Recursos didáticos para o ensino da matemática nos anos iniciais

Material da 4ª edição do curso - 2022

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
UERJ

Grupo EMAI
UERJ

Ficha Técnica

Agenciamento:

Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Título:

Recursos didáticos para o ensino da matemática dos anos iniciais

Organizadores: Equipe Grupo EMAI - 2022

Bárbara de Andrade Sant'Anna (CAp-UERJ)

Flaviane Barbosa dos Santos Gonzaga (SME RJ)

Jeanne Denise Bezerra de Barros (IME-UERJ)

João Vitor dos Santos de Castro (Bolsista, FFP-UERJ)

Luciana Andrade de Almeida (IBC)

Maria Verônica Pereira da Silva (Pedagogia-UERJ)

Michelle Evangelista Garcia (Bolsista, IME-UERJ)

Valéria Gonçalves de Carvalho (FFP-UERJ)

Design Gráfico:

Michelle Evangelista Garcia (Bolsista, IME-UERJ)

Equipe Administrativa:

Mario Sergio Alves Carneiro – Reitor (UERJ)

Claudia Gonçalves de Lima – Pró-reitora de Extensão e Pesquisa (UERJ)

Jeanne Barros – Coordenadora do Projeto de Extensão: Elaboração e aplicação de um curso a distância para profissionais de SRM (IME-UERJ)

Ficha Técnica

Apoio Técnico:
Ferramentas do Canva Educacional

Revisão Textual:
Michelle Evangelista Garcia

Sumário

Módulo 1 - A história dos números

Muitas vezes nossos alunos nos perguntam: para que estudar matemática? Parece que a matemática não faz parte de sua vivência real, como é o caso de números irracionais, complexos, etc. Antes de abordar os números naturais que conhecemos atualmente, vamos nos transportar ao passado!

Nos primórdios da humanidade, tornou-se necessário a comunicação oral e a organização em sociedades para poder sobreviver. A memória oral não era suficiente para preservar tudo o que se sabia, no início eram usados desenhos (pictogramas), como por exemplo a pintura de touro, cavalo, cervo e urus em uma caverna na França (Fig. 1.1) e marcas em ossos, como os encontrados em África (Fig. 1.2).

Fig. 1.1 - Pictogramas encontrados nas Grutas de Lascaux na França (18 mil a.C.) - (fonte)

Fig. 1.2 - Ossos Ibshango - Africa (20 mil a.C.) - (fonte)

Desde muito tempo atrás, as pessoas também sentiram a necessidade de contar seus objetos. Por exemplo, para saber a quantidade de animais em seus rebanhos, eles faziam correspondência um a um usando pedrinhas, uma para cada animal. Isso, hoje em dia, é o que chamamos de uma relação biunívoca. Para entender mais sobre relação biunívoca, deixaremos em breve um apêndice sobre relações / funções. Voltando à história da matemática, Tatiana Roque afirma que essa razão que fez com que surgissem os números não é comprovada cientificamente. Ela muito bem explica:

> Em uma história dos números, é difícil escolher um ponto de partida. Por onde começar? Em que época? Em que local? Em que civilização especifica? Não é difícil imaginar que as sociedades muito antigas tenham tido noção de quantidade. Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência, e o exemplo mais frequente é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, em vez de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas escritas na argila, e essas marcas estariam na origem dos números. Usamos aqui o futuro do pretérito – "teria", "estariam" – para indicar que essa versão não é comprovada. As fontes para o estudo das civilizações antigas são escassas e fragmentadas. Historiadores e antropólogos discutem, há tempos, como construir um conhecimento sobre essas culturas com base nas evidências disponíveis (Roque, 2012, p. 25).

Segundo restos arqueológicos, para registrar as quantidades, faziam marcas em ossos, como por exemplo o Ishango (África), 20 mil anos a.C., em pergaminhos feitos com pele de carneiro (egípcios), nós em corda (Quipus Inca) e utilizavam os próprios dedos.

Com o tempo, surgiu a necessidade de contar, registrar grandes quantidades e relatar grandes acontecimentos. Assim, muitos povos da Antiguidade criaram sua própria escrita e seus próprios sistemas de numeração.

A primeira forma de escrita foi criada pelos sumérios (5000 a.C.) na antiga Mesopotâmia. Cada ideia ou conceito era representado por um símbolo e existem milhares deles (egípcios, Japoneses, Babilônicos, Incas etc.). Veja alguns exemplos nas Fig. 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6.

Fig. 1.3 – Símbolos/hieroglíficos da escrita maia– México (III a.C) (fonte)

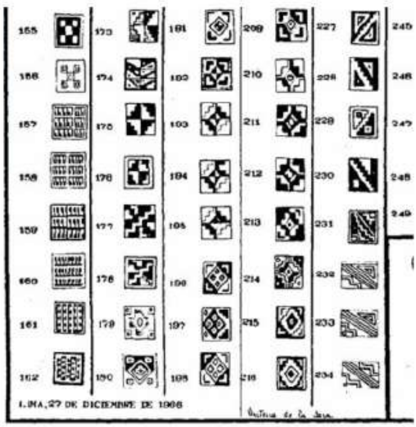


Fig. 1.4 – Símbolos Incas (Século XI-XV) (fonte)

Com a leitura, foram criados alfabetos fonéticos em que os símbolos representavam sons.

Fig. 1.5 – Símbolos Babilônicos – (fonte)

Fig. 1.6. – Símbolos Egípcios – (fonte)

1. Sistemas de Numeração nos Povos da Antiguidade

As civilizações mais conhecidas por sua contribuição com a matemática foram os egípcios, babilônicos, gregos, hindus, romanos, incas, maias, entre outros. Atualmente, utilizamos o sistema de numeração indo-arábico em base dez, mas nem todos as culturas mencionadas usavam a base decimal, por exemplo, os maias usavam a base 20 (vigésima), os babilônicos a base 60 (sexagesimal), os gregos, egípcios, incas e romanos usavam a base decimal.

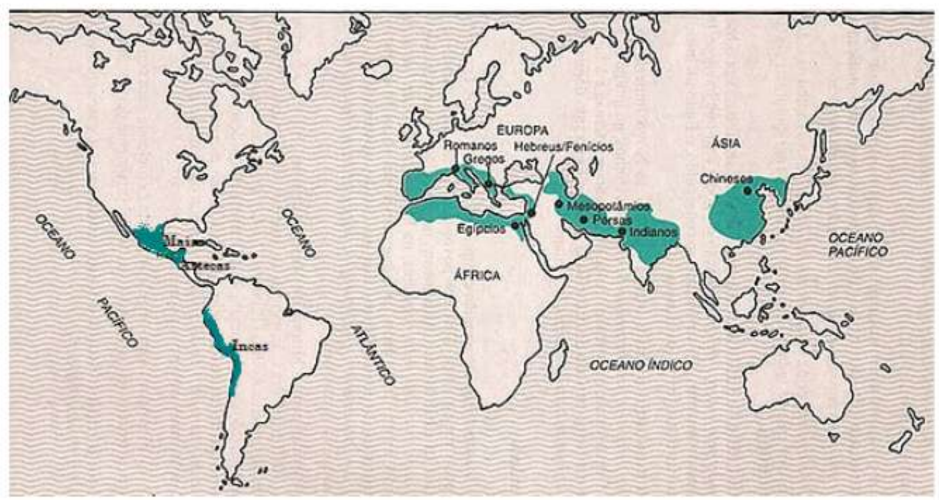


Fig. 1.7 – Antigas civilizações – (fonte)

1.1. Sistema Numérico Babilônico (3500 a.C.– 500 a.C.)

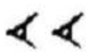
Entre os rios Tigres e Eufrates (atual Iraque) houve o florescimento da cultura Mesopotâmica, incluindo as civilizações da Suméria, de Acádio, da Babilônica e da Assíria. Na baixa Mesopotâmia os sumérios desenvolveram a escrita cuneiforme (formato de cunha), a qual foi adotada e aperfeiçoada, pelos povos que passaram por essa região. Ficou vigente por quase 3 mil anos. Vestígios arqueológicos mostram que os textos gravados em argila com um bastonete (depois cozida) contém tópicos da matemática (2000 a.C.), como por exemplo o cálculo da raiz quadrada de um número. Seu sistema de numeração era posicional e na base 60 (sexagesimal) e usavam apenas os seguintes símbolos:

1	10
 cravo	 asna

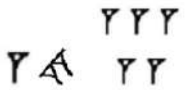
Onde cada cravo podia ser repetido no máximo 9 vezes e cada asna repetido no máximo 5 vezes. Números maiores eram escritos repetindo os mesmos símbolos com um espaço a mais para a esquerda. O símbolo do número 1, o cravo, também era usado para representar o número 60 e nesse sistema não existia representação para o número zero.
Veja alguns exemplos a seguir:

> O número 18 era representado por:

> O número 20 era representado por:



> O número 65 era representado por:



1.2. Sistema de numeração no Egito Antigo (4500 a.C. – 300 a.C.)

Há cerca de 3000 anos antes de Cristo os egípcios já viviam em cidades e usavam registros numéricos em atividades comerciais, entre outras. O sistema era de numeração decimal, porém não consideravam o valor posicional dos símbolos utilizados, assim a ordem em que os símbolos aparecem não influencia no resultado. Os principais símbolos que usavam para descrever números estão na tabela abaixo:

Fig. 1.8 – Sistema de numeração egípcio – (fonte)

Cada símbolo somente pode ser repetido até nove vezes.

1.3. Sistema de numeração da civilização Maia (1000 a.C. até 1697 d.C.)

A civilização Maia se destacou por sua organização política, seus monumentos arquitetônicos, sistemas de calendário e notáveis conhecimentos de astronomia. Em seu auge, estima-se que superavam o que vinha sendo alcançado em outras partes do planeta, à mesma época. Possuíam escrita e seu sistema de numeração posicional era na base 20, talvez inspirados no fato de termos dez dedos nas mãos e dez dedos nos pés.

O sistema de numeração maia é um dos mais interessantes da antiguidade, conhecido desde o ano 200 a.C. Os dedos das mãos e dos pés parecem estar na origem deste sistema, ou seja, um sistema vigesimal. Eles desenvolveram um sistema de numeração que possibilitava representar qualquer número com apenas três algarismos (símbolos).

Uma concha representava o zero, um ponto representava o número 1 e um traço (1 barrinha) o número 5. O ponto podia ser repetido até 4 vezes e o traço até 3. A escrita era feita na vertical.

Os maias usavam, portanto, 3 símbolos, um para cada algarismo de zero até 19. Eles utilizavam o zero! Veja os símbolos na figura abaixo.

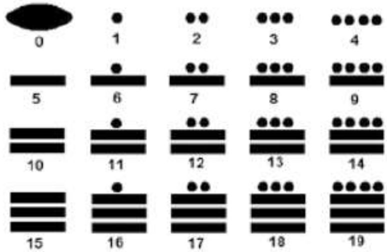


Fig 1.9 – Sistema de numeração maia – (fonte)

Curiosidades:

No Brasil, em raras situações, recorremos à base 20. Ainda assim, talvez você tenha ouvido expressões como: "Não vale nem um vintém", que significa que não vale nada, ou ainda, "Estou sem um vintém", ou seja, sem dinheiro. Tais expressões fazem menção à antiga moeda de um vintém, que circulava no Brasil e que valia um vigésimo de um cruzado. Em algumas músicas antigas podemos também encontrar a palavra "vintém", como na música "Feitiço da Vila", de Noel Rosa.

Feitiço da Vila – Noel Rosa
Clique aqui para escutar a música

Quem nasce lá na Vila nem sequer vacila ao abraçar o samba
Que faz dançar os galhos do arvoredo
E faz a lua nascer mais cedo

Lá em Vila Isabel quem é bacharel não tem medo de bamba
São Paulo dá café, Minas dá leite e a Vila Isabel dá samba

A Vila tem um feitiço sem farofa
Sem vela e sem vintém que nos faz bem
Tendo nome de princesa transformou o samba
Num feitiço decente que prende a gente

O sol na Vila é triste, samba não assiste
Porque a gente implora:
Sol, pelo amor de Deus, não venha agora
Que as morenas vão logo embora
Eu sei tudo que faço, sei por onde passo
Paixão não me aniquila
Mas tenho que dizer:
Modéstia à parte, meus senhores, eu sou da Vila!

Quem nasce pra sambar chora pra mamar
Em ritmo de samba
Lá não tem cadeado nos portões por que na vila
Não tem ladrão

www.vagalume.com.br

No entanto, o vintém foi uma influência da colonização portuguesa. Alguns estudiosos acreditam que a tênue influência da base vigesimal na Europa tenha vindo dos normandios, outros, dos celtas, de qualquer maneira, nada aponta para uma relação com os maias. Resquícios da base vigesimal aparecem em outros países europeus. Observamos que na França a base vigesimal influencia o nome dado aos números. Por exemplo, o número oitenta é chamado "quatre-vingts", indicando quatro grupos de vinte.

1.4. Sistema de numeração Incaico (300 - 1600)

O império dos Incas ou Tahuantinsuyo surgiu se desenvolveu na cordilheira dos andes (parte de: Peru, Bolívia, Chile e Equador), com a junção de outros grupos indígenas (Tiahuanaco, Chinchorro, Aymara, Chibcha, entre outros), com a junção de outros grupos indígenas (Tiahuanaco, Chinchorro, Aymara, Chibcha, entre outros). Tiveram um governo central, utilizam o idioma Quéchua. Seu sistema numérico era decimal. As representações dos números eram no quipus, união de cordas coloridas com nós (de 0 até 9 nodos). Para realizar as operações aritméticas utilizavam o ábaco inca chamado de Yupana.

Fig 1.10 – Sistema de numeração Incaico (fonte)

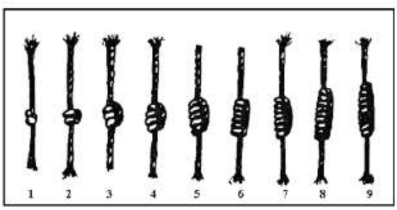


Fig. 1.11 – Sistema de numeração Incaico (fonte)

A escrita das palavras também era representada nos quipus com ajuda das combinações das cores e diferentes padrões, maiores detalhes : https://www.vix.com/pt/ciencia/545011/descoberta-de-antropologa-pode-tirar-incas-da-era-pre-historia-eles-sabiam-escrever

Numeral	Número	Letras	Figura geométrica
1	juk	J	
2	Iskai	LL-W-Y	
3	kimsa	M	
4	tawa	T	
5	pichqa	B	
6	soqta	S	
7	qanchis	K-Q	
8	pusaq	P	
9	isqon	K-Ñ	
10	chunca	CH	

Fig. 1.12 – Sistema Inca - (Garcia; Zander e Mello (2009))

O número "zero" é representado pela ausência de um nodo na posição apropriada.

1.5. Sistema de numeração Chinês

Atualmente na China se usam 3 sistemas de numeração:
a. Indo arábico, o mais conhecido mundialmente.
b. O sistema decimal tradicional de escrita com treze caracteres representando os números do 1 ao 9 e as quatro potências do número 10. Estes caracteres ainda são usados em cheques, cerimônias, etc.

〇	一	二	三	四	五	六
0	1	2	3	4	5	6
七	八	九	十	百	千	万
7	8	9	10	100	1 000	10 000

Fig. 1.13 – Sistema de numeração chinês – (fonte)

Alguns exemplos da construção dos números chineses no sistema decimal tradicional:

> O número 30 é escrito como 3×10, e representado por: 三十

> O número 49 = 4×10 +9, é representado por: 四十九

c. E o sistema posicional, o huāmǎ, está sendo gradualmente substituído pelo árabe. Este sistema é uma variação do sistema numérico das varas.

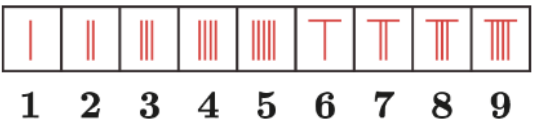


Fig. 1.14 – Variação do sistema numérico chinês – (fonte)

1.6. Sistema de numeração Romano

O sistema de numeração romano foi desenvolvido na Roma antiga (500 a.C.), baseado na numeração etrusca, que surgiu em Toscana-Itália. Os numerais romanos ainda são utilizados em nossos dias, como por exemplo em relógios, para indicar um século etc.

I	II	III	IV	V	VI	VII
1	2	3	4	5	6	7
VIII	IX	X	L	C	D	M
8	9	10	50	100	500	1 000

Nas Figuras 1.15 e 1.16, temos alguns exemplos onde ocorrem algarismos romanos.

TÍTULO I
DOS PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

Art. 1º A República Federativa do Brasil, formada pela união indissolúvel dos Estados e Municípios e do Distrito Federal, constitui-se em Estado Democrático de Direito e tem como fundamentos:
I - a soberania;
II - a cidadania;
III - a dignidade da pessoa humana;
IV - os valores sociais do trabalho e da livre iniciativa; (Vide Lei nº 13.874, de 2019)
V - o pluralismo político.

Fig. 1.15 –Trecho da Constituição do Brasil – (fonte)

Fig. 1.16 – Relógio de parede – (fonte)

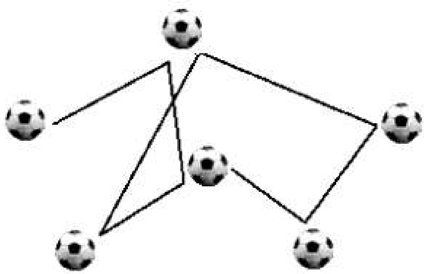
NOTA: Para uma compreensão melhor deste módulo, recomendamos uma leitura do texto da Professora Tatiana Roque (ROQUE, 2012), pelo menos até a seção O Sistema Sexagesimal Posicional. O texto está sendo disponibilizado na plataforma em PDF, e é facilmente encontrado na WEB.

Módulo 2 - O conceito de número

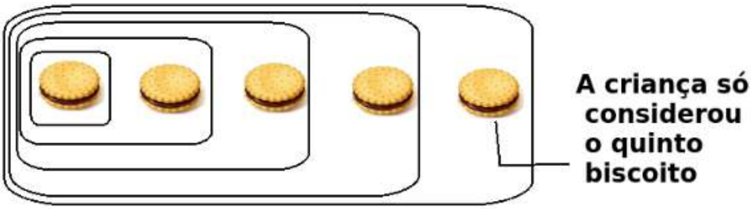
Uma das dificuldades que encontramos como professores é ajudar nossos alunos a perceber o conceito de número, quando eles ainda não o dominam. Este desafio é diferente do de ensinar um sistema de numeração específico, ou de tornar os estudantes hábeis nos cálculos. Destacamos também que dominar o conceito de número vai além da habilidade de contar. Assim, é possível que uma criança com 5 ou 6 anos saiba contar, ainda que ela não domine o conceito de número.

Vejamos alguns exemplos em que tal situação pode ocorrer. Salientamos que este tipo de equívoco ocorre com frequência em crianças de 6 anos, ou menos.

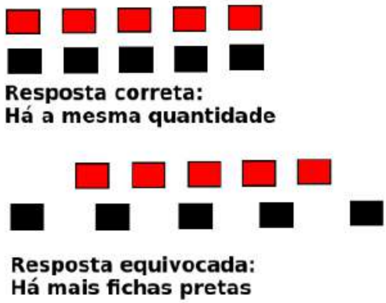
Exemplo 1 (falha na ordenação): A criança conta mais de uma vez o mesmo elemento. Neste caso houve uma falha na habilidade de estabelecer uma ordem dos elementos a serem contados. Na figura há 6 bolas, mas a criança contaria 8, por contar duas das bolas mais de uma vez.



Exemplo 2 (falha na inclusão hierárquica): Pede-se a criança, por exemplo, 5 biscoitos. A criança efetua a contagem e entrega apenas o quinto biscoito contado. Há uma falha na inclusão hierárquica, os quatro primeiros elementos contados não foram incluídos na contagem.



Exemplo 3 (falha na conservação da quantidade): A professora Paula dispõe 5 fichas vermelhas na mesa e entrega para a criança uma pilha com muitas fichas pretas. Solicita, então, que ela lhe entregue tantas fichas pretas quanto forem as fichas vermelhas. A criança acerta, emparelhando cada ficha preta em frente a uma ficha vermelha. A professora então pergunta: há mais fichas vermelhas ou fichas pretas? A criança responde corretamente que há a mesma quantidade. Estaria tudo perfeito! Porém, quando a professora tem a ideia de afastar um pouco as fichas pretas, e repetir a pergunta, a criança responde que há mais fichas pretas. Quando indagada a razão, ela responde, por exemplo, que a fila das fichas vermelhas está mais comprida.



2.1. Como a criança constrói a ideia de número

Usamos números o tempo todo em nossa vida: para pegar um ônibus, fazer um pagamento, encontrar um endereço, saber a idade da vizinha, a altura de uma parede, etc. Como já dizia Pitágoras "Os números governam o mundo". Os números desempenham várias funções: podem servir como código, pode descrever quantidade nos resultados de uma contagem ou de uma medição, podem até mesmo indicar uma ordem e indicar uma medida. Desempenhando todas essas funções, eles passaram a ser indispensáveis no cotidiano do homem.

A criança ao ingressar na escola já vem com alguma vivência com número, porém para a construção do conceito de número é fundamental que a criança se aproprie dos conceitos que antecedem à escrita do número propriamente dita. Daí a necessidade da construção dos conceitos de classificação, seriação, inclusão, conservação e outros em uma matemática viva, dinâmica e significativa. Pretendemos propor aqui uma sequência de atividades como sugestão que atuem como elemento facilitador na aquisição desse conceito de número, mediante a conceituação e de forma que as atividades, de forma lúdica, se fixem nas propriedades mais importantes e nas relações entre elas, visando à exploração do conhecimento lógico-matemático. É fundamental que as atividades propostas às crianças respeitem a realidade delas. O lúdico é sempre mais um instrumento. Nesse sentido, pensamos em atividades com o objetivo de conduzir a criança a conhecer, interagir, vivenciar jogos e materiais manipulativos que promovam a habilidade mental e o desenvolvimento da aprendizagem brincando, viabilizando assim um aprender de forma significativa e prazerosa. Partindo da premissa de que o jogo e o material manipulativo são construtivos e de que eles permitem e motivam a criação de novas ações e auxiliam no desenvolvimento da imaginação e raciocínio, é que se propõe a utilização dos mesmos no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Ao professor, considerando que muitas crianças já conhecem o nome dos números, é importante que não deixe esse conhecimento camuflar o objetivo das comparações entre quantidades, pois para compará-las não é necessário conhecer seus nomes. No entanto, quando as crianças estiverem seguras nas comparações entre quantidades, pode-se introduzir o registro escrito dessas quantidades, o que será feito por meio dos numerais lembrando que símbolo (numeral) é representação de ideia (número).

Uma das primeiras ideias é a de que quantidade e ou a contagem está associada à ideia de número. Em geral as crianças praticam a contagem de rotina, isto é, dizem os nomes dos numerais em sequência: um, dois, três, etc, em um processo mecânico. Isto não significa que já tenham construído o conceito de número ou de quantidade. Antes de escrever os numerais, é preciso desenvolver muitas atividades com as crianças para que elas elaborem esta construção. Seguem sugestões aos professores, de atividades para explorar os conceitos de correspondência, comparação, classificação, sequenciação, seriação, inclusão, conservação e quantificação.

Partindo do pressuposto de que a criança constrói os conceitos através da experiência com objetos e da interação social, é muito importante, antes da realização de atividades propriamente matemáticas, que haja a manipulação de materiais de contagem, que sejam abordadas situações cotidianas que envolvam os conceitos matemáticos e que realizem discussões sobre o assunto. A ação do professor é extremamente necessária durante o processo, pois é ele que vai efetuar a seleção do material mais apropriado às questões mais significativas, bem como apresentar as atividades de forma sequenciada que leve a uma abstração gradativa. Todo ato intelectual é construído progressivamente, e por isso, cabe ao professor criar situações que possibilite a criança a agir na construção do seu conhecimento.

I. Atividades correspondência → Quando a criança vai distribuir balas para seus amigos, inicia distribuindo uma bala para cada criança. Isso mais tarde, lhe auxiliará na construção do conceito de número e na contagem.

II. Atividades de comparação → Quando a criança estabelece diferenças ou semelhanças entre objeto ou indivíduos da mesma espécie se valendo de critérios predeterminados como: tamanho, forma ou cores.

III. Atividades de classificação → Na verdade, uma próxima fase da comparação, quando separamos por categoria de acordo com semelhanças, o que torna possível separar objetos por categoria, seguindo critérios determinados.

IV. Atividades de sequenciação → Envolvem o estabelecimento de uma fila, ou uma lista em que um elemento vem após o outro sem qualquer critério, não considerando uma ordem obrigatória para isso, como, por exemplo, na entrada de jogadores de futebol, na elaboração de uma lista de compras, etc.;

V. Atividades de seriação → Implicam o ato de ordenar uma sequência segundo um critério. Pode ser tamanho, peso, largura, etc.; como, por exemplo, organizar uma fila de alunos do mais baixo para o mais alto, um calendário, a sequência numérica...

VI. Atividades de inclusão → A forma de poder fazer abranger um conjunto por outro; ou seja, entender o subconjunto. Exemplo: A sala de aula faz parte do conjunto “escola”; entender que laranja e laranja lima são frutas. Assim mais tarde conseguirão compreender que retângulos, quadrados e losangos são paralelogramos;

VII. Atividades de conservação e quantificação → O ato de perceber que a quantidade não depende da arrumação, forma ou posição. Podendo ser de quantidade, de comprimento, de área, e de volume sendo necessário mais tarde para a compreensão dos conhecimentos aritméticos e de geometria.

2.2. Alicerces do conceito de número: Ordenação, inclusão hierárquica e conservação de quantidade

Segundo a abordagem do biólogo, psicólogo e epistemólogo suíço Jean Piaget (1896 – 1980), a construção do conceito de número está alicerçada em três outros conceitos: ordenação, inclusão hierárquica (ou inclusão de classe) e conservação da quantidade. Os exemplos elencados na introdução ilustraram respostas equivocadas, respectivamente, por falha em cada um destes conceitos.

Constance Kazuko Kamii (1931--), uma psicóloga e pesquisadora nipo-americana que trabalhou com Jean Piaget, alerta para o perigo de treinarmos as crianças para darem respostas corretas, sem que as estruturas de pensamento delas sejam alteradas. Para evitar isso, precisamos incentivar atitudes como a autonomia e a argumentação. Desta forma, convém desenvolvermos atividades com os alunos que promovam a socialização e a organização do pensamento. Uma das ferramentas importantes é fazer uso de atividades lúdicas e interdisciplinares.

Atividades envolvendo ordenação aparecem com frequência no dia a dia. Podemos explorar questões como ordenar os dias da semana, começando, por exemplo, do domingo, e seguindo a sequência com segunda-feira, terça-feira, até chegarmos ao sábado. Outro exemplo, neste contexto, é a ordenação dos meses do ano, começando, por exemplo, de janeiro. Se a criança estiver se alfabetizando, podemos brincar de "dicionário", colocando algumas palavras em ordem alfabética. No caso, inspirados no educador e filósofo brasileiro Paulo Freire (1921-1997), poderíamos extrair a lista de palavras de acordo com a sugestão dos alunos. Questões de ordenação também podem perpassar as vivências familiares, como ordenar da mais nova para a mais velha, ou vice-versa, as crianças que vivem no mesmo círculo familiar do aluno. Esta experiência pode ser compartilhada com a turma, de modo que conheçamos melhor nossos alunos e que eles, também, consigam desenvolver um ambiente de aprendizagem colaborativa, ganhando autoconfiança.

Outra forma de abordar questões de ordenação e outros assuntos da matemática é por meio das histórias infantis, como por exemplo, "Cachinhos Dourados e os

Três Ursos", que pode ser trabalhada de maneira crítica e problematizadora. Um link para a história pode ser encontrado em:
https://www.youtube.com/watch?v=qfsF4I7WIow

O conceito de inclusão hierárquica ou de classe também pode ser abordado em situações cotidianas, por exemplo, explorando-se as relações familiares: cada criança pode ser solicitada a contar sua história familiar (com quem mora, quais os nomes, etc) e colocar em uma caixinha vazia (pode ser uma caixinha de fósforo usada), etiquetada com seu nome, tantos grãos de feijão quanto forem as pessoas que habitam em sua casa. Depois, em roda, as crianças podem cantar uma música de roda, por exemplo, Escravos de Jó, encontrada em pt.wikipedia.org/wiki/Escravos_de_Jó, enquanto vão passando as caixinhas de mão em mão. Quando a música acaba, a criança deve identificar o número de habitantes da casa do amiguinho cuja caixinha caiu em sua mão, a partir da contagem de grãos de feijão da referida caixinha. Ao contar os grãos da caixinha, a ênfase é dada na totalidade.

Escravos de Jó (versão Zé Guerreiro)

Versão popular na região de Alagoas

Escravos de Jó jogavam caxangá,
Tira, bota, deixa o Zé Guerreiro ficar...
Guerreiros com guerreiros, fazem zigue zigue zá,
Guerreiros com guerreiros, fazem zigue zigue zá.

Quando uma criança adquire o conceito de conservação de quantidade, mesmo mudando a configuração em que se organizam os objetos, ela percebe que a quantidade não é alterada. Uma criança conservativa não se deixa enganar pelas aparências e numa situação como a do terceiro exemplo da introdução, manteria a resposta inicial, de que a quantidade de fichas vermelhas e pretas seria a mesma. Quando instigada a dar argumentos, a criança conservativa geralmente usa os seguintes argumentos: identidade (fichas não foram retiradas, nem acrescentadas), reversibilidade (poderíamos colocar as fichas pretas como estavam antes), compensação (a fileira das fichas pretas é mais comprida, mas as fichas vermelhas estão mais juntinhas, de modo que dá no mesmo). Assim, é interessante buscar atividades que trabalhem estes argumentos.

Uma atividade que trabalha a reversibilidade do raciocínio é a montagem e desmontagem de caixas. Esta atividade pode ser feita, por exemplo, com caixas velhas de remédios ou de outros produtos.

Na conservação de quantidade, fica implícita também a correspondência um a um, no exemplo das fichas, para cada ficha vermelha, corresponde uma ficha preta. Brincadeiras como a dança das cadeiras, que descreveremos mais adiante, trabalham a relação um a um.

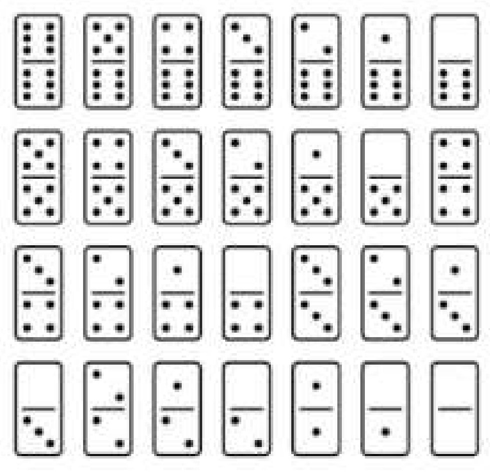
Uma crítica às ideias de Piaget seria que elas trariam um viés etapista (limitado /dividido por etapas rígidas). Algumas questões poderiam ser colocadas: vale a pena ensinar as palavras-número antes de a criança compreender o conceito de inclusão de classe? Pesquisadores posteriores à Piaget, tais como K. Wynn e A. J. Barrody, sugeriram uma visão alternativa conciliando Piaget e seus críticos. Nesse sentido, propuseram uma abordagem concomitante focada no desenvolvimento das estruturas cognitivas subjacentes à construção do conceito de número. Assim, trabalharemos os diversos aspectos envolvidos nessa construção de maneira articulada, enfatizando-se estratégias lúdicas.

2.3. Sugestões de jogos e atividades

Nesta seção falaremos mais detalhadamente de alguns jogos e atividades que podem auxiliar as crianças na construção do conceito de número.

Trabalho com histórias: Uma pesquisa de Laws et al. (1995) aponta que a leitura melhora o desempenho da memória verbal e viso-espacial de curto prazo, em crianças com Síndrome de Down. As histórias ajudam as crianças a colocarem as coisas em relações, sendo que algumas histórias ainda podem enfatizar particularmente relações lógico-matemáticas.

Jogo de dominó: O jogo tradicional de dominó pode ajudar a criança a em um relance identificar uma determinada quantidade, trabalhando o reconhecimento instantâneo de algumas quantidades. É mais lento contar seis pontos dispostos em linha do que contar 6 pontos dispostos em 3 pares de 2. A própria distribuição das peças já é um exercício para a criança pequena, feito numa perspectiva de socialização.



(fonte)

Blocos lógicos: Num primeiro momento, as crianças devem identificar as peças do jogo, separando por cor, e em cada cor as formas existentes. Visto isso, separa os grossos dos finos. Por último, colocar em ordem crescente de tamanho. Por exemplo, há três círculos amarelos e finos, podemos colocá-los em ordem crescente.

(fonte)

Jogo de pega-varetas: Jogam-se as varetas sobre a mesa. Cada criança, em sua vez, deve pegar uma vareta sem mexer as demais. Quando trememos outras varetas, passamos a vez. Em uma versão simplificada do jogo, vence quem conseguir pegar mais varetas.

(fonte)

Régua de Cuisenaire: Inicialmente os alunos podem identificar os tipos de peça existentes, e colocá-los em ordem tanto crescente, quanto decrescente.

(fonte)

Usar as mãos: para indicar os números, associando cada configuração à palavra-número correspondente. Músicas infantis que envolvem números podem ser utilizadas, estimulando-se que enquanto cantam, as crianças façam os gestos com as mãos. Ressalta-se que em muitas culturas o uso da base decimal pode estar associado à utilização dos dedos para contar. Por exemplo, as seguintes músicas infantis:

Mariana: https://www.youtube.com/watch?v=orxxp-3gBiE
Elefante:https://www.youtube.com/watch?v=A0FhPPvzuo8

Jogos de cartas com o baralho: Retiram-se valetes, damas, reis, ases e curingas. Embaralham-se as cartas e faz-se uma pilha, que é colocada no centro da mesa, com os números voltados para baixo. Cada criança puxa uma carta. Quem tiver o maior número leva a rodada. Se houver empate, as cartas ficam sobre a mesa e serão levadas para vencer na rodada seguinte. Vence quem conseguir recolher mais cartas

(fonte)

Módulo 3 - O sistema de numeração decimal

Ressaltamos que é importante, desde as séries iniciais, estimular o desenvolvimento do espírito investigativo, competências como análise e síntese, e a capacidade de interpretar criticamente as informações, contribuindo para a formação geral do estudante. E, por isso mesmo, antes de passarmos para o assunto propriamente do módulo, imaginemos como tudo isso (desenvolvimento, competências, capacidades, etc) pode ser levado até o estudante. As práticas pedagógicas existem e muitos teóricos utilizam-se de termos rebuscados, criando até termos novos para buscarem as palavras limpas que traduzem as formas-ideias construídas por eles. E nós professores, como podemos digerir essas teorias para passar ao aluno o alimento correto? Acreditamos que o MEC nos ajuda para tal orientando nossa prática pedagógica a partir de parâmetros criados por ele. Escrevemos parâmetros porque não encontramos a palavra adequada ainda. Pois bem, sem procurar nos aprofundar nessa questão, busquemos apenas uma dessas orientações: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC trata de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante a sua educação básica (Ensinos Fundamental e Médio). A orientação do MEC é seguir essas aprendizagens essenciais como roteiro propício para alcançar os objetivos desejados.

Fica claro no texto da BNCC que ela vem nortear as propostas pedagógicas:

> A Base estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, BNCC, 2017)

A BNCC explicita as competências que os alunos devem desenvolver durante a sua formação básica. Se propomos neste curso apresentar atividades para aprendizagem em matemática, é mais do que necessário inserir essas atividades no contexto da BNCC. Nossa preocupação reside no fato de que a BNCC é muito recente, logo, as mudanças ainda estão em andamento. Mudanças essas nos currículos para que as aprendizagens essenciais sejam contempladas. Por essa razão, pretendemos nos inserir nesse novo contexto, buscando sempre uma relação entre o que é sugerido como atividade e a competência/aprendizagem essencial da BNCC. Assevera o texto do MEC:

> Ao longo da Educação Básica – na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio –, os alunos devem desenvolver as dez competências gerais da Educação Básica, que pretendem assegurar, como resultado do seu processo de aprendizagem e desenvolvimento, uma formação humana integral que vise à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, BNCC)

Na BNCC, o Ensino Fundamental está organizado em cinco áreas do conhecimento: (Fig. 3.1)

- Linguagens
- Matemática
- Ciências da Natureza
- Ciências Humanas
- Ensino Religioso.

Segundo a BNCC, “elas se intersectam na formação dos alunos, embora se preservem as especificidades e os saberes próprios construídos e sistematizados nos diversos componentes” (BRASIL, BNCC 2017).

	COMPONENTES CURRICULARES	
	Anos Iniciais (1º ao 5º ano)	Anos Finais (6º ao 9º ano)
Linguagens	Língua Portuguesa	
	Arte	
	Educação Física	
		Língua Inglesa
Matemática	Matemática	
Ciências da Natureza	Ciências	
Ciências Humanas	Geografia	
	História	
Ensino Religioso	Ensino Religioso	

Figura 3.1: Áreas de conhecimento do Ensino Fundamental
Fonte: BRASIL, BNCC (2017)

Focando nossa atenção, agora, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC enfatiza que a aprendizagem em Matemática:

> sta intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, a apreensão de significados os objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses bjetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais omponentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse odo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, alculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel ssencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses ateriais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, ara que se inicie um processo de formalização (BRASIL, BNCC, 2017).

portanto reiterando o nosso terceiro item apontado anteriormente. A BNCC assevera que as habilidades a serem desenvolvidas não podem ficar restritas à aprendizagem dos algoritmos das 4 operações matemáticas. O aluno deve internalizar essas operações entendendo-as de forma completa. Além, é claro, da associação às respectivas operações. Saber os algoritmos não implica em saber aplicá-los. E não saber aplicá-los faz com que o aluno não possa dispor da matemática como ferramenta da vida. Assim foi criada a matemática, como ferramenta da vida, do dia a dia, da resolução de problemas sem precisar de tempo definido. Alguns usam a matemática como co-criação ou criação dependendo da forma de pensá-la. Entretanto, ela é empregada para a nossa vida. Excluídos do conhecimento matemático, como saber se daqui a 50 anos não teremos nenhum mico-leão-dourado no Brasil? (Ver Fig. 3.2) A resposta dessa pergunta não depende da matemática somente, mas sem ela não se pode responder.

Fig. 3.2: Lista de animais ameaçados de extinção no Brasil.
(fonte Acessada em 2021)

Certamente, a compreensão do sistema de numeração decimal que é o que usamos para manipular quantidades/números é de fundamental importância para uma internalização das quatro operações.
Para os cinco primeiros anos do Ensino Fundamental a BNCC aponta como unidades temáticas:

- Números
- Álgebra
- Geometria
- Grandezas e medidas
- Probabilidade e estatística.

Prosseguimos acompanhados dessa base de orientações para a prática pedagógica da nossa aula sobre sistema decimal de numeração. Neste módulo, discutiremos práticas educativas alternativas voltadas para a construção do sistema de numeração decimal, por meio de jogos, construção de artefatos e brincadeiras.

Como já visto no módulo anterior, a construção do conceito de número na criança é um processo complexo, que envolve sobretudo a concepção de ordenação, o princípio da conservação de quantidade e o entendimento da inclusão de classe (Piaget & Szeminska, 1981). A partir daí, o processo de contagem, estabelecendo-se uma relação um a um pode ser estabelecido. Assim, de posse do conceito de número, diferentes culturas elaboraram seus sistemas de numeração, que por vezes são bastante diferentes entre si.

O conhecimento da sequência das palavras-número é importante no processo de contagem, e o domínio dessa habilidade não é tão fácil como parece, o que podemos constatar ao procurar contar em uma língua pouco familiar, ou trocando os nomes dos números. Lembramos, no entanto, que crianças que contam não necessariamente construíram o conceito de número. Quando se pede, por exemplo, para a criança colocar em um copinho quatro bolinhas de gude, é possível que ela conte as quatro bolinhas, mas coloque apenas a quarta da contagem no copinho, que ficará, portanto, com uma única bolinha, em vez de quatro. Nesse caso teria falhado a inclusão de classe.

Destacamos ainda que, embora a sequência dos números possa estar correta em alguns casos, o mesmo objeto é contado mais de uma vez, ou alguns objetos deixam de ser contados. Colocar os objetos a serem contados em forma de círculo é uma boa estratégia para verificar se a criança se preocupará ou não em não repetir objetos na contagem. Um bom teste para verificar se uma criança adquiriu de forma preliminar o conceito de número, é pedir que ela coloque uma determinada quantidade de objetos em um recipiente. Se ela se sair bem com algumas quantidades diferentes superiores a três, provavelmente ela adquiriu o conceito de número.

Em alguns casos, crianças que não construíram o conceito de número, são capazes de lidar corretamente com quantidades de até três. Observa-se, ainda, que em diversas línguas os números até três ou quatro se pronunciam de maneira mais similar do que números maiores que quatro, o que é um indício da antiguidade do domínio humano de quantidades menores.

É importante destacar que é possível haver pleno domínio do conceito de número, com uma compreensão parcial do sistema de numeração posicional decimal que utilizamos. Essa situação é encontrada com frequência em adultos não escolarizados, e se traduz muitas vezes em equívocos nos registros escritos, seja na leitura ou escrita. Um erro característico é ler, por exemplo, o número "502” equivocadamente como "cinquenta e dois", em vez de "quinhentos e dois". No entanto, ao ouvir oralmente a quantidade "quinhentos e dois”, é muito possível que ela seja associada corretamente a cinco notas de cem e uma nota de dois reais, por um adulto não escolarizado.

O domínio do nosso sistema decimal facilitará em muito a compreensão de operações como adição e subtração e ajudará na elaboração de estratégias para a execução das contas, inclusive por meio do cálculo mental. Salientamos que a maioria dos algoritmos tradicionalmente usados na escola seria incompreensível sem o pleno conhecimento do sistema de numeração decimal, já dito acima.

A seguir, apresentamos alguns jogos e brincadeiras que podemos trabalhar com os estudantes, de modo que eles se apropriem, de forma lúdica, da estrutura do nosso sistema decimal.

★ **Atividade 1: Cesta dos números**

Modo de jogar: A uma distância combinada, os jogadores tentam acertar bolinhas em recipientes numerados. Vence o jogador que conseguir o maior número.

Objetivo: (EF01MA05) Comparar números naturais de até duas ordens em situações cotidianas, com e sem suporte da reta numérica.

Material utilizado: Copinhos contendo números no fundo, organizados em uma determinada configuração, bolas de pingue-pongue.

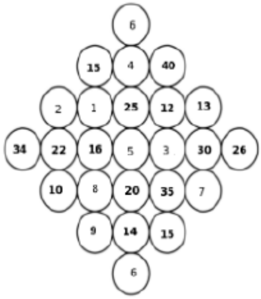


Fig 3.3 – Exemplo de organização dos copos para a atividade

> Vídeo demonstrativo da atividade

★ **Atividade 2: Jogo troca peças com quadro valor de lugar (primeira versão)**

Introdução: O objetivo inicial desta atividade é consolidar a estrutura do sistema posicional decimal, abordando também operações de adição, que neste momento pode ser realizada pela contagem e substituição de peças, sem preocupação com algoritmos específicos.

Material utilizado: Dois dados. Miçangas com cores diferentes. Inicialmente começamos com 3 cores.

Descrição: A turma pode ser dividida em grupos. No jogo a peça verde representa a unidade, amarela a dezena e a rosa a centena. Ou seja, a peça amarela vale 10 verdes e dez peças amarelas valem uma rosa. Cada jogador lança o par de dados e soma os números que aparecem nas faces voltadas para cima, recebendo o número de pontos correspondentes. Se o jogador juntar mais de 10 peças de uma mesma cor, ele deve em sua jogada, trocar por uma peça de valor correspondente, de modo a possuir sempre no máximo 9 peças de cada cor. Ganha aquele que conseguir a maior quantidade de pontos nas 5 primeiras jogadas. Cada jogador deve registrar sua jogada na plataforma do grupo e no seu quadro valor de lugar.

Plataforma do grupo

Jogador	Nº tirado (1ª Jogada)	Nº tirado (2ª Jogada)	Nº tirado (3ª Jogada)	Nº tirado (4ª Jogada)	Nº tirado (5ª Jogada)	Total
A						
B						
C						
D						

- Quadro valor de lugar

Jogador X	Centena (rosa)	Dezena (amarela)	Unidade (verde)
Total de pontos ao completar a 1ª rodada			
Total de pontos ao completar a 2ª rodada			
Total de pontos ao completar a 3ª rodada			
Total de pontos ao completar a 4ª rodada			
Total de pontos ao completar a 5ª rodada			

Observação: Neste jogo são realizadas algumas adições, que podem ser feitas por contagem direta. Os estudantes são livres para criar seus próprios métodos de adicionar, não seria o foco ensinar algoritmos específicos neste momento. A ideia é que as contas sejam realizadas por meio da troca de peças.

★ **Atividade 3: Brincando de arquiteto.**

Cada grupo, preferencialmente de 4 ou 5 pessoas, recebe o material concreto denominado Material Dourado e algumas regras são delineadas para os grupos realizarem "as construções". O material em questão é composto por um cubo grande formado por mil cubinhos, 10 placas quadradas formadas por 100 cubinhos cada uma, 100 tiras formadas por 10 cubinhos cada uma, e diversos cubinhos soltos. As regras são as seguintes:

1) Cada grupo deve apresentar no mínimo quatro "obras" com as peças do material dourado, pedindo que os estudantes façam construções que julguem esteticamente bonitas.
2) Cada obra pode ter no máximo 9 peças de um mesmo tipo, e o cubo grande não faz parte da obra.
3) Cada obra deve receber um nome .

Após a etapa de construção, os alunos analisam a composição de cada obra, preenchendo a tabela. Apresentamos, a título de ilustração, uma tabela com dois exemplos de obras.

Obra	nº de placas de 100 quadradinhos	nº de tiras de 10 quadradinhos	nº de placas de 1 quadradinho
Poço	6	2	0
Moderna	2	3	6

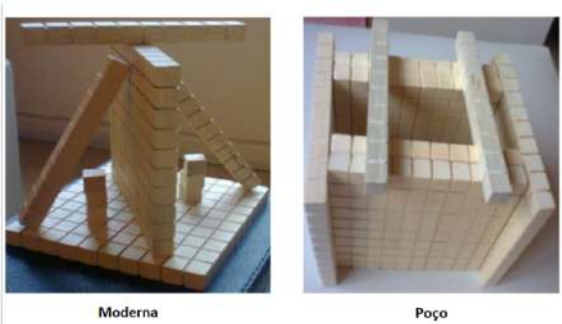


Fig 3.4 – As obras "Moderna" e "Poço"

É interessante colocar algumas questões para que os estudantes reflitam, tais como: É possível construir obras diferentes com as mesmas peças do material? As peças selecionadas definem se a obra é bonita ou não? Que critérios você usaria para definir o preço de cada obra?

Um dos possíveis critérios para definir o preço de custo de cada obra pode ser a matéria prima gasta. Supondo que cada cubinho custa 1 real, vamos avaliar o custo com matéria prima de cada uma das obras exemplificadas.

É interessante notar que os preços podem ser encontrados a partir de processos diferentes. É importante deixar que os alunos discutam e descrevam seus próprios métodos. Uma das possibilidades é a contagem dos cubinhos da obra. Observamos que os estudantes lidam, ainda que sem formalização, o conceito de volume.
Para trabalhar o sistema de numeração, é interessante introduzir o "dinheiro chinês (Carraher, 1989). Este material é composto por notas de brinquedo, nos valores de "1", "10" e "100". A proposta é que se faça a associação da placa de cem cubinhos com a nota de "100", da tira de 10 cubinhos com a nota de "10" e do cubinho solto com a nota de "1".

Assim a obra Moderna custaria duas notas de "100", 3 notas de "10" e 6 notas de "1", associando-se este valor a 236 reais. E ao número 236. A obra Poço, por raciocínio análogo, custaria 6 notas de "100" e 2 notas de "10", que é associado ao valor de 620 reais.

Observa-se que a quantidade de notas de "100", ocupa o valor das centenas, enquanto a quantidade de notas de "10" ocupa o valor das dezenas, e a quantidade de notas de um, o valor das unidades.

Uma pergunta que se pode fazer neste momento, é por que razão foi colocada a regra de se usar no máximo nove peças de cada tipo. O motivo é que só podemos usar algarismos de zero a nove nas casas de unidades, dezenas, e centenas, o que levaria à necessidade de conversão de notas nos registros dos preços, situação que optamos por adiar.

O exemplo do Poço é mais complicado, pois não há notas de "1", e o algarismo "zero" é introduzido. Lembramos da lentidão na aceitação do "zero" na cultura ocidental, e de como seu uso foi importante na implementação do sistema posicional (Caraça, 1998).

Sugere-se que os alunos simulem o preenchimento de cheques no valor de custo da obra, para que eles lidem com o registro escrito dos números, tanto utilizando os algarismos, quanto na descrição do número por extenso.

Módulo 4 - Adição

Como vimos no módulo I, o nosso ingresso no mundo dos números se dá através da tentativa de construção de um sistema de numeração que nos permita utilizar os números nos problemas cotidianos e que torne mais rápida e eficaz a realização dos cálculos (para resolvê-los).

Há muito tempo o homem percebeu que é mais fácil contar uma grande quantidade de elementos fazendo agrupamentos e usamos essa ideia até hoje. A esses agrupamentos dá-se o nome de base de um sistema de numeração. Dependendo do contexto, podemos usar diferentes bases nas contagens que realizamos, a exemplo da contagem das horas (base 60), e do sistema binário (base 2), usado com muita propriedade pelo mundo da informática. Na contagem de uma grande quantidade de objetos, encontramos culturas que realizam agrupamentos de 10 em 10, de 5 em 5, de 20 em 20, etc.

No Sistema de Numeração Indo-arábico, por razões históricas e anatômicas, a base utilizada é a decimal, pois o homem possui 10 dedos nas mãos. Os Hindus, que inventaram os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, contavam quantidades agrupando os elementos de dez em dez. Por esse motivo, o sistema de numeração dos hindus é um sistema de numeração decimal, ou seja, a passagem para a posição imediatamente superior só será feita mediante agrupamentos de 10, ou seja, 10 elementos de uma ordem qualquer equivalem a um elemento da ordem que lhe é imediatamente superior.

Outra ideia de contagem está relacionada com o valor que cada algarismo assume, dependendo da posição que ele ocupa, o que faz o sistema ser posicional, como revela esta frase de um desconhecido escriba egípcio, escrita muito tempo antes de os hindus inventarem os famosos símbolos: “De lugar em lugar cada um vale dez o precedente”. Isto é, cada posição confere ao algarismo um valor dez vezes maior que a posição a sua direita ou, em um número, todo algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vezes mais do que se estivesse no lugar desse outro. Não se podem escrever dois algarismos em uma mesma posição no mesmo numeral.

Assim, um número é representado por um numeral dado pela soma dos valores posicionais, ou seja, todo número pode ser escrito como a soma dos produtos dos algarismos por diferentes potências de dez (sucessivas multiplicações por dez), isso encerra as outras duas características do sistema, ou seja, ele é aditivo e multiplicativo.

> Sugestão de Atividade: **Jogo Dez Não Pode**

Tópicos abordados: Compreensão do Sistema de Numeração Decimal; Ideia do valor posicional.

Material: 90 ou mais palitos de picolé (não excedendo 500), elástico, Q.V.L (Quadro Valor e Lugar) construído pelos próprios alunos em uma folha de papel ofício (que pode ser rascunho) e um dado para cada grupo.

Fig. 4.1: Ilustração da atividade.
(fonte)

Procedimentos: O grupo espalha os palitos numa mesa e sorteia quem vai começar. Na sua vez, o dado é lançado e separa-se o número de palitos que o dado apontar. Quando tiver dez palitos, passa-se um elástico, formando um pacotinho. Caso se formem 10 destes pacotinhos eles devem ser reunidos em um único pacote maior com um elástico. O jogo termina quando acabarem os palitos. Ganha quem tiver mais palitos.

Procedimentos do professor ao final do jogo: Quando os grupos acabarem de jogar, o professor deverá fazer a devida mediação, com indagações do tipo:

- Quem ganhou o jogo?
- Como você descobriu?
- Quantos palitos soltos você tem?
- Quantos pacotinhos?
- Quantos pontos você fez?
- Quantos palitos o grupo recebeu?

Observações:

- A atividade pode ser feita de modo que os alunos sejam levados a registrar os resultados obtidos e a compreender o valor posicional ou não, no caso de ser realizado o registro, é aconselhável usar o referencial (ábaco de papel).
- Quando a troca é feita amarrando 10 palitos e colocando na casa das dezenas, estaremos trabalhando o material concreto, mas quando se trocam 10 palitos na casa das unidades por um palito na casa das dezenas, nesse caso estamos trabalhando o material semi-concreto.

Operações com Números Naturais

Só conhecer os números não basta, é preciso saber operar com eles e, mais ainda, saber quando efetuar com essa ou aquela operação, na resolução de uma dada situação-problema. Teremos com esse curso a oportunidade de refletir sobre o significado das operações com números naturais, sobre o modo como elas se relacionam e o que deve ser levado em conta ao desenvolver um bom trabalho em sala de aula.

No início da escolaridade, o trabalho com as operações fundamentais pode ter como contexto a resolução de problemas e como suporte a intuição dos alunos, suas experiências em situações reais e concretas com pequenas quantidades, com a contagem ou ainda com a sobre contagem. O que dará suporte a essas ações do aluno é o trabalho de identificação das ideias matemáticas associadas às operações.

Adição

Neste módulo, trabalharemos a operação de adição de números naturais por meio de jogos, brincadeiras e da exploração de situações do dia a dia. Almejamos que nossos alunos participem das atividades de uma maneira criativa e prazerosa.

Somar é a primeira operação matemática que se aprende, a que temos mais facilidade e a que gostamos mais.

Primeiro a gente gosta de somar várias vezes palitos e giz, depois brinquedos e roupas da moda, depois somar dinheiro, depois somar carros e casas, e sempre somar alegria e felicidade.

A adição é a operação mais natural na nossa vida, porque está presente nas experiências desde muito cedo. Além disso, envolve a ideia de acrescentar, a ideia de juntar, que são efetivamente prazerosas; quem não gosta de acrescentar, juntar, ganhar ou colecionar coisas?
Juntar: Duas irmãs vão à feira só com notas de 10 reais e de 1 real. Jovelina leva 43 reais e Selma, 35 reais. Para comprar um tapete para sua casa elas gastam todo o dinheiro. Quanto pagaram pelo tapete? Na ideia de juntar da adição temos as duas quantidades que se juntam para formar uma outra.

Acrescentar: Num caixote havia 35 laranjas seu Severino colocou no mesmo caixote 27 laranjas. Com quantas laranjas ficou o caixote? Na ideia de acrescentar temos apenas uma quantidade e uma segunda aparece para modificar a primeira.

Ressaltamos que o entendimento e domínio da operação de adição é basilar para a compreensão das operações de subtração, multiplicação e divisão, uma vez que a operação de adição se relaciona direta ou indiretamente com as outras.

Em diversas situações do dia a dia, a subtração pode ser vista como operação inversa da adição. Por exemplo, se tenho 3 reais e recebo 2, fico com 5.

Fig. 4.2: Ilustração da operação de adição.

Se devolvo estes 2 reais, volto a ficar com 3. Assim, somando e subtraindo a mesma quantidade, retorno à quantidade inicial.

Fig. 4.3: Ilustração da operação de subtração.

Se somamos parcelas iguais, lidamos com a multiplicação. Por exemplo, se todos os dias como 2 pães, ao fim de 7 dias, terei comido 2+2+2+2+2+2+2=7×2=14 pães.

Fig. 4.4: Ilustração da operação de adição com parcelas iguais.

Por outro lado, podemos pensar na divisão como o resultado de subtrações sucessivas. Suponha que Maria tenha 15 doces, e que planeja dar 3 doces a cada criança. Quantas crianças seriam contempladas com a distribuição de Maria? Neste caso poderíamos pensar em ir retirando os doces de três em três até que não houvesse nenhum e veríamos quantas vezes a operação de subtração foi feita.

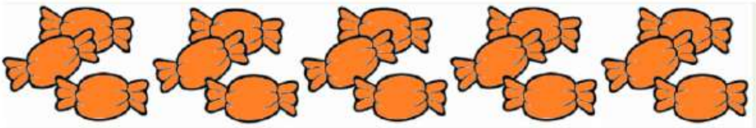


Fig. 4.5: Ilustração da operação de subtrações sucessivas.

Teríamos 15-3-3-3-3-3=0. Realizamos 5 vezes a retirada do 3, uma vez para cada criança. Logo 5 crianças seriam contempladas.

Assim, um bom trabalho da operação de adição irá abrir caminho para que as outras operações sejam também compreendidas. Nos problemas e situações envolvendo adição, é interessante que trabalhemos tanto a ação de juntar como a ação de acrescentar.

Outro exemplo da ação de juntar, podemos citar o problema: "João e Susana são de turmas diferentes, mas as turmas foram juntas no mesmo ônibus para uma excursão. A turma de João tem 15 alunos e a de Susana tem 18. Este ônibus só atendeu às crianças destas duas turmas. Quantas crianças foram no ônibus?"

Para ilustrar a ação de acrescentar, citamos o seguinte exemplo: "Maria tinha 6 lápis de cor, quando recebeu mais 2 lápis. Com quantos lápis Maria ficou?" Este tipo de problema pode incentivar os aprendizes a continuarem a contagem a partir do 6, neste exemplo, ou seja, acrescentando-se mais dois lápis, o sétimo e o oitavo. Destacamos que este procedimento é diferente daquele de misturar os 8 lápis e contar do primeiro ao oitavo.

Além da contextualização das situações colocadas para os alunos, é interessante que o grau de dificuldade aumente paulatinamente, evitando-se saltos muito grandes. Sugerimos que os problemas iniciais envolvam preferencialmente adições de dois números cujos resultados não ultrapassem 10. Neste contexto, é proveitoso identificar que um mesmo resultado pode ser obtido de formas diferentes. Por exemplo: 5=4+1 ou 5=3+2 ou 5=1+1+3, etc.

Quando os alunos estiverem bem familiarizados com estes resultados mais simples, convém introduzir nas atividades situações que envolvam adições cujos resultados não ultrapassem 20. Para que as crianças internalizem esses resultados, a decomposição dos números e a utilização de propriedades podem ser úteis. Por exemplo, na realização da conta 7+9, podemos usar que 7=5+2, 9=5+4. Assim: 7+9 = 5+2+5+4 = 5 +5+2+4 = 10+6 = 16, ou ainda, como, 7 = 6+1, 7+9 = 6+1+9 = 6+10 = 16.

O ideal é que as próprias crianças criem suas estratégias e expliquem para as demais, criando um ambiente de compartilhamento de saberes. Estas propriedades também podem ser ilustradas com material dourado, régua de Cuisinaire ou dinheiro de brinquedo. Alguns pedagogos e educadores matemáticos salientam a importância do uso das mãos no entendimento das operações. Trabalhos em dupla podem ser realizados neste sentido. Por exemplo, na conta 7+9, um aluno deve fazer o 7 com a mão e o outro o 9. Em seguida eles contam o resultado, notando que duas mãos juntas totalizam 10 dedos.

Criança A	Criança B	Resultado
		7+9 = 16, pois contamos duas mãos (10 dedos) mais 6 dedos (2 de uma mão e 4 de outra).

(fonte das imagens)

É interessante introduzir o sinal de adição (+) ao longo das atividades, para que os alunos se acostumem com esta notação aos poucos.

Apenas depois de um bom domínio dos resultados destas contas elementares é que aconselhamos a introduzir algoritmos mais sofisticados para a adição, ocasião em que será revisada e ainda mais consolidada a estrutura do sistema de numeração.

É interessante trabalharmos com as crianças a partir de conversas nas quais elas possam se manifestar e falar um pouco de suas vidas, de modo que possamos criar um ambiente acolhedor. Uma ideia para trabalhar a adição é pedir que cada estudante diga quantas crianças e quantos adultos moram em sua casa. Em seguida, pergunta-se quantas pessoas moram ao todo na casa. Assim será necessário realizar a junção dos adultos e das crianças. Provavelmente as quantidades envolvidas serão apropriadas para uma abordagem inicial.

- **Atividade 1: Exercício de consciência corporal**

Pede-se que cada criança, com uma das mãos, levante um certo número de dedos e abaixe os demais. Aí, cada criança coloca na tabela, ao lado do seu nome, o número de dedos que escolheu levantar e o número que manteve abaixado. Na última coluna, aparece a soma do número de dedos levantados com o número de dedos abaixados. Esta soma deve sempre dar 5.

Criança	Figura	Nº de dedos levantados	nº de dedos abaixados	Nº de dedos levantados mais nº de dedos abaixados
Alice		3	2	3+2=5
Bruno		1	4	1+4=5
Carla		2	3	2+3=5
Diego		4	1	4+1=5

(fonte das imagens)

- **Atividade 2: Cesta dos números de adição**

Modo de jogar: A turma é dividida em duplas. A uma distância combinada, os jogadores tentam acertar bolinhas em recipientes numerados. A pontuação de cada dupla é a soma dos números obtidos pelos seus dois participantes. Na primeira versão do jogo, usamos apenas números de 0 a 5. Conforme o avanço dos alunos, os números podem ser aumentados.

Material utilizado: Copinhos contendo números no fundo, organizados em uma determinada configuração, bolas de pingue-pongue.

Habilidade do BNCC: (EF01MA06) Construir fatos básicos da adição e utilizá-los em procedimentos de cálculo para resolver problemas.

- **Atividade 3: Campeonato de par ou ímpar (com uma mão ou as duas)**

A brincadeira de par ou ímpar é muito comum, para decidir, por exemplo, quem irá começar o jogo. Para “tirar par ou ímpar”, uma das pessoas diz “par”, e a outra “ímpar”. Depois exibem simultaneamente um número entre zero e cinco, mostrado em uma das mãos. Se a soma de ambos os números for par, ganha quem disse “par”, caso contrário, vence quem falou “ímpar”.

Para refletir sobre os detalhes desta brincadeira e treinar os resultados das contas de adição envolvendo resultados até 10, propomos como atividade em dupla um campeonato de 5 rodadas entre as duplas. Um dos componentes escolhe “par” e o outro escolhe “ímpar”. Eles jogam durante 5 rodadas. O campeão é o que obtiver maior número de vitórias.

Fig. 4.6: Ilustração da atividade “par”ou “ímpar”.
(fonte)

Será que a brincadeira é justa? Será que tanto faz escolher par ou ímpar? Para investigar a questão, monte uma tabela, indicando todas as situações que poderiam acontecer quando Rui e Ana, por exemplo, estão jogando. Se Rui escolhe 3 e Ana 4, temos a soma 7, que é ímpar.

Por outro lado, se Rui escolhe 1 e Ana 5, a soma é 6, que é par. Podemos, numa segunda etapa da brincadeira, pedir que os estudantes preencham todas as possibilidades. Em vez de Rui e Ana, os alunos podem preencher seus nomes na tabela.

Rui \ Ana	0	1	2	3	4	5
0						
1						6
2						
3					7	
4						
5						

Podemos pedir ainda que eles respondam às seguintes questões:

1) Quando somamos dois números pares, o resultado é par ou é ímpar?

2) E quando somamos dois números ímpares, o resultado é par ou ímpar?

3) Quando somamos um número par com um número ímpar, o resultado é par ou é ímpar?

4) Entre as 36 situações que podem ocorrer, em quantas delas a soma encontrada é um número par, e em quantas delas este valor é ímpar?

Talvez você esteja convencido que o par ou ímpar é justo. Mas você já reparou que algumas pessoas usam as duas mãos para jogar o par ou ímpar?

Fig. 4.7: Ilustração da atividade "par"ou "ímpar" com duas mãos.
(fonte: Acessada em 2021)

Será que jogando com as duas mãos, a chance de a soma ser ímpar continua sendo igual a da soma ser par? Não se precipite na resposta! É bom lembrar que pequenas variações nos dados de um problema podem gerar respostas inesperadas!

Sugerimos propor aos estudantes que repitam o campeonato de par ou ímpar podendo, cada participante, usando suas duas mãos. A atividade é interessante para trabalhar as adições com resultado até 20.

Habilidade do BNCC: (EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.

- **Atividade 4: Maior soma - Jogo com baralho**

Retiram-se valetes, damas, reis e coringas. O Ás vale 1. Colocam-se as cartas com os números voltados para baixo. Cada jogador puxa duas cartas. Quem obtiver a maior soma leva todas as cartas. Ganha o jogador que no final tiver recolhido mais cartas.

Habilidades do BNCC: (EF01MA05) Comparar números naturais de até duas ordens em situações cotidianas, com e sem suporte da reta numérica e (EF01MA06) Construir fatos básicos da adição e utilizá-los em procedimentos de cálculo para resolver problemas.

- **Atividade 5: Adivinho indiscreto**

Nesta brincadeira, pede-se para uma criança pensar em um número de 1 a 30 e anotar este número em um papel, sem dizê-lo. Em seguida ela deve examinar cada um dos 5 cartões, entregando ao “mágico” apenas os cartões em que o número pensado estiver presente. A partir dos cartões recebidos, o número é adivinhado rapidamente pelo mágico. A atividade costuma deixar a turma intrigada, e curiosa para saber como o número pode ser encontrado tão depressa. Veja abaixo os cartões a serem utilizados.

1, 3, 5, 7, 9, 11 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29	2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30	4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30	16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

Justificativa: O truque para descobrir o número é fazer uma adição em que cada parcela é o primeiro número que aparece em cada um dos cartões recebidos. Uma vez os aprendizes captem esta regra, eles passam a assumir um papel protagonista, à medida em que buscam fazer a atividade com outras pessoas, entre familiares e colegas. Na atividade é trabalhado o cálculo mental envolvendo a adição de números naturais.

Habilidade do BNCC: (EF02MA05) Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito.

Módulo 5 – Subtração

Neste módulo, trabalharemos a operação de subtração de dois números naturais:

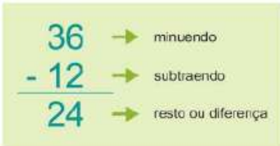
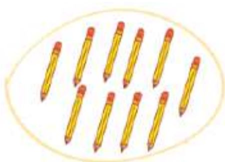


Fig. 5.1: Os termos da subtração.
(fonte)

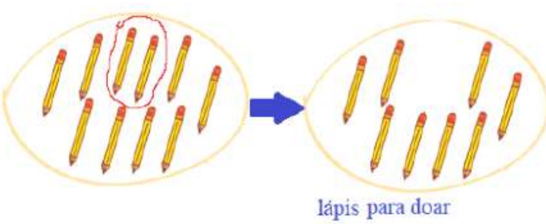
A subtração é usada quando queremos:

- Retirar uma quantidade da outra;
- Completar uma quantidade até atingir a outra (acrescentar);
- Comparar duas quantidades ("ter a mais que")

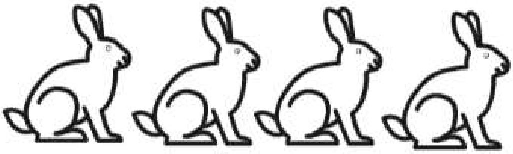
Exemplo 1: Nádia juntou seus lápis e decidiu doá-los para ficar apenas com dois lápis. Quantos lápis ela dará?



Observando que Nádia tem 10 lápis, para ficar apenas com 2, deverá subtrair 10-2=8, assim retirará 8 lápis.



Exemplo 2: Maria gosta muito de coelhos, já tem quatro, mas quer completar meia dúzia (6), então quantos coelhos faltam?



Partindo de 4 coelhos podemos acrescentar 2 para chegar a 6. A quantidade de coelhos que lhe falta para atingir 6 coelhos é: 6–4=2 coelhinhos.

Exemplo 3: Maria e João visitaram uma fazenda. Quem tem mais coelhinhos?

Fig. 5.2: Imagem ilustrativa do exemplo 3 (fonte)

Aqui temos um caso de comparação, Maria está segurando uma caixa com 3 coelhos, enquanto João está perto de 7 coelhinhos, assim podemos concluir que João tem 7–3=4 coelhos a mais que Maria.

Atividade 1: Observe a figura a seguir e crie problemas envolvendo as ideias: retirar, completar e comparar.

Material Dourado

Uma forma de trabalhar tanto a subtração e as operações aritméticas de adição e multiplicação, bem como o sistema decimal em um todo, de forma descontraída é utilizando o material dourado, idealizado pela grande educadora italiana Maria Montessori (1870-1952).

O material dourado ou Montessori é constituído por: cubo, placas, barras e cubinhos:

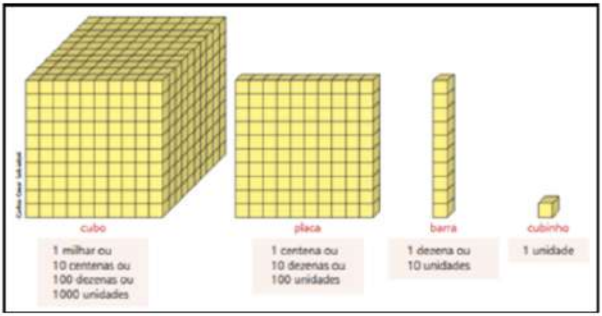


Fig. 5.3: Imagem do material dourado
(fonte)

Este material concreto e inovador foi criado com a finalidade de ensinar em especial as crianças com baixa visão (inicialmente eram contas douradas), mas foi notado que também facilitava a aprendizagem de crianças com deficiências psíquicas, com problemas de aprendizagem. Atualmente é muito utilizado em sala de aula.

Este material também dá para ser feito com E.V.A. (Etileno Acetato de Vinila) colorido e plano, o ideal é que cada criança confeccione seu material, conforme a figura seguinte

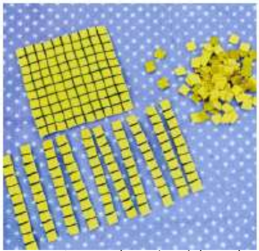
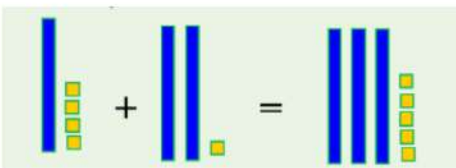


Fig. 5.4: Imagem do material dourado
(fonte)

O ideal é trabalhar inicialmente com a representação de um número. Quando os alunos estiverem bem familiarizados com este material, convém introduzir as atividades de comparação de quantidades, decomposição de números, adição e subtração, depois criar situações-problema que envolvam adições e subtrações cujos resultados não ultrapassem das dezenas.

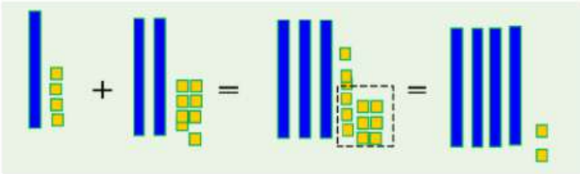
Exemplo 1: Represente os números 7, 14, 21 e 56 com o material dourado.

Exemplo 2: Represente a adição dos números: 14 e 21 com o material dourado.



Reunindo as unidades temos 4+1=5 e juntando as dezenas temos 1+2=3, portanto o resultado obtido é de 3 dezenas e 5 unidades, isto é 14+21= 35.

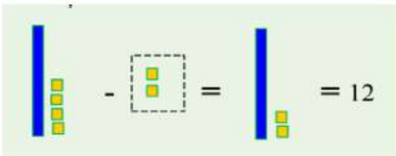
Exemplo 3: Represente a adição dos números: 14 e 28 com o material dourado.



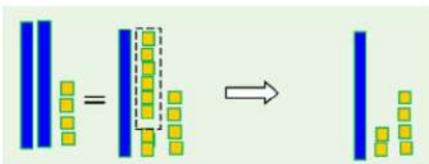
Reunindo as unidades temos 4+8=12 unidades que correspondem a 1 dezena e 2 unidades, neste caso trocamos 10 unidades por 1 dezena, esta é a explicação do '**vai um'.**
Juntando as dezenas temos 2+1 =3 e vai **uma dezena** (da troca), então dá: 4 dezenas e 3 unidades, isto é

$$14+28= 42.$$

Exemplo 4: Represente a subtração dos números: 14 menos 2 com o material dourado



Exemplo 5: Represente a subtração dos números: 24 menos 8 com o material dourado.



Neste caso trocamos uma das 2 dezenas por 10 unidades e excluímos ou retiramos as 8 unidades, ficando assim com 1 dezena e 6 unidades, isto é

$$24 – 8 = 16 .$$

O Ábaco

O ábaco é um instrumento simples para realizar cálculos aritméticos, o primeiro ábaco provavelmente foi construído pelos mesopotâmicos (3000 a. C. aproximadamente). As diversas antigas culturas como os egípcios, chineses, gregos, romanos, incas, etc. confeccionaram e usavam seus próprios ábacos.

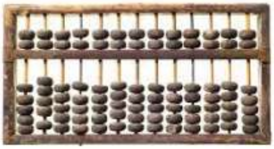
		
Ábaco romano	Ábaco chinês - Suanpan	Ábaco inca -Yupana

Fig. 5.5: Ábaco Romano
(fonte)

Fig. 5.6: Suanpan
(fonte)

Fig. 5.7: Yupana
(fonte)

O Soroban ou ábaco japonês é muito usado no Japão, pois além de possibilitar a resolução de vários cálculos matemáticos, favorece no raciocínio lógico, desenvolvimento da memória, pensamento crítico, ao contrário da calculadora eletrônica que basta apertar umas teclas e sai a resposta anulando a capacidade intelectual do aluno.

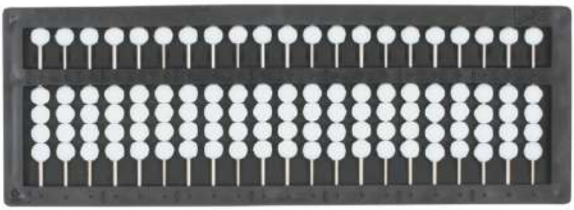


Fig. 5.8: Soroban – ábaco japonês, adaptado para deficientes visuais
(fonte)

A utilização do Soroban é recomendada e de grande utilização para deficientes visuais. Possui recursos capazes de realizar as quatro operações básicas, potenciação, radiciação de números naturais e de decimais, determinar o m.m.c. e o m.d.c. de números naturais, também permite trabalhar com frações, entre outros, veja www.sorobanbrasil.com.br.

O manual “A construção do conceito de números e o pré-soroban”, elaborado pela Secretaria de Educação Especial, apresenta atividades com Soroban capazes de construir os conceitos de números e operações básicas pelas crianças com deficiência visual.

Um ábaco mais simples, prático e barato de confeccionar é usando bolinhas, linha e uma tampa de sorvete, conforme a figura abaixo. Consiste em cinco linhas (ou mais) com dez bolinhas cada uma. As ordens de grandeza são distribuídas de baixo para cima.

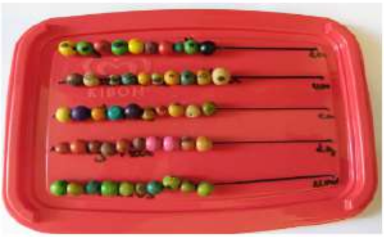


Fig. 5.9: Ábaco preparado com material reutilizável (arquivo pessoal)

Exemplo 1: Representar o número 236.
Duas centenas, 3 dezenas e 6 unidades. Deslocamos as bolinhas para a direita, conforme a figura:

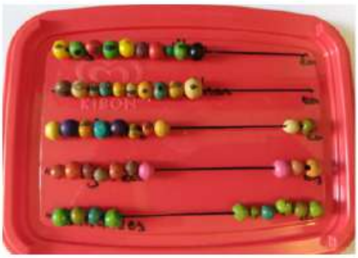


Fig. 5.10: Ábaco preparado com material reutilizável (arquivo pessoal)

Exemplo 2: Realize a adição entre os números 58 e 24.

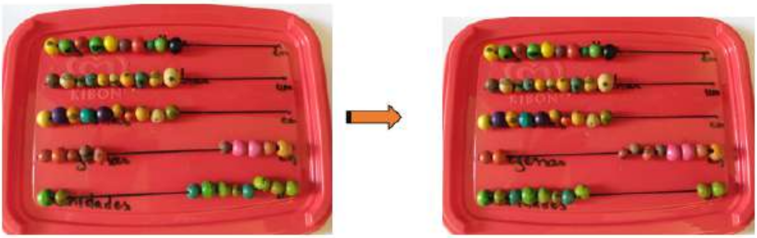


Fig. 5.11: Ábaco preparado com material reutilizável (arquivo pessoal)

Inicialmente representamos o maior número, que é o número 58 (8 unidades e 5 dezenas), logo acrescentamos o número 24, isto é, 4 unidades e 2 dezenas.

Comecemos pelas unidades: devemos acrescentar 4 unidades às 8 já existentes. Assim que completar 10 bolinhas na linha das unidades, então devemos trocar 10 unidades por 1 dezena, passando uma bolinha das dezenas para a direita, e ficando 6 dezenas e sobram 2 unidades. Finalmente acrescentamos as 2 dezenas do número 24, obtendo assim o número 82 =58+24.

Exemplo 3: Represente a subtração dos números 9 menos 5 unidades.
Primeiro deslizamos 9 bolinhas para a direita e retornamos 5, ficando assim com 4 bolinhas.

Exemplo 4: No caso da subtração 82-24, realizamos o processo inverso.
Iniciamos deslizando as 2 unidades para a esquerda, e trocamos uma dezena por 10 unidades, destas 10 unidades subtraímos mais 2 unidades, ficando com 8 unidades, A seguir, das 7 dezenas subtraímos 2 dezenas, ficando com 5 dezenas e 8 unidades.

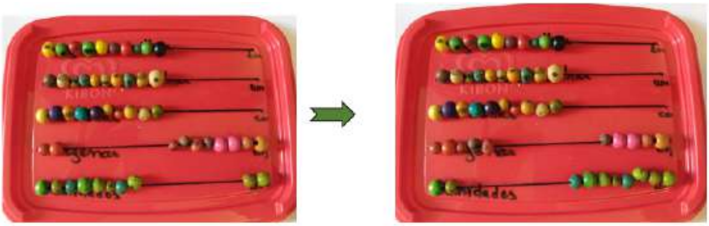


Fig. 5.12: Ábaco preparado com material reutilizável
(arquivo pessoal)

Módulo 6 – Multiplicação

Neste módulo, trabalharemos a operação de multiplicação de dois números naturais:

Fig. 6.1: os termos da multiplicação
(fonte)

A multiplicação é uma das quatro operações básicas da Aritmética, que realiza o produto de dois ou mais termos denominados fatores (Fig. 6.2).

Fig. 6.2: A multiplicação nos dá um produto a partir de dois ou mais fatores
(fonte)

Ensinar simplesmente o algoritmo da multiplicação faz do aluno um manipulador de números, como uma máquina de calcular. Aprendendo a fazer produtos, tais como 3309 x 7654, o aluno além de se aborrecer com a perda de tempo, não vivencia o que realmente está fazendo que vai além de multiplicar números. A memorização do algoritmo da multiplicação faz com que o aluno não se dê conta de que por trás da multiplicação existe uma adição repetida. Logo, podemos pensar na multiplicação de números naturais como uma adição repetida. Por exemplo, se você frequentou a natação duas vezes por semana, por 5 semanas, como mostra o calendário da Fig. 6.3, o número total de vezes em que foi na natação é 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10, ou 2 x 5 (número dois cinco vezes).

6.3: Calendários de novembro e dezembro de 2019
(fonte)

Por outro lado, o aluno nos anos iniciais ao ser apresentado ao problema acima (cálculo do número de vezes em que foi à natação) não associando a adição repetida a uma multiplicação, com certeza efetuará a adição em detrimento da multiplicação que tem solução mais rápida.

Portanto, conhecer várias formas de operacionar um produto pode trazer luz aos alunos para uma aprendizagem significativa da operação. Não se esquecendo de vir acompanhado de exemplos que têm a ver com o dia a dia dos alunos, ou pelo menos com a realidade da pessoa.

> Para a compreensão verdadeira e significativa dos processos envolvidos nas operações básicas da matemática é necessário que o professor não só permita que seus alunos conheçam e tenham acesso às diversas formas de cálculo, mas também, os incentivem a criar suas próprias estratégias, e que os ensinem a usá-lás em situações diferentes dependendo das necessidades que se tem. (HENRIQUES, p. 14)

Vejamos, agora, os métodos utilizados por antigas civilizações para realizar a multiplicação. Embora a forma de escrita dos números fosse outra, vamos utilizar nossa escrita dos números naturais:

1. Método chinês

Antes de passarmos para o método chinês, vejamos um exemplo simples de multiplicação utilizando bolinhas. Digamos que queremos fazer o produto 2 x 5. Façamos a seguinte configuração (Fig. 6.4):

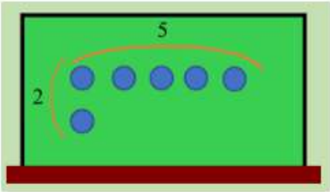


Fig. 6.4: Configuração primeira: número de bolinhas do multiplicando na primeira coluna (duas) e número de bolinhas do multiplicador na primeira linha (cinco). (fonte: Autores)

Em seguida, preencha com bolinhas a segunda linha horizontal (Fig. 6.5), ou quantas houver abaixo da primeira. O número total de bolinhas é o produto de 2 x 5. É fácil perceber isso se pensamos no produto 2 x 5 como a soma "duas bolinhas cinco vezes".

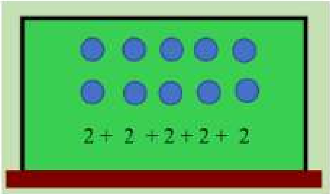


Fig. 6.5: Configuração segunda, com o produto 2 x 5, preenchendo a segunda linha. (fonte: Autores)

Em vez de bolinhas, utilizaremos varetas para efetuar o produto, porém de uma forma sofisticada. Digamos que queremos calcular o produto 253 x 24 (OLIVEIRA JR., 2015). O número 253 será representado por varetas verticais, enquanto 24 por varetas horizontais, segundo a configuração dada na Fig. 6.6. A partir dessa configuração, traçamos diagonais que se relacionam com o algoritmo da multiplicação.

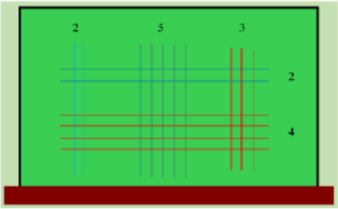


Fig. 6.6: Número 253 (multiplicando) representado por varetas verticais, com cores: vermelha para unidades (3), azul escuro para dezenas (5) e azul claro para centenas (2), e o número 24 (multiplicador), por varetas horizontais, com a mesma escolha para as cores.
(fonte: Autores)

A primeira diagonal está relacionada com a conta 3 x 4 (Fig. 6.7).

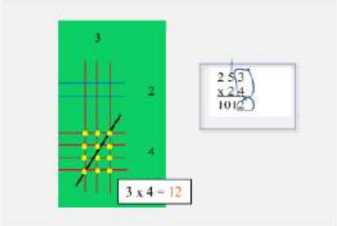


Fig. 6.7: A primeira diagonal com a conta a ser feita.
(fonte: Autores)

A segunda diagonal está relacionada com a conta 3 x 2 + 5 x 4, como mostra a Fig. 6.8. A terceira e a quarta estão relacionadas, respectivamente, com as contas 5 x 2 + 2 x 4 e 2 x 2 (Fig 6.9).

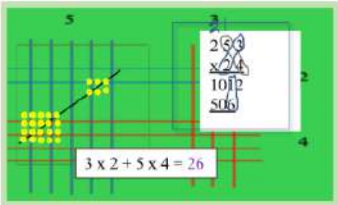


Fig. 6.8: A segunda diagonal com a conta a ser feita.
(fonte: Autores)

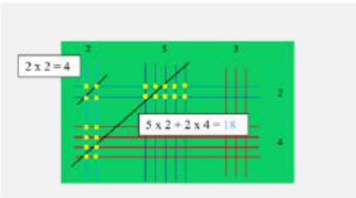


Fig. 6.9: A terceira e quarta diagonais.
(fonte: Autores)

O produto é obtido contando-se os pontos de cada diagonal, da direita para esquerda, sendo que ao atingir ou ultrapassar a casa das dezenas, esse número deverá ser somado à conta da próxima diagonal, como mostra a Fig. 6.10. Da primeira diagonal temos 12 pontos, portanto passamos 1 para somar às unidades da segunda diagonal (1 + 6 = 7). A segunda diagonal possui 26 pontos, cujo 2 será passado para a terceira diagonal (2 + unidades da terceira diagonal). A terceira diagonal possui 18 pontos, então 1 será repassado para a quarta diagonal, e a conta a ser efetuada para essa terceira é 2 (dezenas da segunda diagonal) + 8 (unidades da terceira diagonal), que é 10, atingindo portanto a casa das dezenas. Nesse caso, a dezena 1 será adicionada ao número de unidades da quarta diagonal, cuja conta final se resume como 1 (dezena da terceira diagonal) + 1 (dezena da conta para a terceira diagonal) + 4 (unidades da quarta diagonal), obtendo-se 6. O produto são os números assim obtidos: 6072.

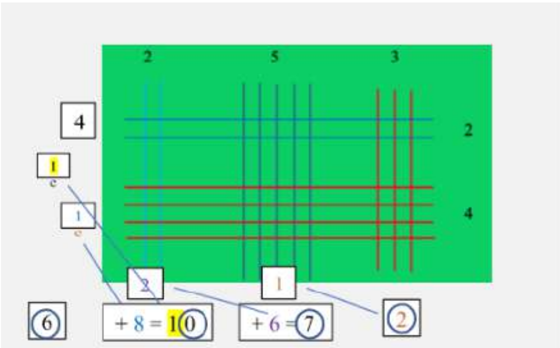


Fig. 6.10: 253 x 24 = 6072 (método chinês)
(fonte: Autores)

2. Método egípcio

Vimos na seção 1.2 do Módulo 1 a numeração da civilização egípcia que embora decimal não consideravam o valor posicional dos símbolos utilizados. Para realizar a multiplicação, eles utilizavam a adição através de sucessivas duplicações. Vejamos um exemplo: 15 x 102. Podemos escrever 15 como 15 = 1 + 2 + 4 + 8, então:

$$15 \times 102 = (1 + 2 + 4 + 8) \times 102,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} 15 \times 102 = {} & 1 \times 102 + \\ & 2 \times 102 + \\ & 4 \times 102 + \\ & 8 \times 102. \end{aligned}$$

Podemos escrever as somas acima de forma sucinta, como se apresenta na tabela:

1	102
2	204
4	408
8	816

Observemos que o processo se baseia praticamente em duplicar (somar o número com ele próprio), partindo do multiplicador 102. Obtemos o produto 102 + 204 + 408 + 816 = 1530. O processo funciona para qualquer produto de números naturais (ver OLIVEIRA Jr., 2015, p. 22).

3. Método indiano

O processo de multiplicação dos indianos também é chamado de método da Gelosia e consiste em construir tábuas retangulares, como mostra o exemplo a seguir. Para efetuarmos o produto 362 x 435, necessitamos de uma tabela 3 x 3 (Fig. 6.11), devido ao número de algarismos dos fatores.

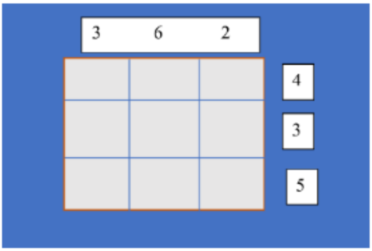


Fig. 6.11: Construir uma tabela, segundo o número de algarismos dos fatores.
(fonte: Autores)

Em seguida, em cada célula da tabela é traçada uma diagonal, e segundo o produto dos algarismos correspondentes (linha e coluna correspondentes), são preenchidos os dois espaços da célula (Fig. 6.12).

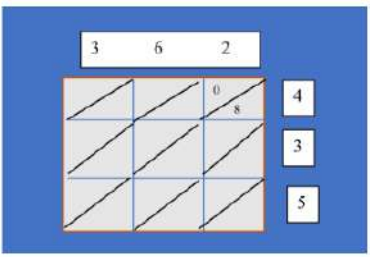


Fig. 6.12: Considerando 2 x 4, escrevemos 8 na primeira célula no canto superior direito, correspondendo à primeira linha com terceira coluna. Como não há dezena, colocamos 0 na parte superior da diagonal.
(fonte: Autores)

Dessa forma todas as células serão preenchidas. Logo em seguida são somadas as parcelas correspondentes a mesma diagonal, como mostra a Figura 6.13. Quando a soma excede 9, o algarismo da dezena passa para a próxima diagonal, o que ocorre nas diagonais centrais.

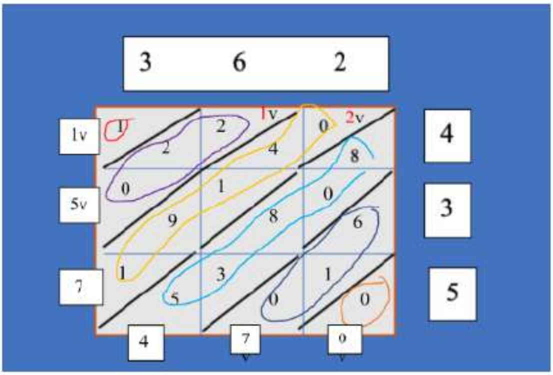


Fig. 6.13: Tabela preenchida com os produtos "linha por coluna", segundo cada célula. O produto é calculado fazendo a soma dos números de cada diagonal, passando para a próxima diagonal se essa soma for maior que 9.
(fonte: Autores)

Pelo método, o produto é exatamente o número construído a partir dessas somas das diagonais: 157.470 = 362 x 435.

Módulo 7 – Divisão

Neste módulo, trabalharemos a operação de divisão de dois números naturais:

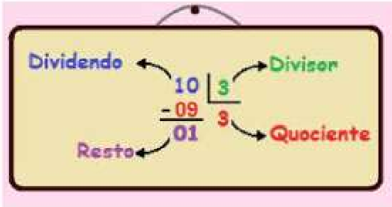


Fig. 7.1: os termos da divisão
(fonte)

A divisão é uma das quatro operações básicas da Aritmética. Ela determina o quociente entre dois números. Podemos pensar a divisão como uma inversão da multiplicação se escrevemos da seguinte forma:

- como 5 x 4 = 20 então 20 : 5 = 4 ou 20 : 4 = 5.

Outra forma de escrever:

$$5 \times 4 = 20 \Rightarrow 20 \div 5 = 4$$

ou

$$5 \times 4 = 20 \Rightarrow 20 \div 4 = 5.$$

Quando pensamos na divisão para resolver um problema, pode tratar-se de, por exemplo, determinar quantos bombons cada uma de cinco crianças vai ganhar se foram comprados 20 bombons ($20 \div 5$). Como $5 \times 4 = 20$ então cada criança ganhará 4. Essa divisão nos remete também à soma repetida da multiplicação (4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20). A cada parcela da adição estamos associando uma criança.

O que fizemos para resolver a entrega dos bombons foi dividir uma quantidade de objetos (20) em partes iguais. Podemos usar a operação de divisão também para saber quantos vezes uma quantidade de objetos cabe em uma parte maior. Por exemplo, Luisinho possui 63 bolas de gude. Precisa armazenar essas bolas em caixas pequenas. Cada uma dessas caixas cabe, no máximo, 7 bolas de gude. Caso Luisinho queira usar um número mínimo de caixas, quantas caixas ele precisará? Observemos que Luisinho poderia até usar 63 caixas, armazenando uma bola de gude em cada uma. Porém, para usar o mínimo de caixas ele precisará recorrer à capacidade máxima de cada caixa. Então para resolver esse problema empregamos a operação de divisão: 63 ÷7=9. Ou seja, ele precisará de exatamente 9 caixas. Nesse caso, a divisão é exata, ou seja, o resto é zero. Mas poderia acontecer que as caixas pequenas tivessem a capacidade máxima de 5 bolas de gude. Isto é, cada caixa comporta, no máximo, 5 bolas de gude. Como proceder para que Luisinho use o número mínimo de caixas? A Figura 7.2 nos mostra a conta a ser feita.

Fig. 7.2: Divisão de 63 por 5, com resto diferente de zero.
(fonte: Autores)

Então Luisinho precisará de 12 caixas (em cada uma, 5 bolas) mais 1 (com 3 bolas), 13 no total.

Observemos que o resto é muito importante neste problema. Em função disso, podemos pensar em começar a fazer o/a aluno/a na divisão como um jogo, escolhendo a divisão por 2. Podemos nesse momento falar na divisão dos números em pares e ímpares e já fixando na cabeça do/a aprendiz a ideia de metade. A seguir, veremos um método que é chamado de método de multiplicação dos camponeses russos (embora não vimos nada que prove essa afirmação) que usa da divisão por 2 para encontrar o produto de dois números. O interessante do método é o fato de que ele trabalha com duas operações inversas: calcular o dobro e calcular a metade. O que veremos adiante foi baseado em OLIVEIRA (2015) e SOLDATELLI (2016).

1. Método dos Camponeses Russos para a Multiplicação: dobro e metade

Antes de falarmos do método em si, para termos uma matemática significativa, é de bom grado levar um pouco de informação sobre os camponeses russos, para tornar a aula de matemática significativa e atrair a atenção dos educandos. É de importância fundamental atiçar a atenção das crianças. Sabemos que a motivação é o primeiro passo para a aprendizagem. Independentemente do nível cognitivo das crianças, se não há motivação então com certeza não haverá aprendizagem efetiva. Por que alguns conseguem aprender matemática mais que outros? Muitos dizem: porque eu gosto. Mas esse gosto tem a ver com a curiosidade, com a questão do pensamento abstrato, etc. Então existe em algum momento o voltar a atenção para aquilo que será ensinado.

É preciso que o educando foque no que será dito e isso somente se consegue se a criança quiser. Essa teoria não vale apenas para crianças. Basta que queiramos aprender algo e nos entregarmos em atenção para aquilo que queremos aprender, certamente aprenderemos. É claro que as dificuldades cognitivas do sujeito podem dificultar a aprendizagem. Nesse ponto exatamente entra o educador para elaborar, criar a metodologia para aquele aprendiz. Quantos não terão tido um aluno particular bastante inteligente para aprender matemática, mas está ali naquele momento precisando de professor particular? Não é senão a falta de atenção para aquilo que está sendo ensinado na sala de aula. E, portanto, voltamos ao ponto do início: faz-se necessário motivar o aluno.

Sempre que pudermos levar a matemática às crianças junto com uma parte histórica, seja com figuras, seja com história, chamando atenção delas, teremos grandes chances de motivar a aprendizagem. E, em relação a esse método, como não temos base histórica de como foi realmente criado pelos camponeses russos, podemos então falar um pouco de como eles viviam e sua importância na Rússia (D'AMBROSIO, 2018).

Pode-se falar, também, sobre a questão da escravidão dos camponeses (Servidão na Rússia) ou, para crianças menores, falar sobre os sapatos "lapti" (Figura 7.3), que segundo os russos era usado para afastar as forças do mal e transportar os espíritos de uma casa a outra.

Fig. 7.3: Sapato russo tradicional feito com a fibra da bétula. Os "lapti" eram sapatos de camponês: um bom par custava cerca de três copeques – contra os cinco rublos das botas de couro mais baratas possíveis. A Rússia chegou até mesmo a ser apelidada, ironicamente, de "terra dos lapti", ou seja, a terra dos camponeses pobres.
(fonte)

Ou, ainda, falar de algum quadro em particular que mostre esses camponeses, utilizando-se do ensino de matemática associado ao ensino da arte. Nas Figuras 7.4 e 7.5, vejam dois desses quadros, ambos de Nikolay Petrovich Bogdanov-Belsky (1868-1945).

Fig. 7.4: "At the School Doors", de Bogdanov-Belsky, de 1897.
(fonte)

Fig. 7.5: "Mental Arithmetic", de Bogdanov-Belsky, de 1895 (Escola Rachinsky)
(fonte)

Antes de descrevermos o algoritmo propriamente do método dos camponeses russos, vejamos dois exemplos. No primeiro exemplo, consideremos 10 jarras, cada uma com 1 litro de leite. Essa quantidade de leite poderia ser colocada, também, em vasilhas de 2 litros de forma que o leite comportasse em apenas 5 (Fig. 7.6).

Fig. 7.6: Dez jarras de leite de 1litro é equivalente a cinco jarras de leite de 2 litros cada.
(fonte: Autores com imagens do site)

Com esse tipo de raciocínio, escrevemos a Tabela 7.1 com os fatores do produto (total em litros de leite) em cada coluna: 10 x 1 = 5 x 2. Isso que parece muito simples, em verdade é a base do método dos camponeses russos para a multiplicação.

2 2 / metade			x 2 / dobro
	10	1	
	5	2	

Tabela 7.1: Ao passar de uma linha para outra, na primeira coluna dividimos e na segunda multiplicamos.

Nosso segundo exemplo vamos considerar o produto 412 por 387. Montamos uma tabela com o número maior na coluna da esquerda. A partir daí seguimos a tabela 7.1, dividindo por 2 (cálculo da metade) o número da coluna da esquerda e multiplicando por 2 (cálculo do dobro) o da direita. Segue esse raciocínio até alcançar o número 1 na última linha da esquerda (Tabela 7.2). No caso de o número da esquerda ser ímpar, desconsidera-se o resto e coloca apenas o quociente truncado. Por exemplo, na quarta linha da Tabela, 51 é dividido por 2 obtendo-se 25 com resto 1. Todos os restos serão 0 ou 1 e isso tem a ver com a explicação do método dar certo (OLIVEIRA, 2016).

Para encontrar o produto 412 x 387 basta considerar as linhas em que os números da esquerda são ímpares. Para essas linhas, some os correspondentes números da direita:

1.548 + 3.096 + 6.192 + 49.536 + 99.072,

cujo resultado é 159.444, o produto procurado. O método de multiplicação dos camponeses consiste em, por um lado, dobrar uma sequência de números, por outro lado encontrar a metade de outro grupo de números, ou seja, apenas usando a ideia de dobro e metade.

412	387
206	774
103	1.548
51	3.096
25	6.192
12	12.384
6	24.768
3	49.536
1	99.072

Tab. 7.2: Uso do método dos camponeses para o cálculo do produto 412 x 387.

Segue o método, passo a passo: (HENRIQUE, 2015)

1) registram-se os dois fatores da multiplicação em duas colunas, colocando o maior fator na coluna da esquerda e o menor fator na coluna da direita (pode-se considerar o contrário, como em OLIVEIRA (2015));

2) divide-se o número da coluna da esquerda sucessivamente por dois abandonando o resto até que se obtenha a unidade;

3) paralelo ao segundo passo multiplica-se o número da coluna da direita sucessivamente por dois até a linha que coincida com a unidade obtida da divisão da coluna da esquerda;

4) abandonam-se as linhas que comecem por números pares (coluna da esquerda), sendo o produto a soma dos números que ficaram na coluna da direita.

2. Métodos de Ensino de Divisão

Apresentamos dois métodos de ensino de divisão: método da costura e método das subtrações sucessivas.

2.1 Método das subtrações sucessivas

Neste método usamos o fato de que a divisão pode ser pensada em calcular quantas vezes uma quantidade de objetos cabe numa parte maior. Por exemplo, 40 ÷ 8 é calcular quantos “oitos” cabem em quarenta. O processo consiste em subtrair de 40 oito unidades e assim, sucessivamente, até restar 0 ou um número menor que 8 (HENRIQUE, 2015, p. 28):

$$\left.\begin{array}{r} 40-8=32\\ 32-8=24\\ 24-8=16\end{array}\right\} \boxed{\text{3 unidades de “oito”}}$$

$$\left.\begin{array}{r} 16-8=8\\ 8-8=0.\end{array}\right\} \boxed{\text{2 unidades de “oito”}}$$

Logo, cabem 5 unidades de “oito” em 40. Então, 40 ÷ 8 = 5.

Utilizando-se esse método para efetuar 35 ÷ 6, encontramos as seguintes diferenças: 29, 23, 17, 11 e 5. Dado que, ao atingir o número 5 não é mais possível caber 6, finalizamos a conta e concluímos que 35 ÷ 6 é igual a 5 com resto 5.

2.2 Método da costura

Esse segundo método é aplicado apenas a divisões exatas. Vejamos com um exemplo como se divide por esse método. Vamos dividir 1.958.534 por 2. Devemos transformar os algoritmos do dividendo (1, 9,5, 8, 5, 3, 4) em múltiplos do divisor 2. Então, para cada um ou dois algarismos, ou é múltiplo de 2 ou maior que um múltiplo de 2, mas não muito maior. Comecemos com 1, é menor que 2. Então consideremos 19. Os múltiplos de 2 são:

$$2 \times 1 = 2$$
$$2 \times 2 = 4$$
$$2 \times 3 = 6$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$2 \times 5 = 10$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$2 \times 8 = 16$$
$$2 \times 9 = 18$$

Para ficar mais claro o método, usaremos de uma tabela, onde a primeira linha conterá os algarismos do dividendo. A segunda linha conterá os múltiplos de 2 mais próximos dos algarismos escolhidos. Quando não são exatos, o múltiplo e o(s) algarismo(s) escolhido(s), a diferença será posicionada à esquerda do próximo algarismo (Tabela 7.3).

19 $\boxed{19 - 18 = 1}$	5	8	5	3	4
18					

Tabela 7.3: Primeiro procedimento da divisão de 1.958.534 por 2: Escolhido o múltiplo 18, temos 1 como diferença que será posicionado à esquerda do 5, formando o número 15.

Em seguida, procuramos o múltiplo de 2 mais próximo de 15. Nesse caso é 14, que é 7 x 2. A diferença é 1 e, portanto, novamente posicionamos 1 à esquerda do próximo algarismo (8). Vamos necessitar de uma nova linha para colocar os fatores 9 da primeira conta e 7 da segunda. A tabela completa com 3 linhas é mostrada na Fig. 7.4. E os algarismos da terceira linha é o quociente procurado.

19	5	8	5	3	4
18	14	18	4	12	14
9	7	9	2	6	7

Tabela 7.4: Divisão efetuada através do método da costura. A terceira linha nos dá o quociente entre 1958534 e 2, que é 979.267.

Tentem fazer a divisão de 3450316 por 4 usando esse método. O primeiro passo é escrever os múltiplos de 4.

Módulo 8 – Problemas envolvendo as quatro operações

Neste módulo trabalharemos atividades que envolvem uma ou mais das 4 operações vistas nos módulos anteriores. Como exploraremos a resolução de problemas, é conveniente lembrarmos algumas estratégias sugeridas pelo matemático George Polya (1975) acerca do tema, salientando-se que não existe um truque milagroso, mas que algumas atitudes mentais podem ajudar na resolução de problemas. Segundo Polya (1975, p. 5):

> É uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja. Estas coisas tolas e tristes fazem-se muitas vezes, mas cabe ao professor evitar que elas ocorram nas suas aulas. O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante.

É útil considerar quatro etapas principais: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Comentaremos resumidamente cada uma destas etapas, também chamadas fases de trabalho.

Compreensão do problema: o que o problema está perguntando? Quais são os dados que ele apresenta? É possível traçar uma figura ou um diagrama que represente o problema? É possível descrever o problema em linguagem matemática? Por exemplo, num problema em que a criança precise saber quanto é 3×4, ela pode desenhar 3 grupinhos, cada um com 4 maçãs (Fig. 8.1) ou formar 4 grupinhos com 3 maçãs cada um (aplicando a propriedade comutativa da multiplicação). Essa primeira fase é compreender o problema, o que se pede.

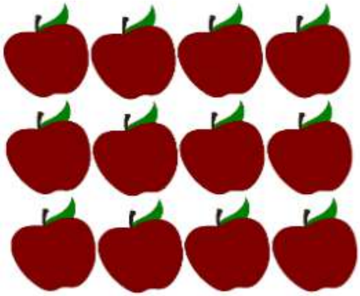


Fig. 8.1: Uma das formas de representar 3x4.
(fonte: Autores)

Estabelecimento de um plano: É possível relacionar os dados do problema com aquilo que está sendo perguntado? Já viu este problema antes? Já viu o mesmo problema apresentado de forma ligeiramente diferente? Conhece um problema relacionado? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Uma estratégia comum é usar um “problema auxiliar” utilizando ou o resultado obtido em um problema mais simples ou o método de resolução dele. Por exemplo, uma criança precisa saber o resultado de 6×8. Um problema auxiliar seria, por exemplo, a resolução de 3×8. Ela sabendo que $3\times8 = 24$ e que o dobro de 24 é 48, pode então concluir que $6\times8 = (2\times3)\times8 = 2\times(3\times8) = 2\times(24) = 48$. Ou seja, a criança poderia imaginar que, sendo $6 = 2 \times 3$, então 6×8 é o dobro de 3×8. É nessa segunda fase que estabelecemos um plano de como será resolvido o problema. Uma vez estabelecido um plano, a próxima etapa é muito fácil, dependerá apenas de paciência.

Execução do plano: Ao executar o seu plano de resolução convém verificar cada passo. É possível verificar claramente a correção de cada passo?

Retrospecto: Examine a solução obtida. O resultado entra em choque com algum outro anteriormente conhecido? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado ou o método de resolução em algum outro problema? É nesta quarta etapa que a solução é revista e discutida.

Observamos que quanto mais refletirmos sobre o problema e o conectarmos com outras situações, mais fácil será lembrar dele depois, o que poderá ajudar na solução de futuros problemas. Em nosso ensino, costumamos concentrar os esforços apenas na etapa de execução do plano, mas na resolução de problemas todas as etapas são importantes.

Atividade 1: Jogo do resto

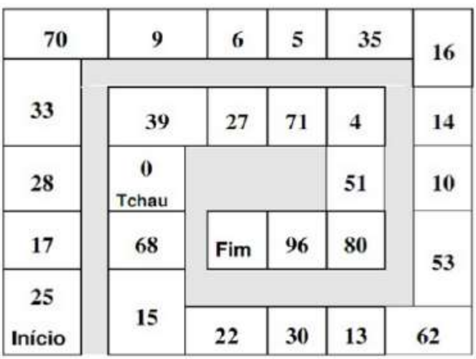
Neste jogo trabalhamos de forma lúdica a operação de divisão, incluindo-se também o caso onde ela não é exata e apresenta um resto. Além de trabalhar o cálculo mental, a atividade é indicada para introduzir os critérios de divisibilidade, pois é possível que os estudantes percebam antecipadamente alguns desses critérios a partir da brincadeira. Um vídeo desta atividade pode ser encontrado nesse link. A abordagem abaixo é encontrada na apostila digital “Brincando com a Matemática”, presente no site “Matemática Transformadora”.

Material necessário: Lápis de cor, um dado e o tabuleiro descrito na figura abaixo.

Descrição do jogo: João e Isa iniciam uma partida, com o número 25, segundo a figura.

Exemplo: Isa começa o jogo tirando o número 3 no dado, logo 25 dividido por 3 deixa resto 1, o boneco da Isa anda uma casa. Agora é a vez do João, ele tira o número 4 no dado, assim, 25 dividido por 4 deixa resto 1, o boneco do João anda uma casa, ou seja, os dois ficam com o número 17.
Se Isa lança o dado e obtém o número 5, então 17 dividido por 5 deixa resto 2, o boneco da Isa anda duas casas (até a cada do 33). Se João obtém o número 6, então 17 dividido por 6 deixa resto 5, o boneco de João anda 5 casas (até a casa do 9). E assim sucessivamente.

Ganha quem chegar ao “Fim” primeiro. Caso algum boneco pule para a casa do “0”, ele é eliminado do jogo.



Podemos levantar com os alunos questões como:

1) Como é possível saber se o número é divisível por 2 sem efetuar a divisão por 2?

2) Em outro momento, a partir deste jogo, repita essa discussão para a divisibilidade e múltiplos de 3, 4, 5 ou 6. Podemos, por exemplo, podemos pedir que os alunos pintem de vermelho os números (do tabuleiro) que são divisíveis por 2 e de amarelo, aqueles que são divisíveis por 3, e em seguida questionar:

a) Por que alguns dos números foram pintados com as duas cores?

b) Quais foram os números do tabuleiro que foram marcados com vermelho?

c) E os que receberam a cor amarela?

d) Que números receberam ambas as cores, vermelho e amarelo?

Atividade 2: O problema dos 8 pães pagos com 8 moedas (Malba Tahan – O homem que calculava)

Divisão simples, matematicamente certa ou perfeita?

Nesta história, Beremiz e seu amigo, a caminho de Bagdá encontraram na estrada um viajante ferido e maltrapilho. Ao socorrerem o homem e ouvirem seu relato, souberam que se tratava de Salem Nasair, um dos mais ricos mercadores de Bagdá, que fora atacado no deserto, tendo conseguido milagrosamente escapar. Para salvá-lo da fome, os dois amigos resolveram compartilhar com ele os pães que possuíam, até que conseguissem chegar na cidade de Bagdá. Beremiz, também conhecido como “o homem que calculava” possuía 5 pães, enquanto seu amigo possuía 3.

Em cada refeição, um pão era dividido em três partes iguais, cabendo a cada viajante uma das partes. Salem prometeu retribuir a ajuda com 8 moedas de ouro, quando os três chegassem em Bagdá.


Exploração: Se você fosse o Salem, como faria a divisão das 8 moedas, ou seja, quantas daria a Beremiz e quantas daria a seu amigo?

Cumprindo com a palavra, quando chegaram em Bagdá, Salem agradeceu a ambos e entregou a Beremiz 5 moedas, pois este contribuiu com 5 pães, e a seu amigo as outras 3, pelos 3 pães cedidos.
Beremiz considerou a divisão simples, mas apontou que ela não é matematicamente correta. Pois os 8 pães, cada um partido em 3 partes iguais, geraram 24 pedaços, sendo que cada um dos três viajantes comeu 8. Os 5 pães de Beremiz geraram 15 pedaços, dos quais 8 foram consumidos pelo próprio Beremiz. Os 3 pães de seu amigo, geraram 9 pedaços, 8 dos quais consumidos por ele mesmo.

Questão: Dos 8 pedaços consumidos por Salem, quantos vieram de Beremiz e quantos vieram de seu amigo? Uma explicação pode ser encontrada nesse vídeo.

Em virtude das observações de Beremiz, Salem refez a divisão de moedas entregando 7 a Beremiz e apenas uma a seu amigo. Beremiz então retrucou que a divisão havia ficado matematicamente correta, mas não era perfeita aos olhos de Deus. Assim juntou as 8 moedas de ouro e entregou 4 delas a seu amigo.

Sugestão de dinâmica: Esta atividade pode ser encenada com os alunos.

Problemas variados:

1) Iza e João colheram uma cesta com 94 morangos. Iza comeu duas dezenas e oito unidades e João comeu uma dúzia e duas unidades. Estragaram-se 8 morangos.

a) Quantos morangos sobraram?

b) É possível dividir o número de morangos entre 4 amigos de forma igualitária?

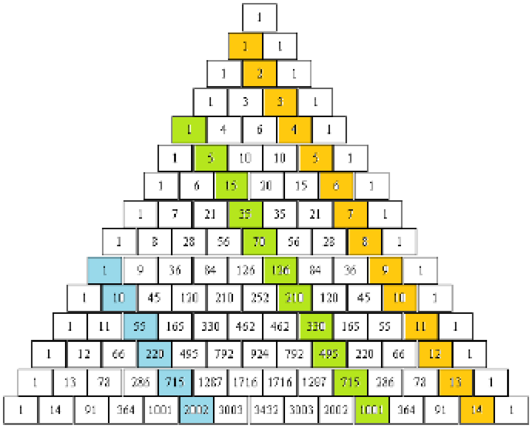
2) O Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético infinito onde são dispostos os coeficientes das expansões binominais. Os números que compõem o triângulo apresentam diversas propriedades e relações. Observe a figura a seguir (parte do triângulo de Pascal) e determine:

a) A soma dos números marcados com azul e amarelo;

b) Some os números marcados com verde e subtraia o valor obtido no item (a);

c) Multiplique o valor obtido no item (b) por 2 e divida-lo por 7;

d) Pinte com vermelho todos os números divisíveis por 3. (Surge um fractal)



3) De férias por conta do recesso escolar, Diego decide ir à praia. Para chegar ao local ele pega dois ônibus. A passagem do primeiro ônibus custa R$ 13,50 e a passagem do segundo custa R$ 4,50. No entanto, quando Diego chega à praia, começa a chover, então ele decide pegar um táxi para ir embora mais rápido. Sabendo que o táxi cobra R$ 3,00 a cada quilômetro rodado e Diego está a 23 quilômetros de casa, quanto ele terá gastado ao todo contando passagem e táxi?

Referências Bibliográficas

_____________ ASDM. Acessível em: https://www.youtube.com/watch?v=gpz-gfcGvug

A divisão das moedas: https://www.youtube.com/watch?v=LbIO2AptSP4

ALMEIDA, M. F. Descobrindo a matemática por meio de jogos e brincadeiras. V Seminário Vozes da Educação. FFP/UERJ, 2013.

ALMEIDA, M.F.P et al. Brincando com a Matemática. Acessível em: www.matematicatransformadora.com

BELFORT, E; MANDARINO, M. Números Naturais: conteúdo e forma. Rio de Janeiro: LIMC., 2006.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a base. Brasília: 2017. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br

CARAÇA, B. J. Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARDOSO V. C.. Materiais Didáticos para as Quatro Operações. 5a ed. Caem. Ime-USP. São Paulo, 2002.

CARRAHER, T. N. (org). Aprender pensando. Petrópolis: Vozes, 1989.

CAVALCANTE RAMOS, M. A interação entre soroban e dosvox no ensino de potência. Lante- UFF, 2013.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo, 2018. Acessível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300189

FREIRE, P. A Importância do Ato de Ler em três artigos que se completam. 23a Edição. https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2014/10/importancia_ato_ler.pdf

GARCÍA MÁRQUEZ R.; ZANDER VAIANO A.; SILVA DE MELLO E. Um enfoque pedagógico da matemática para o ensino Fundamental. Joinville: Ed. Clube de Autores, 2009.

GARDNER, M. Entertaining Science Experiments with Everyday Objects. New York: Dover Publications, Inc, 1981.

HENRIQUE, L. S. Trabalhando Multiplicação e Divisão com os Números Naturais Através de Métodos Históricos. Trabalho de Conclusão de Curso, UFPB, 2015. Acessível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/1350/1/LSH30092016.pdf

KAMI, C. A Criança e o Número. 34a Edição. Ed. Papirus, 2006.

MANDARINO, M.C.F e BELFORT, E. Matemática nas Séries Iniciais – Parte I. Números Naturais – Conteúdo e Forma. LIMC.Rio de janeiro: 2006.

MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO – Secretaria de Educação Especial. A construção do conceito de número e o pré-soroban. Brasília – DF. 2006.

OLIVEIRA JR., M. A. O uso do método egípcio, babilônico, chinês e russo no ensino de multiplicação de números naturais na escola pública. Dissertação de Mestrado, UFAP, 2015. Acessível em: https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/O-USO-DOS-MÉTODOS-EGÍPCIO-BABILÔNICO-CHINÊS-E-RUSSO-NO-ENSINO-DA-MULTIPLICAÇÃO-DE-NÚMEROS-NATURAIS-NA-ESCOLA-PÚBLICA.pdf

Os oito pães pagos com 8 moedas: https://www.youtube.com/watch?v=bJhtu91C7qg

PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. A gênese do número na criança. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

POLYA, G. A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda. 2ª ed., 1975.

ROQUE, T. História da Matemática – uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar Editora, 2012.

RUBINSTEIN C.; MONNERAT M.J.; MONKEN R. E ORTIZ S. Matemática: Para o curso de formação de professores de 1ª a 4ª série do 1º grau. Editora Moderna 1ª ed.1991.

SANTOS, C. L. Jogo do resto . Em: https://www.youtube.com/watch?v=sXXymBPPxfg&t=19s.

SANTOS, C. L. Jogo do resto. Acessível em: https://www.youtube.com/watch?v=sXXymBPPxfg&t=19s

SOLDATELLI, A. Etnomatemática: a Multiplicação ao Redor do Mundo. V Simpósio do Ensino de Ciências e Matemática da Serra Gaúcha (V SECINSEG). Journal Scientia cum Industria, vol. 4, n. 4, 2016. Acessível em: http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/scientiacumindustria/article/view/4907

TAHAN, M. O homem que calculava. Rio de Janeiro: Editora Record, 79º ed., 2010.

YOKOYAMA, L. A., Matemática e Síndrome de Down. Ciência Moderna. Rio de Janeiro, 2014.