidade do Estado do Pará (2006). Mestrado em Física pela Universidade Federal do Maranhão (2010). Doutorado em Física pela Universidade Federal do Ceará (2014) com Estágio de Doutorado (sandwich) pelo Institut de Ciències de Materials de Barcelona (com investigação em Materiais semicondutores). Atualmente é Professora Adjunto C na Universidade Federal Rural da Amazônia - Campus Belém. Tem experiência na área de Física da Matéria Condensada na área experimental, atuando principalmente nos seguintes temas: propriedades ópticas e estruturais de materiais, com uso principalmente das técnicas de Espectroscopia Raman e Espectroscopia no Infravermelho. Aplicação de altas pressões hidrostáticas em materiais orgânicos e inorgânicos, difração de Raios-X e método de refinamento Rietveld. Ensino de Física utilizando metodologias ativas e tecnologias digitais.

Desenvolvimento de protótipos tecnológicos com aplicação no meio ambiente com uso da plataforma Arduino.

<http://lattes.cnpq.br/3810443896855581>

Luciana Raiol Bahia



Possui graduação em LICENCIATURA EM MATEMATICA pela Universidade da Amazônia(2016). Atualmente é PROFESSOR da Secretaria Municipal de Educação de Benevides. Tem experiência na área de Matemática.

<http://lattes.cnpq.br/1450780643894577>



Luiz Otávio Alves Ribeiro

Possui graduação em Licenciatura plena em Matemática pela Escola Superior Madre Celeste (2013).

<http://lattes.cnpq.br/1543205264416605>

Marcio Frank



Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2018). Atualmente é professor de matemática - EEEM DR SERGIO MOTA. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Ensino de matemática

<http://lattes.cnpq.br/6133342344742093>

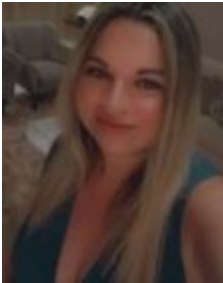
Mauro do Socorro Botelho Feio



Possui pós-graduação em Matemática pela Escola Superior da Amazônia (ESAMAZ) graduado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2013). Atualmente é Professor da Escola Sesi Belém e Ananindeua com os ensinos Fundamental II e Novo Ensino Médio. Já trabalhei em escolas como: Authêntico, Intelectual, Sistema, Physics, Elite, Sophos, Olympus, Impacto e Fórmula. Possuo experiência na área de Matemática do Fundamental II, Pré-Enem, Militar e Novo Ensino Médio. Contato: (91) 98460-8998

<http://lattes.cnpq.br/2524322201089516>

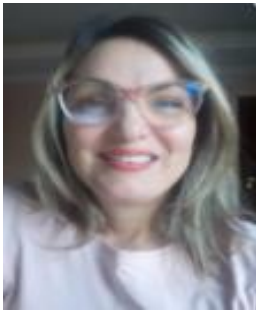
Nazaré Doriene de Melo Reis



Graduação em CIÊNCIAS CONTÁBEIS pela Universidade da Amazônia (2005). Cursando o curso de Direito pela Faculdade Estácio do Pará. Possui Pós-graduação em GESTÃO DE TRIBUTOS pela Faculdade Ideal (FACI), e em Administração ESTRATÉGICA pela Faculdade Uniamericas (2014). Atualmente é Coordenadora do Curso de Ciências Contábeis e professora da Faculdade Estácio do Pará, Mestrado em Administração pela Universidad San Lorenzo (2015), e MESTRADO em Educação pela Universidade Metodista (2015). Atualmente é Professora Universitário Titular da Faculdade Estácio do Pará (FAP) e contador e sócia da empresa MS CONTABILIDADE LTDA. Tem experiência na área de Ciências Contábeis, com ênfase em Gestão de tributos, departamento pessoal e Contábil, atuando principalmente nos seguintes temas: Contabilidade Comercial e Financeira, Contabilidade Gerencial, Contabilidade de Custos, Estruturas das Demonstrações Contábeis, Práticas Informatizada, Gestão de Práticas Trabalhista, Contabilidade Tributária e Contabilidade Geral

<http://lattes.cnpq.br/3366101945200730>

Nelba Tania Gomes Pinheiro



Mestre em Biologia de Agentes Infecciosos e Parasitários pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Especialista em Informática e Educação pela Universidade do Estado do Pará. Graduada em Licenciatura Plena em Biologia pela UFPA. Trabalha na educação básica, como professora de Ciências, no Colégio Tenente Rêgo Barros, desde 1998.

<http://lattes.cnpq.br/5868516671605518>

Pedro Franco de Sá

Possui graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1988), mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1996) e doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2003). Foi o diretor, no período de junho de 2012 à maio de 2016, do Centro de Ciências Sociais e Educação da Universidade do Estado do Pará onde é professor Titular de Educação Matemática do Departamento de Matemática, Estatística e Informática desde 2013. É docente fundador do Programa de Mestrado em Educação do CCSE- UEPA, docente fundador da REAMEC e docente fundador do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do CCSE- UEPA. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, ensino de matemática por atividades, matemática no ensino fundamental e uso de novas tecnologias em sala de aula, em particular uso didático da calculadora.

<http://lattes.cnpq.br/4323922632919962>

Pedro Roberto Sousa da Silva



Possui mestrado em educação pela UEPA na linha formação de professores, especialização em educação matemática pela UFPA e licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2004). Atualmente é professor da Universidade Federal do Pará lotado na EAUFFPA e tem experiência na área de Matemática e Educação Matemática.

<http://lattes.cnpq.br/2420402590454036>

Ravila Beatriz Costa Furtado

Possui graduação em LICENCIATURA EM MATEMÁTICA pela Universidade da Amazônia (2018) e ensino médio pela escola MARIA H TAVARES (2013).

<http://lattes.cnpq.br/3769384321048796>

Renata Carolina Freitas dos Santos Bentes



Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2019). Atualmente é professora da ESCOLA MUNICIPAL DE ENSINO INFANTIL E FUNDAMENTAL GERACINA BEGOT GRANHEN. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática.

<http://lattes.cnpq.br/3055362615582168>

Ricardo Daniel Soares Santos



Licenciatura, Bacharelado, Mestrado e Doutorado em Física da Matéria Condensada pela Universidade Federal de Sergipe. Curso Técnico Profissionalizante em Química pelo IFS. Pós-graduação na Área de Educação na Especialidade de Didática do Ensino Superior. Experiência profissional na área de ensino de Física e Matemática para nível médio, técnico profissionalizante e superior. Experiência na área de Física de Materiais Funcionais com Modelagem Computacional, atuando principalmente nos seguintes temas: Propriedades ópticas e cálculos de defeitos estruturais, processos de dopagens e redução da valência de íons terras raras em matrizes de ortofosfatos. e-mail: rdsantostina@yahoo.com.br

<http://lattes.cnpq.br/0131828608395620>

Victor Hugo Chacon Britto

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2003) e mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2013). Atualmente é professor da Escola de Ensino Fundamental e Médio Tenente Rêgo Barros e doutorando em Educação Matemática pela Universidade Federal do Pará, na linha de pesquisa Percepção Matemática, Processos e Raciocínios, Saberes e Valores. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: didática matemática, ensino, matemática e avaliação.

<http://lattes.cnpq.br/4628250554189234>

Wagner Davy Lucas Barreto



Possui graduação em Matemática Licenciatura pela Universidade Federal do Pará (2009), e em ciências pela Universidade Estadual do Maranhão (2008). Especialista em Didática da Matemática pela UFPA e Mestrado em Matemática em Rede Nacional Pela Universidade Federal do Pará (2020). Possui Mestrado em Ciências Ambientais pela Universidade de Taubaté (2012). Atualmente é professor instrutor do Comando da Aeronáutica no Colégio Tenente Rego Barros CTRB. Tem experiência em preparação para Olimpíadas de Matemática, tem experiência no ensino fundamental, médio e superior nas modalidades presencial e à distância.

<http://lattes.cnpq.br/5874566438322067>

Waljucy Furtado Cardoso

Contador, Mestre em Administração pela Universidade da Amazônia - UNAMA (2012), Especialista em Docência no Ensino Superior pelo Centro Universitário do Pará - CESUPA (2004), Graduado em Ciências Contábeis com Ênfase em informática pelo Centro Universitário do Estado do Pará (2003). Atualmente é professor de graduação na Universidade Federal Rural da Amazônia - UFRA.

<http://lattes.cnpq.br/8910793917958147>

Washington Luiz Pedrosa da Silva Junior



Mestrando em Educação pela Universidade do Estado do Pará-UEPA, Licenciado em Matemática pela Universidade do Estado do Pará-UEPA e Graduação em Licenciatura em Pedagogia pela Universidade Santo Amaro-UNISA. Especialista em Fundamentos da Matemática Elementar, Gestão Educacional e Docência do Ensino Básico e Superior, Matemática Financeira e Estatística, Educação do Campo, Didática e Metodologias Ativas de Aprendizagem e Antropologia Brasileira. Professor, Magistério Matemática do Colégio Federal Tenente Rêgo Barros.

<http://lattes.cnpq.br/4086790019679608>



**“Todas as coisas são números.”
(Pitágoras)**

**“Façamos com que os dados falem!”
(Subhash Sharma)**

**“Há duas formas para viver a sua vida.
Uma é acreditar que não existe milagre. A
outra é acreditar que todas as coisas são
um milagre.”
(Albert Einstein)**



ISBN 978-65-5869-786-2



9 786558 697862 >